

一类稀疏效应下捕食-被捕食者系统极限环的存在性和唯一性^{*}

吴兴岐 刘学生

赵振海

(大连大学数学系, 116622) (大连理工大学应用数学系, 116024)

摘 要 本文研究捕食者种群具有线性密度制约的一类稀疏效应下捕食-被捕食者系统 $\dot{x} = x(ax - cx^3 - by)$, $\dot{y} = y(-\alpha + \beta x - \gamma y)$. (*) 得到: (1) 当 $A_1 < \bar{A}_1, A_2 < \bar{A}_2, A_3 > \bar{A}_3$ 时, 系统(*)在第一象限内存在极限环; (2) 当 $A_2 < \bar{A}_2, A_3 > \bar{A}_3$ 时, 系统(*)在第一象限内存在唯一极限环

关键词 极限环, 平衡点, 系统, 唯一性, 存在性

分类号 AM S(1991) 92B, 34C/CCL O 175.12

1 引 言

捕食与被捕食者种群增长可用Lotka-Volterra模型: $\dot{x} = ax(1 - kx) - bxy$, $\dot{y} = y(-\alpha + \beta x)$ 描述, 其中 a, b, k, α, β 皆为具有一定生物意义的非负常数^[1]. 但是人们在长期的研究中发现, 这个方程作为描述有些种群的模型还不够完善. 因此Kuno^[2]提出考虑具有稀疏效应下的相对增长率, 即以 $b(x) = ax^2/(sx + x^2)$ 来代替含有被捕食者种群的常数增长率 a 的项 ax . 这样上述模型可表示为 $\dot{x} = ax^2/(sx + x^2) - akx^2 - bxy$, $\dot{y} = y(-\alpha + \beta x)$, 这里 sx 为稀疏系数, 它表示稀疏效应下的强度. 当 sx 比被捕食者种群容纳量 $1/k$ 充分大时, 这个模型可简化为 $\dot{x} = x(ax - cx^3 - by)$, $\dot{y} = y(-\alpha + \beta x)$.

本文与文[3]不同之处是考虑捕食者种群具有线性密度制约, 因此上述模型可表示为:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(ax - cx^3 - by), \\ \dot{y} = y(-\alpha + \beta x - \gamma y). \end{cases} \quad (1)$$

作变换 $x = \mu\bar{x}, y = \lambda\bar{y}, t = \gamma\tau$, 令 $\alpha\gamma = 1, \beta\mu\gamma = 1, \lambda\lambda\gamma = 1$, 记 $A_1 = a/\beta, A_2 = c\alpha^2/\beta^3, A_3 = b/\gamma$. 记 $\bar{x}, \bar{y}, \tau$ 仍为 x, y, t 得

$$\begin{cases} \dot{x} = x(A_1x - A_2x^3 - A_3y), \\ \dot{y} = y(-1 + x - y). \end{cases} \quad (2)$$

记 $R = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}, \bar{R} = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$.

* 1995年10月18日收到 1996年11月10日收到修改稿 国家自然科学基金资助项目

2 平衡点分析

解方程 $(A_1x - A_2x^3)/A_3 = x - 1$, 得 $x^3 + px + q = 0$, 其中 $p = (A_3 - A_1)/A_2$, $q = -A_3/A_2$. 设 $\Delta = (q/2)^2 + (p/3)^2 = A_3^2/4A_2^2 + (A_3 - A_1)^3/27A_2^3 > 0$, 当 $A_3 > A_1$ 时, 即当 $\Delta > 0$ 时, 方程 $x^3 + px + q = 0$ 有一个实根 $x^* = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{\Delta}}$. 当 $A_2 < 4[(3A_1A_3(A_3 - A_1)) + A_1^3]/27A_3^2$ 时, $x^* = (A_3/3A_2\sqrt[3]{\Delta}) + O(*) > 1$, 其中 $O(*)$ 为皮亚诺余项 $y^* = x^* - 1 > 0$.

当 $A_2 < A_1 < A_3$, $A_2 < 4[(3A_1A_3(A_3 - A_1)) + A_1^3]/27A_3^2$ 时, 系统(2) 在 $\bar{R}$ 上有三个平衡点, $R_0(0, 0)$ 为鞍结点; $R_1(\sqrt{A_1/A_2}, 0)$ 为鞍点; $R_2(x^*, y^*)$ 其中 $x^* = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{\Delta}} > 1$, $y^* = x^* - 1 > 0$. $R_2(x^*, y^*)$ 的特征方程为

$$\lambda^2 + (3A_2x^{*3} - A_1x^* + y^*)\lambda + x^*y^*(A_3 - A_1 + 3A_2x^{*2}) = 0,$$

$$q = x^*y^*(A_3 - A_1 + 3A_2x^{*2}) > 0 \quad (\text{因 } A_3 > A_1),$$

$$\begin{aligned} p &= 3A_2x^{*3} - A_1x^* + y^* = 3(A_1x^* - A_3y^*) - A_1x^* + y^* \quad (\text{因 } A_1x^* - A_2x^{*3} - A_3y^* = 0), \\ &= 2A_1x^* + (1 - 3A_3)x^* + 3A_3 - 1 \quad (\text{因 } y^* = x^* - 1) \\ &= (2A_1 + 1 - 3A_3)x^* + 3A_3 - 1. \end{aligned}$$

令 $p = 0$, 得 $\hat{x}^* = (3A_3 - 1)/(3A_3 - 2A_1 - 1) > 1$, 当 $A_3 > (2A_1 + 1)/3$ 时, 当 $A_1 < [(3A_3 - 1)(A_3 - 3A_2\sqrt[3]{\Delta})]/2A_3$ 时, $x^* > \hat{x}^*$. 当 $x^* > \hat{x}^*$ 时, $p < 0$, $q > 0$, $R_2(x^*, y^*)$ 为不稳定平衡点; 当 $x^* < \hat{x}^*$ 时 $p > 0$, $q > 0$, $R_2(x^*, y^*)$ 为稳定平衡点. 设

$$\bar{A}_1 = \min\{A_3, [(3A_3 - 1)(A_3 - 3A_2\sqrt[3]{\Delta})]/2A_3\},$$

$$\bar{A}_2 = \min\{A_1, 4[(3A_1A_3(A_3 - A_1)) + A_1^3]/27A_3^2\},$$

$$\bar{A}_3 = \max\{A_1, (2A_1 + 1)/3\}.$$

3 极限环存在性

定理 1 当 $A_1 < \bar{A}_1$, $A_2 < \bar{A}_2$, $A_3 > \bar{A}_3$ 时, 系统(2) 在 R 内存在极限环.

证明 构造 Poincaré-Bendixon 环境如图 1 所示.

线段 R_1C : $x = \sqrt{A_1}/\sqrt{A_2}$, 设

$$L_{R_1C} = x - \sqrt{A_1}/\sqrt{A_2}, \quad \left. \frac{dL_{R_1C}}{dt} \right|_{L_{R_1C}=0} = -A_3y < 0$$

系统(2) 的轨线经过线段 R_1C 时自外向内的.

线段 CD : $y = -1/A_3 \cdot x + k$, 设 $L_{CD} = y + 1/A_3 \cdot x - k$, $\left. \frac{dL_{CD}}{dt} \right|_{L_{CD}=0} =$

$$\left(\frac{dy}{dt} + \frac{1}{A_3} \frac{dx}{dt} \right) \Big|_{L_{CD}=0} < A_1/A_3 \cdot A_1/A_2 + 1/A_3 \cdot \sqrt{A_1}/\sqrt{A_2} - k - A_2/A_3 \cdot x^4 - (-x/A_3 +$$

$$k)^2 < 0$$

当 $A_1^2/A_2A_3 + \sqrt{A_1/A_3}\sqrt{A_2} - k < 0$ 时, 系统(2) 的轨线经过线段 CD 时自外向内的

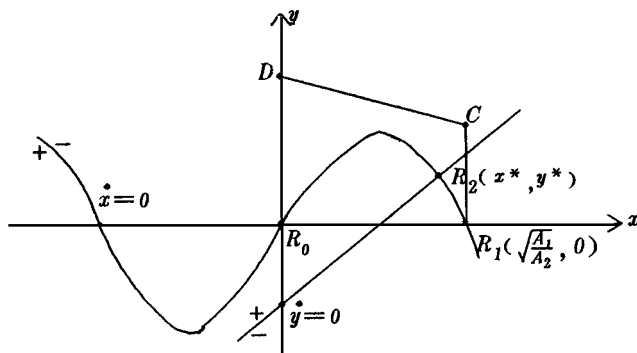


图 1

线段 $DO: x = 0$ 为积分直线; 线段 $OR_1: y = 0$ 为积分直线 于是 OR_1CDO 构成 Poincare-Bendison 环域, 系统(2) 的轨线在闭曲线 OR_1CDO 的边界曲线上(除去自身的轨线外) 都具有自外向内的性质 而在环域内部 $R_2(x^*, y^*)$ 为唯一的不稳定的平衡点 所以在 OR_1CD 围成的区域内, 系统(2) 至少存在一个极限环

4 极限环的唯一性

定理 2 当 $A_2 < \tilde{A}_2, A_3 > \tilde{A}_3$ 时, 系统(2) 在 R 内存在唯一极限环 其中

$$\begin{aligned} \tilde{A}_2 = \min \bigg\{ & A_1, 4[(3A_1A_3(A_3 - A_1)) + A_1^3]/27A_3^2, \\ & A_1^3(A_3 - 1)^3/[A_3^2(3A_3 - 1)^3], \\ & \sqrt{A_1A_3^3(A_3 - 1)(3A_3 - 2A_1 - 1)^2/(3A_3 - 1)^3} \bigg\}, \\ \tilde{A}_3 = \max \{ & 1, A_1, (2A_1 + 1)/3 \}. \end{aligned}$$

证明 首先将(2) 化为广义 Liénard 方程, 为此将(2) 改写为

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0(x) - f_1(x)y, \\ \dot{y} = g_1(x)y + g_2(x)y^2, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $f_0(x) = A_1x^2 - A_2x^4, f_1(x) = A_3x, g_1(x) = x - 1, g_2(x) = -1$ 作一系列变换:

$$\eta = f_0(x) - f_1(x)y, x = x;$$

$$v = \eta \exp \int_0^x \psi_2(s) ds, x = x, d\tau = \exp(-\int_0^x \psi_2(s) ds) dt,$$

则(3) 化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = v, \\ \frac{dv}{d\tau} = -\psi_0(x) \exp(2 \int_0^x \psi_2(s) ds) - \psi_1(x) \exp \int_0^x \psi_2(s) ds \cdot v, \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\psi_0(x) = f_0 g_1 + f_0^2 g_2 / f_1$, $\psi_1(x) = -f_0' - g_1 + (f_1' f_0 - 2f_0 g_2) / f_1$, $\psi_2(x) = (g_2 - f_1') / f_1$. 再令 $u = v - f_0(x) \exp \int_0^x \psi_2(s) ds + f_0(x^*)$, $x = x$, 则(4) 化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = u + f_0(x) \exp \int_0^x \psi_2(s) ds - f_0(x^*), \\ \frac{du}{d\tau} = (g_1 + f_0 g_2 / f_1) \exp \int_0^x \psi_2(s) ds (u - f_0(x^*)). \end{cases} \quad (5)$$

显然, 上述一系列变换在区域 $x > 0$ 内是非奇异的. 区域 R 在一系列变换之下变为 $x > 0, u < f_0(x^*)$. 在此区域内再作变换 $y = \ln(1 - u/f_0(x^*))$, $x = x$, $f_0(x^*) d\tau = -dt$, 则(5) 化为

$$\begin{cases} \dot{x} = \Phi(y) - F(x), \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= e^y - 1, F(x) = f_0(x)/f_0(x^*) \exp \int_0^x \psi_2(s) ds - 1, g(x) \\ &= [(g_1 f_1 + f_0 g_2)/f_1 f_0(x^*)] \exp \int_0^x \psi_2(s) ds \end{aligned}$$

显然, 这一变换在 $x > 0, u < f_0(x^*)$ 内是非奇异的. 在上述一系列变换之下, 平衡点 $R_2(x^*, y^*)$ 变为 $R_2(x^*, 0)$.

下面验证(6) 满足文[4] 的唯一性定理. 经计算

$$f(x) = F(x) = [(A_2 - 3A_2 A_3)x^3 + A_1(A_3 - 1)x]/A_3 f_0(x^*) \exp \int_0^x \psi_2(s) ds$$

$$g(x) = [A_2 x^3 + (A_3 - A_1)x - A_3]/A_3 f_0(x^*) \exp \int_0^x \psi_2(s) ds$$

$$f_0(x^*) = A_1 x^{*2} - A_2 x^{*4} = A_3 x^* y^* > 0$$

设 $\psi(x) = A_2 x^3 + (A_3 - A_1)x - A_3$, 因为 $\psi(x) = 3A_2 x^2 + A_3 - A_3 > 0$, 且 $\psi(x^*) = A_2 x^{*3} + (A_3 - A_1)x^* - A_3 = 0$, 所以当 $x > x^*$ 时 $\psi(x) > 0$, 即当 $x \neq x^*$ 时 $(x - x^*)g(x) > 0$.

设 $G(x) = \int_0^x g(x) dx = x^{* \frac{1+A_2}{A_3}} / A_3 f_0(x^*) [A_2 A_3 / (3A_3 - 1) (x^{(3-\frac{1}{A_3})} - x^{*(3-\frac{1}{A_3})}) + (A_3(A_3 - A_1)) / (A_3 - 1) (x^{1-\frac{1}{A_3}} - x^{*1-\frac{1}{A_3}}) + A_3^2 (x^{-\frac{1}{A_3}} - x^{*- \frac{1}{A_3}})]$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $G(+\infty) = +\infty$. $f(x^*) = x^* [(A_2 - 3A_2 A_3)x^{*2} + A_1(A_3 - 1)] / A_3 f_0(x^*)$. 设 $\psi(x) = -A_2(3A_3 - 1)x^2 + A_1(A_3 - 1)$, 令 $\psi(x) = 0$, 设正根为 $\tilde{x}^* = \sqrt{A_1(A_3 - 1) / (A_2(3A_3 - 1))}$, 易证当 $A_2 < (A_1^3(A_3 - 1)^3) / (A_3^2(3A_3 - 1)^3)$ 时, $\tilde{x}^* > x^*$. 所以当 $\hat{x}^* < x^* < \tilde{x}^*$ 时, $\psi(x^*) > 0$, 从而 $f(x^*) = x^* \psi(x^*) / (A_3 f_0(x^*)) > 0$. 又有 $\Phi(0) = 0$, $\Phi(y) = e^y > 0$,

$$\frac{d(f(x)/g(x))}{dx} = p(x) / [A_2 x^3 + (A_3 - A_1)x - A_3]^2,$$

其中 $p(x) = -A_2 A_3 (3A_3 - 2A_1 - 1)x^3 + 3A_2^2 (3A_3 - 1)x^2 - A_2 A_3 (A_3 - 1)$, $x_1 = 0$ 为 $y = p(x)$ 的极小值点, 极小值 $p(0) = -A_2 A_3 (A_3 - 1) < 0$, 当 $A_3 > 1$ 时; 极大值 $p(x_2) = [A_2^4 (3A_3 - 1)^3 - A_2 A_3^3 (A_3 - 1) (3A_3 - 2A_1 - 1)^2] / [A_3^2 (3A_3 - 2A_1 - 1)]^2 < 0$, 当 $A_2 < \sqrt{A_2 A_3^3 (A_3 - 1) (3A_3 - 2A_1 - 1)^2 / (3A_3 - 1)^3}$ 时, 其中 $x_2 = A_2 (3A_3 - 1) / (A_3 (3A_3 - 2A_1 - 1))$.

1)) > 0 故当 $x > 0$ 时, $p(x) < 0$ 记

$$\tilde{A}_2 = \min \left\{ A_1, 4[(3A_1A_3(A_3 - A_1)) + A_1^3]/27A_3^2, \right. \\ \left. (A_1^3(A_3 - 1)^3)/(A_3^2(3A_3 - 1)^3), \right. \\ \left. \sqrt{(A_1A_3^3(A_3 - 1)(3A_3 - 2A_1 - 1)^2)/(3A_3 - 1)^3} \right\}, \\ \tilde{A}_3 = \max \{1, A_1, (2A_1 + 1)/3\}.$$

当 $A_2 < \tilde{A}_2, A_3 > \tilde{A}_3$ 时 $d(f(x)/g(x)) < 0$ ^[5]. 至此由文[4]的定理知系统(6)也就是系统(2)在 R 内至多有一个极限环, 再由定理 1 知系统(2)在 R 内存在唯一的极限环

参 考 文 献

- [1] 陈兰荪, 数学生态学模型与研究方法, 科学出版社, 1988
- [2] E. Kuno, *Mathematical models for predator-prey interaction*, Advances In Ecological Research, 16 (1987).
- [3] 王东达, 一类稀疏效应下捕食者-被捕食者系统极限环的唯一性, 生物数学学报, 7: 1(1992), 53-55
- [4] Zhang Zhifen, *Proof of the uniqueness theorem of limit cycles of generalized liénard equations*, Applicable Analysis, 23(1986), 63- 67.
- [5] 谢向东, 蔡燧林, 一类 Holling 功能性反应模型极限环的唯一性, 生物数学学报, 9: 1(1994), 81-84

Existence and Uniqueness of Limit Cycle about Predator-Prey System with Sparssing Effect

W u X i n g q i L i u X u e s h e n g

(Dept of Math , Dalian University, 116622)

Z h a o Z h e n h a i

(Dept of Appl Math , Dalian University of Technology, 116024)

Abstract

A predator-prey model with sparrssing effect is considered as follow s: $\dot{x} = x(ax - cx^3 - by)$; $\dot{y} = y(-\alpha + \beta x - \gamma y)$ (*). The main result is as follow s: (1) when $A_1 < \bar{A}_1, A_2 < \bar{A}_2, A_3 > \bar{A}_3$, there at leastn exists a limit cycle of the system (*); (2) when $A_2 < \tilde{A}_2, A_3 > \tilde{A}_3$, there exists unique limit cycle of the system (*).

Keywords limit cycle, equilibrium points, system, uniqueness, existence