第27卷第1期 数学研究与评论 Vol.27, No.1
2007年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)01-0123-07 **文献标识码**: A

关于数论函数 $\sigma(n)$ 的一个注记

沈忠华 [1], 于秀源 [1,2]
(1. 杭州师范学院数学系, 浙江 杭州 310012; 2. 衢州学院数学系, 浙江 衢州 324000)
(E-mail: ahtshen@126.com)

摘 要: 对于两个不相同的正整数 m 和 n, 如果满足 $\sigma(m)=\sigma(n)=m+n$, 则称之为一对亲和数, 这里 $\sigma(n)=\sum_{d|n} d$. 本文给出了 $f(x,y)=x^{2^x}+y^{2^x}(x>y\geq 1,(x,y)=1)$ 不与任何正整数构成亲和数对的结论, 这里 x,y 具有不同的奇偶性, 即, 关于 z 的方程 $\sigma(f(x,y))=\sigma(z)=f(x,y)+z$ 不存在正整数解.

关键词: 亲和数; 完全数; 方程; 正整数解.
MSC(2000): 11A25
中图分类: O156.1

1 引 言

对于任何的正整数 n, 定义 $\sigma(n)$ 为它的所有正约数的和. 一个正整数 n, 如果满足 $\sigma(n)=2n$, 则称之为完全数 [4,7]. 对于两个不相同的正整数 m 和 n 如果满足 $\sigma(m)=\sigma(n)=m+n$, 则称之为一对亲和数 [8].

对于任意的正整数 n, $F_n=2^{2^n}+1$ 表示第 n 个 Fermat 数. Florian Luca 证明了任意的正整数 x 都不满足等式 $\sigma(F_n)=\sigma(x)=F_n+x$, 即

定理 A[1] 任意一个 Fermat 数既不是完全数也不与任何正整数成为一对亲和数.

沈忠华和于秀源证明了任意的正整数 y 都不满足等式 $\sigma(f(x))=\sigma(y)=f(x)+y$, 其中 $f(x)=x^{2^x}+1$, x 是任意一个正的偶数. 本文证明了更加一般的情况, 即, 任意的正整数 z 都不满足等式 $\sigma(f(x,y))=\sigma(z)=f(x,y)+z$, 其中 $f(x,y)=x^{2^x}+y^{2^x}(x>y\geq 1,(x,y)=1)$,$x,y$ 一奇一偶. 也就是

定理 1 对于正整数 $x,y,x>y\geq 1,(x,y)=1,x,y$ 一奇一偶, 定义 $f(x,y)=x^{2^x}+y^{2^x}$, 则 $f(x,y)$ 不与任何正整数构成一对亲和数.

在此基础上, 我们还得到了

定理 2 对于正整数 $x,y,x>y\geq 1,(x,y)=1,x,y$ 一奇一偶, 定义 $f(x,y)=x^{2^x}+y^{2^x}$, 则 $f(x,y)$ 不是完全数.

大整数的分解是个很困难的问题, 对于形如 $f(a,b)=a^{2^n}+b^{2^n}$ 的整数, 估计它的素因数的个数, 无疑对于分解此类整数是有裨益的. 本文中我们对此类整数的素因数个数作了初步估计, 得到了如下的定理

收稿日期: 2005-02-07; **接受日期**: 2005-04-29
基金项目: 国家自然科学基金 (10271037; 10671051); 浙江省自然科学基金 (M103060); 浙江省教育厅科研基金和杭州师范学院科研基金 (2006XNZ03).

定理 3 对于形如 $f(a,b)=a^{2^n}+b^{2^n}((a,b)=1,a>b\geq 1)$ 的一类正整数，它的所有素因数的个数 (含相等的)k 不超过 $[\frac{(a-1)2^n}{n+1}]$ 个. $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

由此定理，我们又得到了如下两个推论：

推论 1 对于形如 $f(x,y)=x^{2^x}+y^{2^x}(x>y\geq 1,(x,y)=1)$ 的一类正整数，它的所有素因数的个数 (含相等的)k 不超过 $[\frac{(x-1)2^x}{x+1}]$ 个.

推论 2 Fermat 数 $(n\geq 3)$ 的所有素因数的个数 (含相等的)k 不超过 $[\frac{2^n}{n+3}]$ 个.

2 几个引理

引理 1[2] 对于任意的正整数 y, 有 $\sigma(y)<y^2$ 成立.

引理 2[3] 对于互素的两个正整数 a 和 b, 如有素数 $p|a^{2^n}+b^{2^n}$, 则 $p=2$ 或 $p\equiv 1(\bmod 2^{n+1})$.

引理 3[5] 对于任意的正整数 y, 有 $\dfrac{\sigma(y)}{y}\leq\dfrac{y}{\varphi(y)}$ 成立，这里 $\varphi(y)$ 是 Euler 函数.

引理 4[6] 对于满足 $y\geq 3$ 的正整数 y, 有 $\sigma(y)<(1.782\log\log y+\dfrac{2.495}{\log\log y})y$ 成立.

引理 5 如 $y\geq z>e$, 则 $\dfrac{\log(y+1)}{\log(z+1)}\leq\dfrac{\log y}{\log z}$ 成立.

证明 令 $f(y)=\log(y+1)\log z-\log(z+1)\log y$, 若 $y>e>0$, 则

$$f'(y)=\frac{1}{y+1}\log z-\frac{1}{y}\log(z+1)<\frac{1}{y+1}(\log z-\log(z+1))<0.$$

因此，如果 $y\geq z>e$, 则 $f(y)\leq f(z)=0$, 即

$$\log(y+1)\log z-\log(z+1)\log y\leq 0,$$

也就是

$$\frac{\log(y+1)}{\log(z+1)}\leq\frac{\log y}{\log z}.$$

引理 6[9] 记 $F_n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$, $n\geq 3$, 其中 $p_1<p_2<\cdots<p_k$ 为素数，则有 $p_i\equiv 1(\bmod 2^{n+2}),i=1,2,\cdots,k$.

引理 7[4] 若 2^n+1 为素数，则 $n=2^m,m,n$ 为正整数.

引理 8[5] Fermat 数是两两互素的.

3 主要定理

定理 1 对于正整数 $x,y,x>y\geq 1,(x,y)=1,x,y$ 一奇一偶，定义 $f(x,y)=x^{2^x}+y^{2^x}$, 则 $f(x,y)$ 不与任何正整数构成一对亲和数.

证明 假设等式

$$\sigma(f(x,y))=\sigma(z)=f(x,y)+z \tag{1}$$

对于某些正整数 z 成立.

对于满足 $x>y\geq 1$ 和 $(x,y)=1$ 的 $f(x,y)=x^{2^x}+y^{2^x}$, 通过计算容易知道最小的 7 个数依次为 $f(1,1),f(2,1),f(3,1),f(3,2),f(4,1),f(4,3),f(5,1)$, 而注意到 $f(1,1)=2=F_0,f(2,1)=17=F_2,f(4,1)=4^{2^4}+1=2^{2^5}+1=F_5$, 这里 F_0,F_2,F_5 为 Fermat 数，由文献 [1] 可知 Fermat

数不与任何正整数构成亲和数对, 故当 $f(x,y)=f(1,1),f(2,1),f(4,1)$ 时方程 (1) 无正整数解. 又 $f(3,1)=3^{2^3}+1=6562=2\cdot 17\cdot 193, f(3,2)=3^{2^3}+2^{2^3}=6817=17\cdot 401$, 则 $\sigma(f(3,1))=10476, \sigma(f(3,2))=7736$, 此时如果 $f(3,1),f(3,2))$ 满足式 (1), 则相应的 z 分别为 3914 和 419, 然而由于 $\sigma(3914)=6240\neq 10476, \sigma(419)=420\neq 7236$, 因此，当 $f(x,y)=f(3,1),f(3,2)$ 时等式 (1) 也没有正整数解. 因此现在可设 $f(x,y)\geq f(4,3)$.

我们先考察 $f(x,y)\geq f(5,1)$, 即 $x\geq 5$ 的情况，对于 $f(x,y)=f(4,3)$ 的情况随后再给出说明.

由引理 1, $z^2\geq \sigma(z)>f(x,y)\geq f(5,1)=5^{2^5}+1>2^{64}$, 即 $z>2^{32}$.

对于满足 $x>y\geq 1$ 和 $(x,y)=1$ 且 x,y 一奇一偶的 $f(x,y)=x^{2^x}+y^{2^x}$, 由引理 2 可设

$$f(x,y)=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k},$$

其中 $p_1<p_2<\cdots<p_k$ 是奇素数，且 $p_i\equiv 1(\bmod 2^{x+1})$ 对于所有的 $i=1,\cdots,k$ 都成立，因此,

$$f(x,y)\geq p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}\geq p_1\cdots p_k>(2^{x+1}+1)^k,$$

两边取以 e 为底的对数，并注意到此时 $x\geq 5$, 得

$$k<\frac{\log f(x,y)}{\log(2^{x+1}+1)}=\frac{\log(x^{2^x}+y^{2^x})}{\log(2^{x+1}+1)}<\frac{\log 2x^{2^x}}{\log(2^{x+1}+1)}<\frac{\log(2\cdot 2^{(x-2)2^x})}{\log 2^{x+1}}<\frac{(x-2)2^x+1}{x+1},$$

根据引理 3 得

$$1+\frac{z}{f(x,y)}=\frac{\sigma(f(x,y))}{f(x,y)}\leq\frac{f(x,y)}{\varphi(f(x,y))}=\prod_{i=1}^{k}(1+\frac{1}{p_i-1}),$$

因此,

$$\log(1+\frac{z}{f(x,y)})\leq\sum_{i=1}^{k}\log(1+\frac{1}{p_i-1})<\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i-1}. \tag{2}$$

因为 $p_i\equiv 1(\bmod 2^{x+1})$, 则有 $p_i\geq 2^{x+1}i+1, i=1,2,\cdots,k$, 所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i-1}&\leq\frac{1}{2^{x+1}}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\leq\frac{1}{2^{x+1}}(1+\log k)\leq\frac{1}{2^{x+1}}(1+\log\frac{(x-2)2^x+1}{x+1})\\&<\frac{1}{2^{x+1}}(1+\log\frac{(x-2)2^x}{x})<\frac{x\log 2+1}{2^{x+1}}.\end{aligned}$$

则

$$\log(1+\frac{z}{f(x,y)})<\frac{x\log 2+1}{2^{x+1}}. \tag{3}$$

显然 $z<f(x,y)$. 事实上，如果 $z\geq f(x,y)$, 则由 (3) 得

$$\log 2<\log(1+\frac{z}{f(x,y)})<\frac{x\log 2+1}{2^{x+1}}.$$

即 $2^{x+1}<x+\dfrac{1}{\log 2}$, 这对于大于等于 5 的正整数 x 而言是不可能的. 因此， $z<f(x,y)$.

又对于任意的 $0<a<1$, 有

$$\log(1+a)>\frac{a}{2}. \tag{4}$$

所以

$$\frac{z}{2f(x,y)}<\frac{x\log 2+1}{2^{x+1}},$$

即

$$z<\frac{f(x,y)(x\log 2+1)}{2^x}. \tag{5}$$

另一方面，由引理 4, 可得

$$f(x,y)<f(x,y)+z=\sigma(z)<(1.782\log\log z+\frac{2.495}{\log\log z})z. \tag{6}$$

因为 $z>2^{32}$, 所以

$$\log\log z>3.098,$$

因此,

$$\begin{aligned}f(x,y)&<1.782z\log\log z+0.806z<1.782z(\log\log z+0.806)\\&<1.782\frac{f(x,y)(x\log 2+1)}{2^x}(\log\log\frac{f(x,y)(x\log 2+1)}{2^x}+0.806)\\&<1.782\frac{f(x,y)(x\log 2+1)}{2^x}(\log\log(f(x,y)(x\log 2+1))-\log x-\log\log 2+0.806),\end{aligned}$$

即

$$2^x<1.782(x\log 2+1)(\log\log(f(x,y)(x\log 2+1))-\log x-\log\log 2+0.806).$$

又 $f(x)=x^{2^x}+y^{2^x}<2x^{2^x}$, 因此,

$$2^x<1.782(x\log 2+1)(\log(2^x\log x+\log 2(x\log 2+1))-\log x-\log\log 2+0.806). \tag{7}$$

但是当 $x\geq 5$ 时上述不等式 (7) 是不可能成立的，所以当 $x\geq 5$ 时 (1) 没有正整数解 z.

对于 $f(x,y)=f(4,3)$, 由引理 1,$z^2\geq\sigma(z)>f(x,y)=f(4,3)=4^{2^4}+3^{2^4}>2^{32}$, 即 $z>2^{16}$. 而由引理 2 可设

$$f(4,3)=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k},$$

其中 $p_1<\cdots<p_k$ 是奇素数，且 $p_i\equiv 1(\bmod 2^5)$ 对于所有的 $i=1,\cdots,k$ 都成立，因此,

$$f(4,3)\geq p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}>(2^5+1)^k=33^k,$$

则 $k\leq 6$. 由引理 3

$$1+\frac{z}{f(4,3)}=\frac{\sigma(f(4,3))}{f(4,3)}\leq\frac{f(4,3)}{\varphi(f(4,3))}=\prod_{i=1}^{k}(1+\frac{1}{p_i-1}),$$

因此,

$$\log(1+\frac{z}{f(4,3)})\leq\sum_{i=1}^{k}\log(1+\frac{1}{p_i-1})<\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i-1}.$$

因为 $p_i \equiv 1 (\bmod\ 2^5)$, 满足此式的 200 以内的素数只有 97 和 193 两个，通过计算容易知道 97 和 193 都不是 $f(4,3)$ 的素因子，所以 $p_1 > 193 = 5\cdot 2^5+1$, 则有 $p_i > 2^5(i+5)+1, i=1,\cdots,k$, 故

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i-1} < \frac{1}{2^5}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i+5} \le \frac{1}{2^5}\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{i+5} < 0.024.$$

则

$$\log(1+\frac{z}{f(4,3)}) < 0.024. \tag{8}$$

显然 $z<f(4,3)$. 事实上，如果 $z \ge f(4,3)$, 则由 (8) 得

$$\log 2 < \log(1+\frac{z}{f(4,3)}) < 0.024,$$

这是不可能的．因此， $z<f(4,3)$. 所以由 (4) 可得 $\frac{z}{2f(4,3)} < 0.024$, 即

$$z < 0.048 f(4,3). \tag{9}$$

另一方面，由引理 4,

$$f(4,3) < f(4,3)+z = \sigma(z) < (1.782\log\log z + \frac{2.495}{\log\log z})z. \tag{10}$$

因为 $z > 2^{16}$, 所以

$$\log\log z > 2.405. \tag{11}$$

因此，由 (9)(10)(11) 可得

$$\begin{aligned} f(4,3) &< 1.782 z\log\log z + 1.038 z < 1.782 z(\log\log z + 1.038)\\ &< 1.782\cdot 0.048 f(4,3)(\log\log 0.048 f(4,3) + 1.038) < 0.345 f(4,3), \end{aligned}$$

这是不可能的，所以当 $f(x,y)=f(4,3)$ 时 (1) 也没有正整数解 z.

综上可知，任意的正整数 z 都不满足等式 $\sigma(f(x,y)) = \sigma(z) = f(x,y)+z$, 其中 $f(x,y) = x^{2^x}+y^{2^x}, x>y\ge 1, (x,y)=1, x,y$ 一奇一偶．所以 $f(x,y)$ 不与任何正整数构成亲和数对．定理得证.

定理 2 对于正整数 $x,y,x>y\ge 1,(x,y)=1,x,y$ 一奇一偶， $f(x,y)=x^{2^x}+y^{2^x}$ 不是完全数.

证明 对于完全数 n, 一定有 $n \mid \sigma(n)$, 从定理 1 的证明中我们可以得出 $f(x,y)$ 不可能是完全数，若不然，则

$$\log(\frac{\sigma(f(x,y))}{f(x,y)}) < \frac{x\log 2+1}{2^{x+1}} < \log 2, x \ge 4.$$

则 $\sigma(f(x,y)) < 2f(x,y)$, 因此 $f(x,y)$ 不是完全数．即定理得证.

4 素因数个数的估计

从定理 1 的证明中，我们还发现对于 $f(a,b) = a^{2^n}+b^{2^n}, (a,b)=1, a>b\ge 1$, 由引理 2 可设

$$f(a,b) = 2p_1\cdots p_k,$$

其中 $p_1 \le \cdots \le p_k$ 是奇素数，且 $p_i \equiv 1(\bmod\ 2^{n+1})$ 对于所有的 $i=1,\cdots,k$ 都成立，因此,

$$f(x,y)=2p_1\cdots p_k>2(2^{n+1}+1)^k,$$

两边取以 e 为底的对数，得

$$k<\frac{\log\frac{f(a,b)}{2}}{\log(2^{n+1}+1)}=\frac{\log\frac{a^{2^n}+b^{2^n}}{2}}{\log(2^{n+1}+1)}<\frac{\log a^{2^n}}{\log(2^{n+1}+1)}<\frac{\log 2^{(a-1)2^n}}{\log 2^{n+1}}<\frac{(a-1)2^n}{n+1}.$$

即对于形如 $f(a,b)=a^{2^n}+b^{2^n}((a,b)=1,a>b\ge 1)$ 的一类正整数，我们从中知道了它的所有素因数的个数 (含相等的)k 不超过 $[\frac{(a-1)2^n}{n+1}]$ 个．即

定理 3 对于形如 $f(a,b)=a^{2^n}+b^{2^n}((a,b)=1,a>b\ge 1)$ 的一类正整数，它的所有素因数的个数 (含相等的)k 不超过 $[\frac{(a-1)2^n}{n+1}]$ 个.

对于满足 $x>y\ge 1$ 和 $(x,y)=1$ 的 $f(x,y)=x^{2^x}+y^{2^x}$, 类似地可以得到

推论 1 对于形如 $f(x,y)=x^{2^x}+y^{2^x}(x>y\ge 1,(x,y)=1)$ 的一类正整数，它的所有素因数的个数（含相等的） k 不超过 $[\frac{(x-1)2^x}{x+1}]$ 个.

由此推论我们可以知道 $f(2,1)$ 的所有素因数个数不超过 1, 所以它是素数; $f(3,1)$ 和 $f(3,2)$ 的所有素因数的个数都不超过 4 ； $f(4,1)$ 和 $f(4,3)$ 的所有素因数的个数都不超过 9.

对于 Fermat 数 $F_n=2^{2^n}+1$, 我们已经知道它的前 5 个数 $F_0=3,F_1=5,F_2=17,F_3=257,F_4=65537$ 都是素数， Fermat 曾据此推测所有的形如 $F_n=2^{2^n}+1$ 的正整数都是素数. 事实上，除了这五个数是素数外，目前已知道 46 个 Fermat 数都是合数，而其他的 Fremat 数是否是素数，现在还不知道． Hardy 和 Wright[10] 就曾推测： Fermat 数都是合数． Selfridge[11] 则更支持如下的猜想：所有的 Fermat 数都是合数．由此而导致地对 Fermat 数素因数的研究一直得到人们的重视，对 Fermat 数素因数个数的估计无疑对于此类问题的研究是有用处的．在这里我们同样可以用类似的方法得到有关 Fermat 数素因数个数的一个估计.

令

$$F_n=p_1\cdots p_k,$$

其中 $p_1<\cdots<p_k$ 为素数, 由引理 6 可知, 存在 $q_i\in N$, 使得 $p_i=2^{n+2}q_i+1$ 成立，$i=1,2,\cdots,k$.

又由 $p_i\mid F_n(i=1,2,\cdots,k)$ 及引理 7 和引理 8 可知， q_i 不可能是 $2^t(t\ge 0)$ 的形式，所以

$$p_1=2^{n+2}q_1+1\ge 3\cdot 2^{n+2}+1>2^{n+3}+1,$$

而 $p_1<\cdots<p_k$, 则

$$F_n=p_1\cdots p_k>(2^{n+3}+1)^k,$$

由引理 5,

$$k<\frac{\log F_n}{\log(2^{n+3}+1)}=\frac{\log(2^{2^n}+1)}{\log(2^{n+3}+1)}<\frac{\log 2^{2^n}}{\log 2^{n+3}}=\frac{2^n}{n+3}.$$

即

推论 2 Fermat 数 $(n>3)$ 的所有素因数的个数 (含相等的)k 不超过 $[\frac{2^n}{n+3}]$ 个.

根据推论 2, 我们可以初步判断 F_n 的素因数的个数，这对于分解 F_n 为素因数之积是有用的．比如据推论 2, 可以知道 F_5 的素因数个数不超过 4 个，事实上 $F_5 = 641 \cdot 6700417$.

5 结论及今后的工作

本文的主要结论是：对于满足 $x > y \geq 1$ 和 $(x, y) = 1$ 且具有不同奇偶性的正整数 x 和 y, 定义 $f(x, y) = x^{2^x} + y^{2^x}$, $f(x, y)$ 既不是完全数也不与任何正整数构成一对亲和数. 特别地，当 $y = 1$ 时， $f(x) = x^{2^x} + 1$(x 为偶数), $f(x)$ 既不是完全数也不与任何正整数构成一对亲和数，这就是引言中所说明的已经证明了的结论．另外我们还对一类形如 $f(a, b) = a^{2^n} + b^{2^n}$, $f(x, y) = x^{2^x} + y^{2^x}$ 和 Fermat 数 $F_n = 2^{2^n} + 1$ 的整数的素因数个数作了初步的估计.

今后我们将考虑更一般的情况，即 $f(x, y) = x^{2^x} + y^{2^x}$ (x, y 为满足 $x > y \geq 1$ 和 $(x, y) = 1$ 的任意整数) 和 $f(x) = a^{2^x} + b^{2^x}$ (a, b 为满足 $(a, b) = 1$ 的任意正整数) 的情况.

参考文献：

[1] LUCA F. *The anti-social fermat number* [J]. Amer. Math. Monthly, 2000, **107**: 171–173.

[2] NATHANSON M B. *Elementary Methods in Number Theory* [M]. New York: Springer-Verlag, 2000.

[3] BEILER A H. *Recreations in the Theory of Numbers* [M]. Shanghai: Shanghai Educational Publishing House, 1998. (in Chinese)

[4] 华罗庚．数论导引 [M]. 北京：科学出版社， 1957.
HUA Luo-geng. *An Introduction to Number Theory* [M]. Beijing: Science Press, 1957. (in Chinese)

[5] 潘承洞，潘承彪．初等数论 [M]. 北京：北京大学出版社， 1992.
PAN Cheng-dong, PAN Cheng-biao. *The Elementary Number Theory* [M]. Beijing: Beijing University Press,1992. (in Chinese)

[6] ROSSER J B, SCHOENFELD L. *Approximate formulas for some functions of prime numbers* [J]. Illinois J. Math., 1962, **6**: 64–94.

[7] 于秀源，瞿维建．初等数论 [M]. 济南：山东教育出版社， 2004.
YU Xiu-yuan, QU Wei-jian. *The Elementary Number Theory* [M]. Jinan: Shandong Educationnal Publishing House, 2004. (in Chinese)

[8] 盖伊．数论中未解决的问题 (第二版) [M]. 北京：科学出版社， 2003.
GUY R K. *Unsolved Problems in Number Theory (second edition)* [M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese)

[9] DICKSON L E. *History of the Theory of Number* [M]. New York: Chelsea Publishing Company, 1966.

[10] HARDY G H, WRIGHT E M. *An Introduction to The Theory of Numbers* [M]. Oxford: Oxford Press, 1981.

[11] SELFIDGE J L. *Factors of fermat numbers* [J]. Math. Tables Aids Comput., 1953, **7**: 274.

A Note on Arithmetic Function $\sigma(n)$

SHEN Zhong-hua[1], *YU Xiu-yuan*[1,2]

(1. Department of Mathematics, Hangzhou Teachers College, Zhejiang 310012, China;
2. Department of Mathematics, Quzhou College, Zhejiang 324000, China)

Abstract: Two distinct positive integers m and n are called amicable if $\sigma(m) = \sigma(n) = m + n$, where $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$. This paper proves that $f(x, y)$ is not part of an amicable pair, where $f(x, y) = x^{2^x} + y^{2^x}, x > y \geq 1, (x, y) = 1$, one of x and y is odd number, the other is even. Hence, equation $\sigma(f(x, y)) + \sigma(z) = f(x, y) + z$ has no positive integer solutions.

Key words: amicable number; perfect number; equation; positive integer solution.