第26卷第3期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.3
2006年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)03-0605-08 **文献标识码**: **A**

逻辑系统 G_3 中命题的真度值之集在 [0,1] 上的分布

李 骏 [1], 李尧龙 [2], 黎锁平 [1]

(1. 兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州 730050; 2. 渭南师范学院数学系, 陕西 渭南 714000)
(E-mail: lijun@lut.cn)

摘 要: 利用势为 3 的均匀概率空间的无穷乘积在 Gödel 三值命题逻辑中引入了公式的真度概念, 给出了真度推理规则, 证明了全体公式的真度值之集在 [0,1] 上是稠密的, 并给出了公式真度的表达通式, 为进一步建立三值命题逻辑的近似推理理论奠定了基础.

关键词: 真度; 真度推理规则; 稠密.
MSC(2000): 03B05, 03B50
中图分类: O141.1

1 引 言

Zadeh 于 1973 年发表的文章中首次提出了基于模糊集思想的近似推理理论 [1], 正如 Dubois 等人在他们的长篇评论文章中所指出的 [2], Zadeh 的方法不同于人工智能领域所倡导的方法: 人工智能学科强调符号操作, 它扎根于逻辑之中, 以语构的形式展开自动推理而根本不看重数值计算. 但基于模糊集的方法自然是离不开数值计算的, Zadeh 的方法在于将二者相结合. Zadeh 的文章及其基本思想的影响是深远的 [1], 近年来发表的有关近似推理的文章都程度不等地注意了两方面的结合, 但大多数文章似乎都以基于模糊集的数值计算为主. 20 世纪 70 年代末, Pavelka 的系列文章开创了将模糊集思想融于严格的逻辑演算之先河 [3], 只是他并未继续展开对诸如 Fuzzy Modus Ponens 等模糊推理的研究. Pavelka 的研究受到了广泛的关注, 文 [4 − 8] 可看作是文 [3] 的继续与发展. 专著 [9] 和 [10] 中还专门论述了 Pavelka 的工作. 如上所述, 主要基于模糊集的数值计算并兼顾逻辑演算的文章是大量的, 可参看专著 [11–13] 及其参考文献. 其实, 近似推理并不一定要与模糊集理论相联系. 比如, [14] 在二值逻辑的框架下提出了一种基于相似度的近似推理理论. 王国俊于 [15] 和 [16] 中提出的近似推理的主体部分也不依赖于模糊集理论. 最近, 王国俊基于均匀概率的思想在二值命题逻辑中提出了命题的真度理论 [17], 并提出了一种近似推理的框架. 本文则利用均匀概率的思想在 Gödel 三值命题逻辑中引入公式的真度概念, 推导出了真度推理规则, 证明了全体公式的真度之集在 [0,1] 中稠密, 并给出了公式真度的表达通式, 为进一步在三值命题逻辑中展开近似推理奠定了基础.

2 公式的真度及真度推理规则

定义 1[18] 设 (X_n, A_n, μ_n) 是概率测度空间, 这里 μ_n 是 X_n 上的 Lebesgue 测度, A_n 是全体 μ_n 可测集之族, $\mu_n(X_n) = 1$. 令 $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, 则 $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ 在 X 上可生成一个 σ- 代数 A, 这时 X 上存在唯一的测度 μ 满足条件:

收稿日期: 2004-03-28; **接受日期**: 2005-06-26
基金项目: 甘肃省自然科学基金 (ZS032-B52-031), 兰州理工大学优秀青年基金

(i) A 是 X 中的 μ 可测集之族.

(ii) 对于 $\prod_{n=1}^{m} X_n$ 中的任一可测集 $E, E\times\prod_{n=m+1}^{\infty} X_n$ 可测，且

$$\mu(E\times\prod_{n=m+1}^{\infty} X_n)=(\mu_1\times\mu_2\times\cdots\times\mu_m)(E), m=1,2,\cdots. \tag{1}$$

称 μ 为 X 上的关于 $\mu_1,\mu_2,\cdots$ 的无穷乘积测度，概率测度空间 (X,A,μ) 也简记为 X.

定义 2 设 $X_n=\{0,\frac{1}{2},1\},\mu_n$ 是 X_n 上的均匀概率测度，即 $\mu_n(\emptyset)=0,\mu_n(X_n)=1$, 且 $\mu_n(\{0\})=\mu_n(\{\frac{1}{2}\})=\mu_n(\{1\})=\frac{1}{3}(n=1,2,\cdots)$. 令 $X=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$, 设 μ 为 X 上的关于 $\mu_1,\mu_2,\cdots$ 的无穷乘积测度，称 μ 为三值逻辑测度.

设 $S=\{p_1,p_2,\cdots\},F(S)$ 是由 S 生成的 $(\neg,\vee,\to)$ 型自由代数，这里 $\neg$ 是 $F(S)$ 上的一元运算，$\vee$ 与 $\to$ 均是 $F(S)$ 上的二元运算，则称 S 中的元为原子命题 (或原子公式), 称 $F(S)$ 中的元为命题 (或公式). 设 $L=\{0,\frac{1}{2},1\}$, 在 L 中规定：

$$\forall x,y\in L,\neg x=1-x,x\vee y=\max\{x,y\},x\to y=R_G(x,y).$$

其中 $R_G(x,y)=\begin{cases}1,x\le y,\\ y,x>y.\end{cases}$ 是 Gödel 蕴涵算子，则 L 成为一 $(\neg,\vee,\to)$ 型代数，称为修正 Gödel 三值逻辑系统，简记为 G_3. 设 $v:F(S)\to L$ 是 $(\neg,\vee,\to)$ 型同态，则称 v 为 $F(S)$ 的赋值映射，$\forall A\in F(S),v(A)$ 叫做公式 A 的赋值. $F(S)$ 的赋值映射的全体记为 Ω.

为叙述简便起见，对任一公式 $A\in F(S)$, 以下把公式 $(\neg A\to A)$ 简写为 $2A$. 容易验证

$$\forall v\in\Omega,v(2A)=2v(A)\wedge 1=\begin{cases}0, & v(A)=0;\\ 1, & v(A)=\frac{1}{2}\text{ 或 }v(A)=1.\end{cases} \tag{2}$$

定义 3 设 $v\in\Omega$, 则由 $F(S)$ 是由 S 生成的自由代数知 v 由 $v|s$ 唯一确定. 设 $v(p_k)=v_k(k=1,2,\cdots)$, 则无穷维向量 $\overrightarrow{v}=\{v_1,v_2,\cdots\}\in X$, 这里 X 由定义 2 确定. 反之，设 $\overrightarrow{v}=\{v_1,v_2,\cdots\}\in X$, 则由 $\overrightarrow{v}$ 唯一确定 Ω 中的一个赋值 v, 这里 $v(p_k)=v_k(k=1,2,\cdots)$. 令 $\varphi(v)=\overrightarrow{v}$, 则 $\varphi:\Omega\to X$ 是从 Ω 到 X 的一一满射，称 φ 为 Ω 的测度化映射.

定义 4[17] 设 $A\in F(S)$, 令

$$[A]=\{\overrightarrow{v}\in X\mid v\in\Omega,v(A)=1\},\tau(A)=\mu([A]) \tag{3}$$

称 $\tau(A)$ 为 A 的真度.

显然，对 $F(S)$ 中任一公式 A, 都有 $0\le\tau(A)\le 1$. 又，逻辑等价的公式有相等的真度.

注 1 设

$$A=A(p_{i_1},p_{i_2},\cdots,p_{i_n}),E=\{\overrightarrow{v}(i_1,\cdots,i_n)\in\prod_{k=1}^{n}X_{i_k}\mid v(A)=1\}, \tag{4}$$

则

$$[A]=E\times\prod\{X_j\mid j\ne i_k,k=1,2,\cdots,n\}. \tag{5}$$

因为 E 作为有限的均匀空间 $\prod_{k=1}^{n}X_{i_k}$ 的子集是可测集，所以由定义 1 以及 (5) 式知 $[A]$ 是 X 中的可测集，故由 (3) 定义的 $\tau(A)$ 是存在的，通过从 Ω 向测度空间 X 的这种转移可以看出，

$\tau(A)$ 表示所有使 $v(A)=1$ 的赋值 v 在 Ω 中所占的份额，这种份额越大， A 的真确度就越大，所以把 $\tau(A)$ 称作 A 的真度是恰当的.

例 1　设 $A=p_1, B=2p_1, C=p_1\wedge p_2\wedge p_3, D=p_1\wedge p_2\wedge\cdots\wedge p_n$, 分别求 A,B,C,D 的真度，这里 $P\wedge Q$ 是 $\neg(\neg P\vee\neg Q)$ 的简写，$p_1\wedge p_2\wedge\cdots\wedge p_n=(\cdots((p_1\wedge p_2)\wedge p_3)\wedge\cdots p_{n-1})\wedge p_n(n\geq 3)$.

解　因为 $[A]=\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(A)=1\}=\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(p_1)=1\}=\{1\}\times\prod_{n=2}^{\infty}X_n$, 所以

$$\tau(A)=\mu([A])=\mu(\{1\}\times\prod_{n=2}^{\infty}X_n)=\mu_1(\{1\})=\frac{1}{3}.$$

又由 (2) 式， $[B]=\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(2p_1)=1\}=\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(p_1)\neq 0\}$, 所以

$$\begin{aligned}\tau(B)&=\mu([B])=\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(p_1)\neq 0\})=1-\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(p_1)=0\})\\&=1-\mu(\{0\}\times\prod_{n=2}^{\infty}X_n)=1-\mu_1(\{0\})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

由 $[C]=\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(C)=1\}=\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(p_1)=v(p_2)=v(p_3)=1\}=\{1\}\times\{1\}\times\{1\}\times\prod_{n=4}^{\infty}X_n$ 知

$$\tau(C)=\mu_1(\{1\})\times\mu_2(\{1\})\times\mu_3(\{1\})=(\frac{1}{3})^3.$$

类似可证 $\tau(p_1\wedge p_2\wedge\cdots\wedge p_n)=(\frac{1}{3})^n$.

例 2　设 $A=p_1\vee p_2\vee\cdots p_n(n\geq 2)$, 则 $\tau(A)=1-(\frac{2}{3})^n$.

证明　略.

命题 1　设 A 是重言式，则 $\tau(A\to B)=\tau(B), \tau(B\to A)=1$.

证明　由 A 是重言式知 $\forall v\in\Omega, v(A)=1$. 从而

$$\begin{aligned}\tau(A\to B)&=\mu([A\to B])=\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(A\to B)=1\})\\&=\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(A)\to v(B)=1\})=\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid 1\to v(B)=1\}\\&=\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(B)=1\}=\tau(B).\\\tau(B\to A)&=\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(B)\to v(A)=1\})=\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(B)\to 1=1\}),\end{aligned}$$

因为 $\forall v\in\Omega, v(B)\to 1=1$ 恒成立，故 $\tau(B\to A)=\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid v\in\Omega\})=\mu(X)=1$.

注 2　在二值命题逻辑中， $\forall A\in F(S), \tau(\neg A)=1-\tau(A)$ 成立，但在三值时上式不成立，然而可以证明下面的事实：

命题 2

$$\forall A\in F(S), \tau(2(\neg A))=1-\tau(A). \tag{6}$$

证明　由 (2) 式得：

$$\begin{aligned}\tau(2(\neg A)&=\mu([2(\neg A)])=\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(2(\neg A))=1\})\\&=\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid 2v(\neg A)\wedge 1=1\})\\&=\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid 2v(\neg A)\geq 1\})=\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(\neg A)\geq\frac{1}{2}\})\\&=\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(A)\leq\frac{1}{2}\}).\end{aligned}$$

注意到三值情形下 $v(A)\in\{0,\frac{1}{2},1\}$, 故

$$\tau(2(\neg A))=\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(A)\neq 1\})=1-\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(A)=1\})=1-\tau(A).$$

命题 3 设 $A\in F(S)$, 则 A 是重言式，当且仅当 $\tau(A)=1$; 若 A 是矛盾式，则 $\tau(A)=0$.

证明 设 A 是重言式，则由（3）知 $[A]=X$, 从而 $\tau(A)=1$. 反过来，设 A 不是重言式，$A=A(p_{i_1},\cdots,p_{i_n})$. 则有 $v\in\Omega$ 使 $v(A)\neq 1$. 设 $v(p_{i_k})=v_{i_k}(k=1,\cdots,n)$. 则 $(v_{i_1},\cdots,v_{i_n})\in E$, 这里 E 由 (4) 确定. 因为 $\mu_{i_1}(\{v_{i_1}\})\times\cdots\times\mu_{i_n}(\{v_{i_n}\})=(\frac{1}{3})^n$, 所以 $(\mu_{i_1}\times\cdots\times\mu_{i_n})(E)\leq 1-(\frac{1}{3})^n$. 从而由 (1) 及 (5) 知 $\mu([A])\neq 1$, 从而 $\tau(A)\neq 1$, 矛盾！

类似可证关于矛盾式的论断，又当 $\tau(A)=0$ 时， A 不一定为矛盾式，例如取 $A=(p\to 2(\neg p))\wedge(2(\neg p)\to p)$.

命题 4(真度 MP 规则) 设 $A,B,C\in F(S)$. 若 $\tau(A)\geq\alpha,\tau(A\to B)\geq\beta$, 则 $\tau(B)\geq\alpha+\beta-1$.

证明 令 $Y=\{\overrightarrow{v}\in X\mid v\in\Omega,v(A)=1\},Z=\{\overrightarrow{v}\in X\mid v\in\Omega,v(A\to B)=1\}$, 则由已知条件知： $\mu(Y)\geq\alpha,\mu(Z)\geq\beta$, 设 $\mu(Y\cap Z)=x$, 则

$$\mu(Y\cup Z)=\mu(Y)+\mu(Z)-\mu(Y\cap Z)\geq\alpha+\beta-x \tag{7}$$

显然 $\mu(Y\cup Z)\leq 1$, 从而由（7）得 $1\geq\alpha+\beta-x$, 即 $x\geq\alpha+\beta-1$. 又，任取 $\overrightarrow{v}\in Y\cap Z$, 则 $v(A)=v(A\to B)=1$, 从而可得 $v(B)=1$, 所以

$$\tau(B)=\mu([B])\geq\mu(Y\cap Z)=x\geq\alpha+\beta-1.$$

推论 1 设 $A,B,C\in F(S)$, 若 $\tau(A)=1,\tau(A\to B)=1$, 则 $\tau(B)=1$.

命题 5(真度 HS 规则) 设 $A,B,C\in F(S)$, 若 $\tau(A\to B)\geq\alpha,\tau(B\to C)\geq\beta$, 则 $\tau(A\to C)\geq\alpha+\beta-1$.

命题 5 的证明与命题 4 相似，故略去，同样有下推论

推论 2 设 $A,B,C\in F(S)$, 若 $\tau(A\to B)=\tau(B\to C)=1$, 则 $\tau(A\to C)=1$.

命题 6(真度交推理规则) 设 $A,B,C\in F(S)$, 若 $\tau(A\to B)\geq\alpha,\tau(A\to C)\geq\beta$, 则 $\tau(A\to B\wedge C)\geq\alpha+\beta-1$.

为证此命题，我们需要下面的引理，其证明是简单的，略去.

引理 1 $\forall a,b,c\in[0,1],a\to b\wedge C=(a\to b)\wedge(a\to c)$.

命题 6 的证明 令 $G_1=\{\overrightarrow{v}\in X\mid v\in\Omega,v(A\to B)=1\},G_2=\{\overrightarrow{v}\in X\mid v\in\Omega,v(A\to C)=1\}$, 则 $\tau(A\to B)=\mu(G_1),\tau(A\to C)=\mu(G_2)$. 显然有

$$1\geq\mu(G_1\cup G_2)=\mu(G_1)+\mu(G_2)-\mu(G_1\cap G_2)$$

从而

$$\mu(G_1\cap G_2)\geq\mu(G_1)+\mu(G_2)-1\geq\alpha+\beta-1.$$

令

$$G=\{\overrightarrow{v}\in X\mid v\in\Omega,v(A\to B\wedge C)=1\},$$

则 $\tau(A\to B\wedge C)=\mu(G)$. 又，显然有 $G\supseteq G_1\cap G_2$. 事实上，若 $\overrightarrow{v}\in G_1\cap G_2$, 则 $v(A\to B)=1$ 且 $v(A\to C)=1$, 由引理 1 知

$$v(A\to B\wedge C)=v(A)\to v(B\wedge C)=v(A)\to(v(B)\wedge v(C))=v(A\to B)\wedge v(A\to C)=1.$$

从而 $\overrightarrow{v}\in G$. 故

$$\tau(A\to B\wedge C)=\mu(G)\geq\mu(G_1\cap G_2)\geq\alpha+\beta-1.$$

推论 3 设 $A,B,C\in F(S)$, 若 $\tau(A\to B)=1$ 且 $\tau(A\to C)=1$, 则 $\tau(A\to B\wedge C)=1$.

注 3 由推论 1– 推论 3 可知， MP 规则， HS 规则及交推理规则是保持真度为 1 的公式的，即保重言式.

命题 7 设 $A,B\in F(S)$, 则 $\tau(A\vee B)=\tau(A)+\tau(B)-\tau(A\wedge B)$.

证明 设 $v\in\Omega$, 则 $v(A\vee B)=1$, 当且仅当 $v(A)=1$ 或 $v(B)=1$, 所以 $[A\vee B]=[A]\cup[B]$. 又 $v(A\wedge B)=1$ 当且仅当 $v(A)=1$ 且 $v(B)=1$, 即 $[A\wedge B]=[A]\cap[B]$, 从而有

$$\begin{aligned}\tau(A\vee B)&=\mu([A\vee B])=\mu([A]\cup[B])=\mu([A]+\mu[B])-\mu([A]\cap[B])\\&=\mu([A])+\mu([B])-\mu([A\wedge B])=\tau(A)+\tau(B)-\tau(A\wedge B)\end{aligned}$$

从而定理 1 得证.

3 公式的真度值之集在 [0,1] 上的分布

定理 1 $F(S)$ 中全体公式的真度之集 $\{\tau(A)\mid A\in F(S)\}$ 在 [0,1] 中稠密.

证明 只须证明

$$\frac{k}{3^n}\in H=\{\tau(A)\mid A\in F(S)\},n=1,2,\cdots;0\leq k\leq 3^n. \tag{8}$$

事实上，当 $n=1$ 时由例 1 及命题 3 知 $\frac{0}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3}$ 均属于 H. 假设 $n\leq m$ 时（ 8 ）式成立，即已知有 $A_i\in F(S)$ 满足 $\tau(A_i)=\frac{i}{3^m}(i=0,1,\cdots,3^m)$, 令 $n=m+1$, 我们来证存在 $A\in F(S)$, 使 $\tau(A)=\frac{k}{3^{m+1}}(0\leq k\leq 3^{m+1})$. 下面分情况讨论证明.

(i) 设 $k\leq 3^m$, 令 $l=3^m-k$, 则 $0\leq l\leq 3^m$, 由归纳假设有 $\tau(A_l)=\frac{l}{3^m}$. 取自然数 s 充分大，使 p_s 不在 A_l 中出现. 令 $A=2(\neg A_l)\wedge p_s$. 设 $v\in\Omega$, 则

$$v(A)=v(2(\neg A_l))\wedge v(p_s) \tag{9}$$

注意到赋值域是 $\{0,\frac{1}{2},1\}$, 由（ 2 ）式知 $v(2(\neg A_l))=1$ 当且仅当 $v(\neg Al)=1$ 或 $v(\neg A_l)=\frac{1}{2}$ 当且仅当 $v(A_l)=0$ 或 $v(A_l)=\frac{1}{2}$, 即 $v(A_l)\neq 1$. 从而由上分析及 (9) 式知： $\forall v\in\Omega,v(A)=1$ 当且仅当 $v(p_s)=1$ 且 $v(A_l)\neq 1$. 因此

$$\tau(A)=\mu([A])=\mu\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(A)=1\})=\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(p_s)=1$$

且

$$\begin{aligned}v(A_l)\neq 1\})&=\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(p_s)=1\})\cdot\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(A_l)\neq 1\})\\&=\tau(p_s)\cdot(1-\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid v(A_l)=1\})\\&=\tau(p_s)\cdot(1-\tau(A_l))=\frac{1}{3}(1-\frac{l}{3^m})=\frac{3^m-l}{3^{m+1}}=\frac{k}{3^{m+1}}.\end{aligned}$$

(ii) 设 $3^m < k \leq 2\times 3^m$, 令 $l = 2\times 3^m - k$, 则 $0 \leq l < 3^m$, 由归纳假设知 $\tau(A_l) = \frac{k}{3^m}$. 设 s 取法同上，令 $A = (2(\neg A_l) \to 2p_s) \wedge (2p_s \to 2(\neg A_l))$. 则

$$\forall v \in \Omega, v(A) = (v(2(\neg A_l)) \to v(2p_s)) \wedge (v(2p_s) \to v(2(\neg A_l)))$$

因此

$$v(A) = 1 \text{ 当且仅当 } v(2(\neg A_l)) \to v(2p_s) = 1 \text{ 且 } v(2p_s) \to v(2(\neg A_l)) = 1. \tag{10}$$

1° 若 $v(p_s) = 0$, 则 $v(2p_s) = 0$, 此时 $v(2p_s) \to v(2(\neg A_l)) = 1$ 恒成立，故由 (10) 式得: $v(A) = 1$ 当且仅当 $v(2(\neg A_l)) \to v(2p_s) = 1$, 即 $v(2(\neg A_l)) \to 0 = 1$, 当且仅当 $v(2(\neg A_l)) = 0$, 即 $v(A_l) = 1$.

2° 若 $v(p_s) = \frac{1}{2}$ 或 $v(p_s) = 1$, 即 $v(p_s) \neq 0$, 则由 (2) 式知 $v(2p_s) = 1$, 此时 $v(2(\neg A_l)) \to v(2p_s) = 1$ 恒成立，故由 (10) 式知 $v(A) = 1$ 当且仅当 $v(2p_s) \to v(2(\neg A_l)) = 1$, 即 $1 \to v(2(\neg A_l)) = 1$ 当且仅当 $v(2(\neg A_l)) = 1$ 当且仅当 $v(A_l) = 0$ 或 $v(A_l) = \frac{1}{2}$, 即 $v(A_l) \neq 1$.

令 $G_1 = \{v \in \Omega \mid v(p_s) = 0 \text{ 且 } v(A_l) = 1\}, G_2 = \{v \in \Omega \mid v(p_s) \neq 0 \text{ 且 } v(A_l) \neq 1\}$ 则

$$\begin{aligned}
&\mu((\{\overrightarrow{v} \in X \mid v \in G_1\}) = \mu(\{\overrightarrow{v} \in X \mid v(p_s) = 0 \text{ 且 } v(A_l) = 1\}) \\
&\quad = \mu(\{\overrightarrow{v} \in X \mid v(p_s) = 0\}) \cdot \mu(\{\overrightarrow{v} \in X \mid v(A_l) = 1\}) = \frac{1}{3} \cdot \tau(A_l) \\
&\quad = \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{3^m} = \frac{l}{3^{m+1}}. \\
&\mu(\{\overrightarrow{v} \in X \mid v \in G_2\}) = \mu(\{\overrightarrow{v} \in X \mid v(p_s) \neq 0 \text{ 且 } v(A_l) \neq 1\}) \\
&\quad = \mu(\{\overrightarrow{v} \in X \mid v(p_s) \neq 0\}) \cdot \mu(\{\overrightarrow{v} \in X \mid v(A_l) \neq 1\}) \\
&\quad = \frac{2}{3} \cdot (1 - \frac{l}{3^m}) = \frac{2\times 3^m - 2l}{3^{m+1}}.
\end{aligned}$$

由上分析知 $\forall v \in \Omega, v(A) = 1$ 当且仅当 $v \in G_1 \cup G_2$ 且 $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, 从而

$$\begin{aligned}
\tau(A) &= \mu([A]) = \mu(\{\overrightarrow{v} \in X \mid v(A) = 1\}) = \mu(\{\overrightarrow{v} \in X \mid v \in G_1 \cup G_2\}) \\
&= \mu(\{\overrightarrow{v} \in X \mid v \in G_1\}) + \mu(\{\overrightarrow{v} \in X \mid v \in G_2\}) \\
&= \frac{l}{3^{m+1}} + \frac{2\times 3^m - 2l}{3^{m+1}} = \frac{2\times 3^m - l}{3^{m+1}} = \frac{k}{3^{m+1}}.
\end{aligned}$$

(iii) 设 $k > 2\times 3^m$, 令 $l = 3^{m+1} - k$, 则 $0 \leq l < 3^m$. 令 $A = 2p_s \vee 2(\neg A_l)$, 则 $\forall v \in \Omega, v(A) = 1$, 即 $v(2p_s) \vee v(2(\neg A)) = 1$ 当且仅当 $v(2p_s) = 1$ 或 $v(2(\neg A_l)) = 1$ 当且仅当 $v(p_s) \in \{\frac{1}{2}, 1\}$ 或 $v(A_l) \in \{\frac{1}{2}, 0\}$, 即 $v(p_s) \neq 0$ 或 $v(A_l) \neq 1$. 由上分析可知，使 $v(A) = 1$ 的 Ω 中的 v 有不相交的两类:

1°. $v(p_s) \neq 0$. 令 $G_1 = \{v \in \Omega \mid v(p_s) \neq 0\}$, 则

$$\mu(\{\overrightarrow{v} \in X \mid v \in G_1\}) = \mu(\{\overrightarrow{v} \in X \mid v(p_s) \neq 0\}) = \frac{2}{3}.$$

2°. $v(p_s) = 0$ 且 $v(A_l) \neq 1$. 令 $G_2 = \{v \in \Omega \mid v(p_s) = 0 \text{ 且 } v(A_l) \neq 1\}$ 则

$$\begin{aligned}
&\mu(\{\overrightarrow{v} \in X \mid v \in G_2\}) = \mu(\{\overrightarrow{v} \in X \mid v(p_s) = 0 \text{ 且 } v(A_l) \neq 1\}) \\
&\quad = \mu(\{\overrightarrow{v} \in X \mid v(p_s) = 0\}) \cdot \mu(\{\overrightarrow{v} \in X \mid v(A_l) \neq 1\}) = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3^m})
\end{aligned}$$

又 $v(A)=1$ 当且仅当 $v\in G_1\cup G_2$ 且 $G_1\cap G_2=\emptyset$, 则

$$\begin{aligned}\tau(A)&=\mu([A])=\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid v\in G_1\cup G_2\})\\&=\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid v\in G_1\})+\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid v\in G_2\})\\&=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}(1-\frac{l}{3^m})=\frac{3^{m+1}-l}{3^{m+1}}=\frac{k}{3^{m+1}}.\end{aligned}$$

由 (i),(ii),(iii) 知 $n=m+1$ 时（ 8 ）式也成立，定理 2 得证.

注 4 对于无穷值逻辑， [16] 就 Lukasiewicz 算子的情形证明了积分真度之集在 [0,1] 中无孤立点，本文的就 Gödel 三值命题逻辑情形得出的定理 1 比上述结果更加明确．另一方面，定理 1 并未回答诸如是否存在真度为 0.8 或 0.9 的公式这类问题，下面的定理 2 否定地回答了这类问题．它告诉我们公式的真度只能是分母为 3 的方幂的分数.

定理 2 设 $H=\{\tau(A)\mid A\in F(S)\}$ 为全体公式的真度之集，则

$$H=\{\frac{k}{3^n}\mid n=1,2,\cdots;k=0,1,\cdots,3^n\}.$$

证明 令 $M=\{\frac{k}{3^n}\mid n=1,2,\cdots;k=0,1,\cdots 3^n\}$. 在定理 1 的证明中已看到 $M\subset H$, 以下只须证 $H\subset M$.

设 $X(n)=X_1\times\cdots\times X_n$, 这里 $X_k=\{0,\frac{1}{2},1\},\mu_k(\{0\})=\mu_k(\{\frac{1}{2}\})=\mu_k(\{1\})=\frac{1}{3}(k=1,2,\cdots,n)$. 则 $X(n)$ 是含有 3^n 个元素的均匀概率空间, 即 $\forall x\in X(n),(\mu_1\times\cdots\times\mu_n)(x)=(\frac{1}{3})^n$. 所以对 $X(n)$ 的任意子集 E, 由 E 有限知存在自然数 $k(0\le k\le 3^n)$, 使 $E=\bigcup_{i=1}^{k}\{x_i\mid x_i\in X(n)\}$, 其中 $x_i\ne x_j(i\ne j;i,j=1,\cdots,k)$. 所以有

$$\begin{aligned}(\mu_1\times\cdots\times\mu_n)(E)&=(\mu_1\times\cdots\times\mu_n)(\bigcup_{i=1}^{k}\{x_i\mid x_i\in X(n)\})\\&=\sum_{i=1}^{k}(\mu_1\times\cdots\times\mu_n)(x_i)=\frac{k}{3^n}\in M.\end{aligned}$$

设 $A=A(p_{i_1},\cdots,p_{i_n})\in F(S)$, 下证 $\tau(A)\in M$. 为简单起见，不妨设 $A=A(p_{i_1},\cdots,p_{i_n})$. 像前面一样， $\forall v\in\Omega$, 以 v_k 记 $v(p_k)(p_k\in S)$. 令 $E=\{(v_1,\cdots,v_n)\in X(n)\mid v(A)=1\}$, 则 $(\mu_1\times\cdots\times\mu_n)(E)\in M$. 这时由（ 1 ）及（ 3 ）得

$$\begin{aligned}\tau(A)&=\mu([A])=\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid v\in\Omega,v(A)=1\})=\mu(\{\overrightarrow{v}\in X\mid(v_1,\cdots,v_n)\in E\})\\&=\mu(E\times\prod_{k=n+1}^{\infty}X_k)=(\mu_1\times\cdots\times\mu_n)(E)\in M.\end{aligned}$$

定理 2 得证.

4 结束语

本文基于测度理论对 Gödel 三值命题逻辑中的公式按真度进行了分类，使每个公式恰在某一类中，并给出了真度推理规则，为进一步利用真度概念建立公式间的相似关系，并从相似度出

发在 $F(S)$ 上引入一种自然的内蕴的伪距离，以便为在 $F(S)$ 中展开近似推理奠定了基础. 限于篇幅，关于建立在此框架基础之上的近似推理理论我们将另文讨论.

参考文献:

[1] ZADEH L A. *Outline of new approach to the analysis of complex systems and decision processes* [J]. IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernet, 1973, **1**: 28–44.

[2] DUBOIS D, PRADE H. *Fuzzy sets in approximate reasoning I* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, **40**(1): 143–202.

[3] PAVELKA J. *On Fuzzy Logic I,II,III* [J]. Zeitschr f Math Logic und Grundlagen d Math, 1979, **25**(1): 45–52; 119–134; 447–464.

[4] YING Ming-sheng. *The fundamental theorem of ultraproduct in Pavelka's logic* [J]. Z. Math. Logic Grundlagen Math., 1992, **38**: 197–201.

[5] NOVAK V. *On the syntactic-semantical completeness of first-order-fuzzy logic, (I),(II)* [J]. Kybernetika, 1990, **26**: 47–66; 134-154.

[6] NOVAK V. *The Alternative Mathematical Model of Linguistic Semantics and pragmatics* [M]. Plenum, New York, 1992.

[7] XU Yang, QIN Ke-yun, LIU Jun. et al. *L-valued propositional logic* L_{vpl} [J]. Inform. Sci., 1999, **114**(1-4): 205–235.

[8] XU Yang, LIU Jun, SONG Zhen-ming. et al. *On semantics of L-valued first-order logic* L_{vfl} [J]. Internat. J. Gen. Systems, 2000, **29**(1): 53–79.

[9] HÁJEK P. *Metamathematics of Fuzzy Logic* [M]. Kluwer Academic Publishers, 1998.

[10] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理 [M]. 北京：科学出版社， 2000.
WANG Guo-jun. *Non-Classical Mathematic Logic and Approximate Reasoning* [M]. Beijing: Science Press, 2000. (in Chinese)

[11] 吴望名. 模糊推理的原理和方法 [M]. 贵阳：贵州科技出版社， 1994.
WU Wang-ming. *Principles and Methods of Fuzzy Reasoning* [M]. Guiyang: Guizhou Science and Technology Press, 1994. (in Chinese)

[12] 陈永义. 模糊控制技术及应用实例 [M]. 北京：北京师范大学出版社， 1993.
CHEN Yong-yi. *Fuzzy Control Technology and Examples* [M]. Beijing: Beijing Normal University Press, 1993. (in Chinese)

[13] 张文修，梁怡. 不确定性推理原理 [M]. 西安：西安交通大学出版社， 1996.
ZHANG Wen-xiu, LEUNG Yi. *The Uncertainty Reasoning Principles* [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1996.

[14] YIMG Ming-sheng. *A logic for approximate reasoning* [J]. J. Symbolic, 1994, **59**: 830–837.

[15] WANG Guo-jun. *On the logic foundation of fuzzy reasoning* [J]. Information Sciences, 1999, **117**(1): 47–88.

[16] 王国俊，王伟. 逻辑度量空间 [J]. 数学学报， 2001, **44**(1): 159–168.
WANG Guo-jun, WANG Wei. *The logical metric spaces* [J]. Acta Math. Sinica, 2001, **44**(1): 159–168. (in Chinese)

[17] 王国俊，傅丽，宋建设. 二值命题逻辑中命题的真度理论 [J]. 中国科学 (A 辑), 2001, **31**(11): 998–1008.
WANG Guo-jun, FU Li, SONG Jian-she. *Theory of truth degrees of propositions in two-valued logic* [J]. Sci. China Ser. A, 2001, **31**(11): 998–1008. (in Chinese)

[18] HALMOS P R. *Measure Theory* [M]. Spring-Verlag, New York, 1980.

Theory of Truth Degrees in Gödel 3-Valued Propositional Logic

LI Jun[1], *LI Yao-long*[2], *LI Suo-ping*[1]

(1. School of Science, Lanzhou University of Technology, Gansu 730050, China;
2. Dept. of Math., Weinan Teachers College, Shaanxi 714000, China)

Abstract: Base on the infinite product of evenly distributed probability space, this paper introduces the theory of truth degrees in Gödel 3-valued propositional logic and inference rules with truth degrees are given. Moreover, it is proved that the set of truth degrees of propositions is dense in [0,1], and expressions of truth degrees are obtained. This paves the way for the further study on approximate reasoning.

Key words: truth degree; inference rule with truth degree; dense.