Bazilevic函数的一个性质

杨 定 恭

(苏州大学)

设$S^*(\rho)$ ($0\leqslant\rho<1$) 表示在单位圆盘$E=\{z: |z|<1\}$内正则且满足条件$\mathrm{Re}\frac{zg'(z)}{g(z)}>\rho$的$\rho$级星象函数$g(z)=z+\cdots$所构成的类。我们说:

(i) $f(z)=z+a_{n+1}z^{n+1}+\cdots$属于类$B_n^{(1)}(\alpha, \beta)(\alpha\geqslant 0, 0\leqslant\beta<1)$,如果在E中成立着 $\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha}\right\}>\beta$;

(ii) $f(z)=z+a_{n+1}z^{n+1}+\cdots$属于类$B_n(\alpha, \beta, \rho,)$ ($\alpha>0$, $0\leqslant\beta<1$),如果存在着$g(z)=z+c_{n+1}z^{n+1}+\cdots$ S^* (ρ)使不等式 $\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{\alpha}\right\}>\beta$在E中成立。

近来吴卓人[1]得到的一些定理可以推广如下。

定理 1 设$F(z)=z+b_{n+1}z^{n+1}+\cdots$属于$B_n^{(1)}(\alpha, \beta)$。若$\alpha>0$, $\mathrm{Re}c\geqslant 0$ (c为复数), $0\leqslant\beta\leqslant\gamma<1$,则由

$$F(z)^{\alpha}=\frac{\alpha+c}{z^c}\int_0^z f(t)^{\alpha}t^{c-1}dt \qquad (z\in E) \qquad (1)$$

定义的函数$f(z)=z+a_{n+1}z^{n+1}+\cdots$在$|z|<\sqrt[n]{R_1}$内属于$B_n^{(1)}(\alpha, \gamma)$,这里$R_1$是方程$(\alpha+\mathrm{Re}c)(2\beta-\gamma-1)R^2+2[(\alpha+\mathrm{Re}c)(\beta-\gamma)-n(1-\beta)]R+(\alpha+\mathrm{Re}c)(1-\gamma)=0$的正根。这个结果当$c$为实数时是准确的。

引 理 设$F(z)=z+b_{n+1}z^{n+1}+\cdots\in S^*(\rho)$。若$\alpha>0$, $\mathrm{Re}c\geqslant 0$, $0\leqslant\rho\leqslant\sigma<1$且$(\sigma-\rho)(\alpha(2\rho-1)+\mathrm{Re}c)\geqslant 0$,则由(1)定义的$f(z)$在$|z|<\sqrt[n]{R_2}$内属于$S^*(\sigma)$,这里$R_2$是方程$(\alpha(2\rho-1)+\mathrm{Re}c)(2\rho-\sigma-1)R^2+2[(\alpha\rho+\mathrm{Re}c)(\rho-\sigma)-(1-\rho)(\alpha(1-\rho)+n)]R+(\alpha+\mathrm{Re}c)(1-\sigma)=0$的正根。这个结果当$c$为实数时是准确的。

R. J. Libera 和A. E. Livingston在[2]中的一个主要结果是我们的引理置$n=\alpha=c=1$的特例。

定理 2 设$F(z)=z+b_{n+1}z^{n+1}+\cdots$属于$B_n(\alpha, \beta, \rho)$。若$\alpha>0$, $\mathrm{Re}c\geqslant 0$, $0\leqslant\beta<1$, $0\leqslant\rho\leqslant\sigma<1$且$(\sigma-\rho)(\alpha(2\rho-1)+\mathrm{Re}c)\geqslant 0$,则由(1)定义的$f(z)$在$|z|<\sqrt[n]{R_2}$内属于$B_n(\alpha, (\sigma-\rho+\beta(1-\sigma))/(1-\rho), \sigma)$。这个结果当$c$为实数时准确。

令$C_n(\beta, \rho)\equiv B_n(1, \beta, \rho)$。我们注意$C_1(\beta, \rho)$就是R. J. Libera引入的$\beta$级$\rho$型近于凸函数类。当$\alpha=1$和$c\geqslant 1$,定理2产生下述 (下接第37页)

〔4〕Thompson, T., "Semicontinuous and irresolute images of S-closed Spaces", proc. Amer. Math. Soc., 66(1977), 359—362.
〔5〕关肇直,"拓扑空间概论",科学出版社, 北京, 1985.
〔6〕吉智方, "S-闭空间的若干性质",内蒙师大学报 (自然科学版), 2 (1984), 9—17.

A Necessary and Sufficient Condition for a T_i-space to be S-closed space

Ji Zhifang (吉智方)

(Neimenggu Normal University)

Abctract

In this paper, we obtain the following results:

Theorem 1 If every irresolute image of a T_i-Space X in any T_i-Space is closed, then X is extremally disconnected. $(i=2\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 5, 6)$

Theorem 2 A T_i-space X is S-Closed if and only if the irresolute image of X in any T_i-Space is Closed. $(i=2\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 5)$.

(上接第38页)

推 论 设$F(z)=z+b_{n+1}z^{n+1}+\cdots$属于$C_n(\beta, \rho)$。若$c\geqslant 1$, $0\leqslant\beta<1$, $0\leqslant\rho\leqslant\sigma<1$, 则$f(z)=\frac{z^{1-c}}{1+c}(z^cF(z))'$在$|z|<\sqrt{R_3}$内属于$C_n((\sigma-\rho+\beta(1-\sigma))/(1-\rho), \sigma)$,这里$R_3$是方程$(2\rho+c-1)(2\rho-\sigma-1)R^2+2[(\rho+c)(\rho-\sigma)-(1-\rho)(n+1-\rho)]R+(1+c)(1-\sigma)=0$的正根。所得结果是准确的。

参 考 文 献

〔1〕吴卓人, 星象积分算子式与Bazilevic函数族, 数学学报, **27** (1984), 394—409.
〔2〕R. J. Libera and A. E. Livingston, On the univalence of some classes of regular functions, Proc. AMS., **30** (1971), 327-336.