第26卷第1期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.1
2006年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)01-0189-02 **文献标识码**: **A**

关于 Landau 不等式

胡 克

(江西师范大学数学系，江西 南昌 330027)

摘 要: 本文给出 Landau 不等式的一种改进.

关键词: Carlson 不等式; Landau 不等式.
MSC(2000): 26D15
中图分类: O178

设 $a_k \geq 0, k=1,2,\cdots$, 记 $\|x^s\| = \sum_{k=1}^n |x_k|^{2s} (s>0)$, $\|kx\| = \sum_{k=1}^n |kx_k|^2$, 及 $\|(k-\frac{1}{2})x\| = \sum_{k=1}^n (k-\frac{1}{2})^2 |x_k|^2$. Carlson[1] 证明了：

$$(\sum_{k=1}^n a_k)^4 = \|a^{\frac{1}{2}}\|^4 \leq \pi^2 \|a\|\|ka\|. \tag{A}$$

后来 Landau[2] 将 Carlson 不等式 (A) 改进为：

$$(\sum_{k=1}^n a_k)^4 = \|a^{\frac{1}{2}}\|^4 \leq \pi^2 \|a\|\|(k-\frac{1}{2})a\|. \tag{B}$$

在此我们改进 Landau 不等式 (B) 为如下之不等式：

定理 如以上所述记号，则有

$$\|a^{\frac{1}{2}}\|^4 \leq \pi^2 \|a\|\|(k-\frac{1}{2})a\| - \frac{1}{2}(D_1^2(a) + D_2^2(a)). \tag{1}$$

其中

$$D_1^2(a) = \|a\| \Big| \sum_{k=1}^n \frac{[(2k-1)+(-1)^{k+n}(2n+1)]}{(n+k)(n+1-k)} (k-\frac{1}{2}) a_k \Big|^2,$$

$$D_2^2(a) = \|(k-\frac{1}{2})a\| \Big| \sum_{k=1}^n \frac{[(2k-1)+(-1)^{k+n}(2n+1)]}{(n+k)(n+1-k)} a_k \Big|^2.$$

定理的证明 先述 Gram 不等式，记 $(f,g) = \int_0^\pi f(x)\overline{g(x)} \mathrm{d}x$, 若 $\int_0^\pi |c(x)|^2 \mathrm{d}x = 1$ 及 $(g,c) = 0$, 则有

$$|(f,g)|^2 \leq \|f\|\|g\| - |(f,c)|^2 \|g\|, \quad \|F\| = (F,F). \tag{2}$$

即 Gram 不等式：

$$\begin{vmatrix} (f,f)(f,g)(f,c) \\ (g,f)(g,g),0 \\ (c,f) \quad 0 \quad 1 \end{vmatrix} \geq 0. \tag{2'}$$

收稿日期: 2004-02-24

现在来证明定理. 设 $F(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\cos(k-\frac{1}{2})x$, 则通过简单的计算，可得

$$F^2(0)=(\sum_{k=1}^{n}a_k)^2=\|a^{\frac{1}{2}}\|^2=2\int_{n}^{\pi}F'(x)F(x)\mathrm{d}x,\ \|F\|=\frac{\pi}{2}\|a\|,$$

$$\|F'\|=\frac{\pi}{2}\|(k-\frac{1}{2})a\|. \tag{3}$$

我们取 $C_1(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n+\frac{1}{2})x$, 有

$$\|C_1\|=1,(F,C)=0,|(F',C_1)|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1+(2n+1)(-1)^{n+k}}{(n+k)(n-k+1)}(k-\frac{1}{2})a_k|. \tag{4}$$

我们又 $C_2(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(n+\frac{1}{2})x$, 又可得

$$\|C_2\|=1,(F',C)=0,|(F,C_2)|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1+(2n+1)(-1)^{n+k}}{(n+k)(n-k+1)}a_k|. \tag{5}$$

现在先以 $F',F,C,$ 取代 Gram 不等式 (2) 中 $f,g,c,$ 再将 (3) 和 (4) 代入 (2) 式中，即得

$$\|a^{\frac{1}{2}}\|^4\le\pi^2\|a\|\|(k-\frac{1}{2}a\|-\|a\||\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1+(2n+1)(-1)^{k+2s}}{(n+k)(n-k+1)}(k-\frac{1}{2})a_k\Big|^2. \tag{6}$$

又以 F,F',C_2 取代 Gram 不等式 (2) 中 $f,g,c,$ 再将 (3) 和 (5) 代入，我们又得

$$\|a^{\frac{1}{2}}\|^4\le\pi^2\|a\|\|(k-\frac{1}{2}a\|-\|(k-\frac{1}{2})a\||\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)+(2n+1)(-1)^{k+n}}{(n+k)(n-k+1)}a_k\Big|^2. \tag{7}$$

(6) 和 (7) 式相加，即得定理的结论，证毕.

参考文献:

[1] CARLSON F. *Une ine'galite'Artiv for Math* [J]. Astrom Och Fys., Ser.B, 1934, **25**(1).
[2] MIKLIN S G. *Constant in some inegualities of analysis* [J]. Jon Wiley, 1986, 7.

On the Landau Inequality

HU Ke
(Dept. of Math., Jiangxi Normal University, Nanchang 330027, China)

Abstract: This paper gives an improvement of the Landau inequality.

Key words: Carlson inequality; Landau inequality.