第17卷第4期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 4
1997年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1997

一类商环的Grothendieck群*

陈 焕 良

(湖南师范大学数学系, 长沙410006)

摘 要 本文研究了商环 R/I 的 K_0 群, 证明了: 设 $R/I\in PT$, $I\subset J(R)$, 则 $K_0R\simeq K_0(R/I)$ 当且仅当幂等元关于 I 可提升. 并进而给出了 Exchange 环的一个特征.

关键词 PT 环, 幂等元的提升, Exchange 环.

分类号 AMS(1991) 20K/CCL O153.3

众所周知, 交换环 R 称为 PT 环, 如果 R 上幂等矩阵相似于某个对角矩阵. 这是一类应用广泛的环类, 如零维环、半局部环、带许多单位的环、LUV 环, PF 环等都是 PT 环. 本文研究一个商环 R/I 是 PT 环时, 其 K_0 群和 K_0R 之间关系. 作为推论给出了 Exchange 环的外部特征, 推广了文[1]中相关结论.

命题1 设 $R/I\in$PT 且幂等元关于 I 可提升, 则 $\forall P\in\underline{\underline{P}}(R/I)$, $\exists Q\in\underline{\underline{P}}(R)$, 使得 $P\simeq(R/I)\otimes Q$.

证明 因为 $R/I\in$PT, 故 $\forall P\in\underline{\underline{P}}(R/I)$, $\exists$ R/I 中的幂等元 $e_1, e_2, \cdots, e_n$, 使得

$$P\simeq(R/I)e_1\oplus\cdots\oplus(R/I)e_n.$$

因为幂等元关于 I 可提升, 故$\exists$ R 中幂等元 $f_1, \cdots, f_n$, 使得 $e_i=f_i+I$, $1\leq i\leq n$.

令 $Q=Rf_1\oplus\cdots\oplus Rf_n$, 因为 $Rf_i\oplus R(1-f_i)\simeq R$, 故有 $Q\oplus R(1-f_1)\oplus\cdots\oplus R(1-f_n)\simeq R^n$, 从而有 $Q\in\underline{\underline{P}}(R)$.

作映射 $\varphi: R/I\times Rf_1\to(R/I)e_1$, $(\overline{r}, r'f_1)\to(\overline{rr'})e_1$.

显然 φ 为双加平衡映射, 故由张量积的泛性质知, $\exists!\Phi$, 使得右图可交换.

$$\begin{array}{ccc} R/I\times Rf_1 & \longrightarrow & R/I\otimes Rf_1 \\ & \varphi\searrow & \swarrow\Phi \\ & (R/I)e_1 & \end{array}$$

这里 $\Phi(\sum_{i=1}^m\overline{r_i}\otimes r_i'f_1)=\sum_{i=1}^m(\overline{r_ir_i'})e_1$, 显然 Φ 为满的同态.

令 $\Phi(\sum_{i=1}^m\overline{r_i}\otimes r_i'f_1)=0$, 则有:

$$\sum_{i=1}^m\overline{r_i}\otimes r_i'f_1=\sum_{i=1}^m\overline{r_i}\otimes(r_i'f_1)f_1=\sum_{i=1}^m\overline{r_i}(r_i'f_1)\otimes(1\cdot f_1)$$

* 1994年11月9日收到

$$= \sum_{i=1}^{m} \overline{r_i r_i' f_1} \otimes (1 \cdot f_1) = (\sum_{i=1}^{m} \overline{(r_i r_i')} e_1) \otimes (1 \cdot f_1) = 0.$$

所以 Φ 为群同构. 又显然 Φ 为 R/I-模同态, 故有模同构: $\Phi: (R/I) \otimes Rf_1 \simeq (R/I)e_1$. 类似地可以证得: $(R/I) \otimes Rf_i \simeq (R/I)e_i, 2 \leq i \leq n$. 从而有:

$$P \simeq (R/I)e_1 \oplus \cdots \oplus (R/I)e_n \simeq (R/I) \otimes Rf_1 \oplus \cdots \oplus (R/I) \otimes Rf_n$$
$$\simeq (R/I) \otimes (Rf_1 \oplus \cdots \oplus Rf_n) \simeq (R/I) \otimes Q.$$

因此命题得证.

命题 2 设 $I \subseteq J(R)$ 且 $\forall P \in \underline{\underline{P}}(R/I), \exists Q \in \underline{\underline{P}}(R)$, 使得 $P \simeq R/I \otimes Q$, 则幂等元关于 I 可提升.

证明 $\forall 0 \neq e = e^2 \in R/I$, 因为 $(R/I)e \oplus (R/I)(1-e) \simeq R/I$, 所以 $(R/I)e \in \underline{\underline{P}}(R/I)$, 故 $\exists Q \in \underline{\underline{P}}(R)$, 使得 $(R/I)e \simeq (R/I) \otimes Q \simeq Q/IQ$. 从而有 R-模短正合列:

$$0 \to IQ \to Q \xrightarrow{\theta} (R/I)e \to 0,$$

所以 $\mathrm{Ker}\theta = IQ$.

令 $\mathrm{Ker}\theta + M = Q$, 则 $IQ + M = Q$, 由于 $I \subset J(R)$, 由 Nakayama 定理知 $M = Q$, 从而 Q 为 $(R/I)e$ 的投射盖. 又显然有满同态 $\Phi: R \to (R/I)e$, 从而有分解 $R \simeq P_1 \oplus P_2$, 使得 $Q \simeq P_1$; 易知存在 R 中的幂等元 f, 使得 $P_1 \simeq Rf$. 因为 $f + I$ 是关于 I 可提升到 f 的, 故类似于命题 1 的证明知: $(R/I) \otimes Q \simeq (R/I) \otimes Rf \simeq (R/I)(f+I)$, 所以有 $(R/I)e \overset{\varphi}{\simeq} (R/I)(f+I)$. 从而 $f + I = \varphi(\overline{re}) = \varphi(\overline{r} \cdot e \cdot e) = \varphi(\overline{re}) \cdot e = (f+I)e$; 另一方面 $e = \varphi^{-1}(\overline{t}(f+I)) = \varphi^{-1}(\overline{t}(f+I)(f+I)) = \varphi^{-1}(\overline{t}(f+I))(f+I) = e(f+I) = (f+I)e$, 所以有 $e = f + I$, 即幂等元 e 可提升到 f.

定理 3 设 $R/I \in \mathrm{PT}$, $I \subseteq J(R)$, 则下列两款等价:

(1) $K_0R \overset{\varphi}{\simeq} K_0(R/I)$, 这里 $\varphi([P]) = [R/I \otimes P]$.

(2) 幂等元关于 I 都可提升.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 因为 $\varphi: K_0R \to K_0(R/I)$, $[P] \to [R/I \otimes P]$ 为同构, 故 $\forall P \in \underline{\underline{P}}(R/I)$, 存在 $Q \in \underline{\underline{P}}(R)$, 使得 $[P] = [R/I \otimes Q]$, 因为 $R/I \in \mathrm{PT}$, 所以 $R/I \in \mathrm{UCP}$, 从而 $P \simeq R/I \otimes Q$, 根据命题 2 即得: 幂等元关于 I 可提升.

(2) $\Rightarrow$ (1) 由命题 1 知: $\forall P \in \underline{\underline{P}}(R/I), \exists Q \in \underline{\underline{P}}(R)$, 使得 $P \simeq R/I \otimes Q$, 故 $\varphi: K_0R \to K_0(R/I)$ 为满同态. 又因为 $I \subset J(R)$, 所以 φ 为单同态, 故有 $\varphi: K_0R \simeq K_0(R/I)$.

推论 4 设 R 为 Exchange 环且 $R/J(R)$ PT, 则 $K_0R \simeq K_0(R/J(R))$.

证明 因为幂等元关于 $J(R)$ 可提升, 故由定理 3 即得.

推论 5 设 R 为带许多单位的 Exchange 环, 则 $K_0R \simeq K_0(R/J(R))$.

证明 注意到 $R/J(R)$ 为带许多单位的, 从而 $R/J(R) \in \mathrm{PT}$, 再由定理 3 即得.

推论 6 设 R 为零维环, 则下列两款等价:

(1) $K_0R \simeq \mathbf{Z}$

(2) R 为拟局部环.

证明 (2) $\Rightarrow$ (1) 显然.

(1) $\Rightarrow$ (2) 因为 R 为零维环, 故幂等元关于 $J(R)$ 可提升, 从而 $K_0(R/J(R)) \simeq K_0R \simeq \mathbf{Z}$,

又因为 $R/J(R)$ 为VN 正则环, 所以由文[3] 知 $R/J(R)$ 为域, 亦即 R 为拟局部环.

该推论在讨论多项式环、群环的 Grothendieck 群时有着广泛的应用.

类似地, 亦可得:

推论 7 设 R 为自内射环, 则下列两款等价:

(1) $K_0R \simeq \mathbf{Z}$;

(2) R 为拟局部环.

推论 8 设 R 为带许多单位的 π- 正则环, 则 $K_0R \simeq K_0(R/J(R))$.

参 考 文 献

[1] 武同锁, 弱正则环的 K_0群与弱 Noether 环的整体维数, 南京大学学报数学半年刊, 10: 2(1993), 203- 207.

[2] B. R. McDonald, *Linear algebra over commutative rings*, Marcel Dekker, Inc., 1984.

[3] 陈焕艮, Abel 群环的约化群, 科学通报, Vol 39, 14(1994), 1261- 1264.

[4] 陈焕艮、佟文廷, 范数 $\chi_{L}(R)$ 与 χ_{L} -群, 中国科学(A), 24: 9(1994), 917- 925.

[5] 佟文廷, Grothendieck 群和 PT 环, Alg. Collog., 3(1994), 267- 270.

The Grothendieck Groups of Quoient Rings

Chen Huanyin

(Dept. of Math., Hunan Normal University, Changsha 410006)

Abstract

In this paper, we study the K_0 group of ring R/I. We prove that if $R/I \in$ PT, $I \subset J(R)$, then $K_0R \simeq K_0(R/I)$ if and only if every idempotent can be lifted modulo I. Moreover, we give a characterization of exchange ring.

Keywords PT ring, idempotent, ring.