关于Banach空间k一致凸及k一致光滑性*

方习年

(安徽机电学院，芜湖 241000)

摘　要：用统一且简洁形式刻画、定义了Banach空间的(局部)k一致凸、k-强凸、ω-强凸性．给出(局部)k一致光滑性概念，并讨论了上述空间的关系及性质．

关键词：k一致光滑；k-强光滑；ω-强凸．

分类号：AMS(1991) 46B20/CLC O177.2

文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2000)04-0583-05

1　引言及主要结论

本文主要研究与(局部)k一致凸对偶的光滑性，该问题在[1]中曾作过研究，但未获得什么结果(见[2])．该文用类似于一致光滑性的定义给出与(L)k-UR[4]具有对偶性的(局部)k一致光滑性．设X为Banach空间，X^*是X的共轭．$S=S(X)=\{x\in X,\|x\|=1\}$，$S^*=S(X^*)$，$\sum(x)=\{f\in S^*;f(x)=\|x\|\}$，对$\forall f\in S^*$，$x\in S$，记

$$F(f,\delta)=\{y\in S;f(y)\geqslant 1-\delta\},F^*(x,\delta)=\{g\in S^*;g(x)\geqslant 1-\delta\}.$$

定义1　称X为k一致光滑的(k-US)，如果对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\lambda>0$，使得对任意$x\in S$及k维子空间$Y\subset X$，有$\inf\{\|x+\lambda y\|+\|x-\lambda y\|-2;y\in S(Y)\}<\lambda\varepsilon$.

定义2　称X为局部k一致光滑的(Lk-US)，如果对$\forall f\in S^*$及$\varepsilon>0$，$\exists\lambda=\lambda(f,\varepsilon)>0$，使得对$\forall x\in F(f,\lambda)$及$k$维子空间$Y\subset X$，有

$$\inf\{\|x+\lambda y\|+\|x-\lambda y\|-2;y\in S(Y)\}<\lambda\varepsilon.$$

定理1　X为k-强光滑[3]的当且仅当对$\forall x\in S$及$\varepsilon>0$，$\exists\lambda=\lambda(x,\varepsilon)>0$，使得对任意$k$维子空间$Y\subset X$，有$\inf\{\|x+\lambda y\|+\|x-\lambda y\|-2;y\in S(Y)\}<\lambda\varepsilon$.

定理2　X为k一致凸(k-UR)当且仅当对任$\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$x_0,x_1,\cdots,x_k\in S$且$d(x_{l+1},\mathrm{Span}(x_0,x_1,\cdots,x_l)\geqslant\varepsilon(0\leqslant l<k)$时，有$\|x_0+x_1+\cdots+x_k\|\leqslant k+1-\delta$.

定理3　X为局部k一致凸的(Lk-UR)当且仅当对$\forall x_0\in S$及$\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0$，当$x_1,\cdots,x_k\in S$且$d(x_{l+1},\mathrm{Span}(x_0,x_1,\cdots,x_l))\geqslant\varepsilon(0\leqslant l<k)$时，有$\|x_0+x_1+\cdots+x_k\|\leqslant k+1-\delta$.

定义3　称X为k-强凸的，如果对$\forall x_0\in S$，$f\in\sum(x_0)$，$\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(f,\varepsilon)>0$，当$x_1,\cdots,x_k\in S$且$d(x_{l+1},\mathrm{Span}(x_0,\cdots,x_l))\geqslant\varepsilon(0\leqslant l<k)$时，有

$$f(x_0+x_1+\cdots+x_k)\leqslant k+1-\delta.$$

* 收稿日期：1997-09-08；修订日期：1999-06-13

作者简介：方习年(1960-)，男，安徽机电学院副教授．

定义 4 称 X 为 ω- 强凸的，如果对 $\forall x_0\in S, f\in\sum(x_0), \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S$，使得对 $\forall k\in N$，$\lim f(x+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})=k+1(n_1,\cdots,n_k\to\infty)$ 成立，则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对紧集．

定理 4 (1)X 为(L)k-US 当且仅当 X^* 是(L)k-UR；(2)X^* 是 k- 强凸的，则 X 是 k- 强光滑的．

定理 5 (1)X^* 是 Lk-US 当且仅当 X 是 Lk-UR 且自反的；(2)X^* 是 k- 强光滑的当且仅当 X 是 k- 强凸且自反的．

定理 6 X 是 k- 强凸的；则 X 是 ω- 强凸的．

定理 7 X 是 ω- 强凸的，则 X 有(H)性质；当 X 自反时，其逆亦真．

2 定理的证明

定理 2 的证明 若 $\exists\ \varepsilon>0$，对 $\forall n\in N$，有 $x_0^{(n)},x_1^{(n)},\cdots,x_k^{(n)}\in S$，使 $d(x_{l+1}^{(n)},\mathrm{Span}(x_0^{(n)},\cdots,x_l^{(n)}))\triangleq d_{l+1}^{(n)}\geqslant\varepsilon(0\leqslant l<k)$，但 $\|x_0^{(n)}+x_1^{(n)}+\cdots+x_k^{(n)}\|>k+1-\frac{1}{n}$. 那么 $A(x_0^{(n)},x_1^{(n)},\cdots,x_k^{(n)})\geqslant d_1^{(n)}\cdot d_2^{(n)}\cdots d_k^{(n)}$[7] $\geqslant\varepsilon^k\not\to(n\to\infty)$. 故 X 不是 k-UR(其中 $A(x_0^{(n)},\cdots,x_k^{(n)})$ 是 k-UR 定义中行列式上确界).

反之，若 X 不是 k-UR，那么由[6]中定理 4 知，$\exists\ \varepsilon>0$，对 $\forall n\in \mathrm{N}$，有 $x_0^{(n)},x_1^{(n)},\cdots,x_k^{(n)}\in S$，使 $\|x_0^{(n)}+x_1^{(n)}+\cdots+x_k^{(n)}\|>k+1-\frac{1}{n}$. 但

$$W(x_0^{(n)},x_1^{(n)},\cdots,x_k^{(n)})\triangleq\sup\left\{\begin{vmatrix} f_1(x_0^{(n)}) & f_1(x_1^{(n)}) & \cdots & f_1(x_k^{(n)})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{k+1}(x_0^{(n)}) & f_{k+1}(x_1^{(n)}) & \cdots & f_{k+1}(x_k^{(n)})\end{vmatrix};\ \begin{matrix}f_l\in S^*\\ l=1,\cdots,k+1\end{matrix}\right\}\geqslant\varepsilon$$

因 $\mathrm{Span}(x_0^{(n)},\cdots,x_{(l-1)}^{(n)})$ 是有限维的，故 $\exists\ y_l^{(n)}\in\mathrm{Span}(x_0^{(n)},\cdots,x_{l-1}^{(n)})$，使 $d_l^{(n)}\triangleq d(x_l^{(n)},\mathrm{Span}(x_0^{(n)},\cdots,x_{l-1}^{(n)}))=\|x_l^{(n)}-y_l^{(n)}\|$，记 $\varepsilon_1=\inf\limits_n\min\limits_{1\leqslant l\leqslant k}d_l^{(n)}$，由行列式的性质不难得出：

$$\varepsilon\leqslant W(x_0^{(n)},x_1^{(n)},\cdots,x_k^{(n)})\leqslant(k+1)!\,\|x_1^{(n)}-y_1^{(n)}\|\cdots\|x_k^{(n)}-y_k^{(n)}\|,$$

故 $d_l^{(n)}\geqslant\varepsilon_1>0(1\leqslant l\leqslant k,\forall n\in N)$. 但

$$\|x_0^{(n)}+x_1^{(n)}+\cdots+x_k^{(n)}\|>k+1-\frac{1}{n}\to k+1.$$

与定理 2 同理可证定理 3.

定理 4 的证明 (1)若 X^* 不是 Lk-UR，那么由定理 3 知，$\exists\ f\in S^*$ 及 $\varepsilon>0$，对 $\forall n\in N$，有 $f_1^{(n)},\cdots,f_k^{(n)}\in S^*$ 使得 $d(f_{l+1}^{(n)},\mathrm{Span}(f,f_1^{(n)},\cdots,f_l^{(n)}))\geqslant\varepsilon(0\leqslant l<k)$，但 $\|f+f_1^{(n)}+\cdots+f_k^{(n)}\|>k+1-\frac{1}{n^2}$. 对 $f,f_1^{(n)},\cdots,f_k^{(n)}$ 应用[5]中引理 1,2,3，存在 k 维子空间 $Y_n\subset X$ 使得 $m(Y_n)=\inf\{M_{y_n}-m_{y_n};y_n\in S(Y_n)\}\geqslant 2^{-k}\varepsilon^{k+1}/2k\triangleq a(>0)$，其中 $M_{y_n}=\max\limits_{0\leqslant l\leqslant k}f_l^{(n)}(y_n)$，$m_{y_n}=\min\limits_{0\leqslant l\leqslant k}f_l^{(n)}(y_n)(f_0^{(n)}=f)$. 又存在 $x_n\in S$，使 $(f+f_1^{(n)}+\cdots+f_k^{(n)})(x_n)\geqslant\|f+f_1^{(n)}+\cdots+f_k^{(n)}\|-\frac{1}{n^2}>k+1-\frac{2}{n^2}$. 从而 $f(x_n)>1-\frac{2}{n^2}$、$f_l^{(n)}(x_n)>1-\frac{2}{n^2}$，$1\leqslant l\leqslant k$. 故对 $\forall y_n\in S(Y_n)$，$\|x_n+\frac{1}{n}y_n\|\geqslant\max\limits_{0\leqslant l\leqslant k}f_l^{(n)}(x_n+\frac{1}{n}y_n)\geqslant 1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n}M_{y_n}$，同理有 $\|x_n-\frac{1}{n}y_n\|\geqslant 1-\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n}m_{y_n}$. 从而有

$$\|x_n+\frac{1}{n}y_n\|+\|x_n-\frac{1}{n}y_n\|\geqslant 2-\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n}(M_{y_n}-m_{y_n})$$
$$\geqslant 2-\frac{4}{n^2}+m(Y_n)\cdot\frac{1}{n}\geqslant 2-\frac{4}{n^2}+\frac{a}{n}$$
$$\geqslant 2+\frac{1}{n}(\frac{a}{2})(n>\frac{8}{a}).$$

进而当$n>\max(2,\frac{8}{a})$时,$\inf\{\|x_n+\frac{1}{n}y_n\|+\|x_n-\frac{1}{n}y_n\|-2;y_n\in S(Y_n)\}\geqslant\frac{1}{n}(\frac{a}{2})$与$x_n\in F(f,\frac{1}{n})$同时成立!所以$X$不是Lk-US.

反之,若X不是Lk-US,那么$\exists f_0\in S^*$及$\varepsilon>0$,对$\forall n\in N$,有$x_n\in F(f_0,\frac{1}{n})$及$k$维子空间$Y_n\subset X$,使得$\inf\{\|x_n+\frac{1}{n}y_n\|+\|x_n-\frac{1}{n}y_n\|-2;\ y_n\in S(Y_n)\}\geqslant\frac{\varepsilon}{n}$. 对$\forall y_n\in S(Y_n)$,取$f_n,g_n\in S^*$使$f_n(x_n+\frac{1}{n}y_n)=\|x_n+\frac{1}{n}y_n\|$,$g_n(x_n-\frac{1}{n}y_n)=\|x_n-\frac{1}{n}y_n\|$,从而有$f_n(x_n)+\frac{1}{n}\geqslant\|x_n+\frac{1}{n}y_n\|\geqslant 1-\frac{1}{n}$得$f_n(x_n)\geqslant 1-\frac{2}{n}$. 同理有$g_n(x_n)\geqslant 1-\frac{2}{n}$. 并且还有$2+\frac{1}{n}(f_n-g_n)(y_n)\geqslant f_n(x_n+\frac{1}{n}y_n)+g_n(x_n-\frac{1}{n}y_n)=\|x_n+\frac{1}{n}y_n\|+\|x_n-\frac{1}{n}y_n\|\geqslant 2+\frac{\varepsilon}{n}$. 所以$(f_n-g_n)(y_n)\geqslant\varepsilon$. 记$F^*_+(x,\delta)(y)=\sup\{f(y);f\in F^*(x,\delta)\}$,$F^*_-(x,\delta)(y)=\inf\{f(y);f\in F^*(x,\delta)\}$. 由$(f_n-g_n)(y_n)\geqslant\varepsilon$得$F^*(x_n,\frac{2}{n})(y_n)\stackrel{\triangle}{=}F^*_+(x_n,\frac{2}{n})(y_n)-F^*_-(x_n,\frac{2}{n})(y_n)\geqslant\varepsilon$. 故

$$F^*(x_n,\frac{2}{n})(Y_n)\stackrel{\triangle}{=}\inf\{F^*(x_n,\frac{2}{n})(y_n);y_n\in S(Y_n)\}\geqslant\varepsilon. \tag{1}$$

从而必有$f_1^{(n)},\cdots,f_k^{(n)}\in F^*(x_n,\frac{2}{n})$使$d(f_{l+1}^{(n)},[f_0,f_1^{(n)},\cdots,f_l^{(n)}])\geqslant\frac{\varepsilon}{4}(0\leqslant l<k)$.

事实上,因$f_0(x_n)>1-\frac{1}{n}$,所以$f_0\in F^*(x_n,\frac{2}{n})$. 若有$l+1$个元素$f_0,\cdots,f_l^{(n)}\in F^*(x_n,\frac{2}{n})(0\leqslant l<k)$,则必有$f_{l+1}^{(n)}\in F^*(x_n,\frac{2}{n})$,使$d(f_{l+1}^{(n)},[f_0,\cdots,f_l^{(n)}])\geqslant\frac{\varepsilon}{4}$. 如若不然,则对任意$g\in F^*(x_n,\frac{2}{n})$,有$d_l^{(n)}\stackrel{\triangle}{=}d(g,[f_0,\cdots,f_l^{(n)}])<\frac{\varepsilon}{4}$,因仿射张$[f_0,\cdots,f_l^{(n)}]$是有限维的,故有$\beta_0,\cdots,\beta_l\in R^1$且$\beta_0+\cdots+\beta_l=1$,使$\|g-\beta_0f_0-\cdots-\beta_lf_l^{(n)}\|=d_l^{(n)}<\frac{\varepsilon}{4}$. 因$l<k$,所以$H=\bigcap_{i=1}^{l}\ker(f_i^{(n)}-f_0)|_{Y_n}\neq\{0\}$. 若$l=0$,$H=\ker f_0|_{Y_n}$,取$y\in H\cap S$,则$f_0(y)=\cdots=f_l^{(n)}(y)$. 故$|g(y)-f_0(y)|=|(g-\beta_0f_0-\cdots-\beta_lf_l^{(n)})(y)|\leqslant\|g-\beta_0f_0-\cdots-\beta_lf_l^{(n)}\|<\frac{\varepsilon}{4}$. 得$|f_0(y)|-\frac{\varepsilon}{4}<|g((y)|<|f_0(y)|+\frac{\varepsilon}{4}$. 从而$F^*(x_n,\frac{2}{n})(y)\leqslant|f_0(y)|+\frac{\varepsilon}{4}-(|f_0(y)|-\frac{\varepsilon}{4})=\frac{\varepsilon}{2}$. 此与(1)式相矛盾!所以取$f_{l+1}\in F^*(x_n,\frac{2}{n})$,使$d(f_{l+1}^{(n)},[f_0,\cdots,f_l^{(n)}])\geqslant\frac{\varepsilon}{4}(0\leqslant l<k)$.

根据上述讨论，利用归纳法，可取 $f_1^{(n)},\cdots,f_k^{(n)}\in F^*(x_n,\frac{2}{n})$，使 $d(f_{l+1}^{(n)},[f_0,f_1^{(n)},\cdots,f_l^{(n)}])\geqslant\frac{\varepsilon}{4},0\leqslant l<k$. 故 $A(f_0,f_1^{(n)},\cdots,f_k^{(n)})\geqslant d(f_1^{(n)},[f_0])\cdots d(f_k^{(n)},[f_0,f_1^{(n)},\cdots,f_{k-1}^{(n)}])$[7] $\geqslant(\frac{\varepsilon}{4})^k\not\to 0$. 但 $\|f_0+f_1^{(n)}+\cdots+f_k^{(n)}\|\geqslant(f_0+f_1^{(0)}+\cdots+f_k^{(n)})(x_n)\geqslant(k+1)(1-\frac{2}{n})\to k+1$. 所以 X^* 不是 Lk-UR.

同理可证 X 是 k-US 当且仅当 X^* 是 k-UR.

(2) 因为 X^* 是 k-强凸的，从定义 3 可知 X^* 是 k-严格凸的，由[3]知 X 是 k-光滑的．设 $x\in S,\{f_n\}\subset S^*$ 且 $f_n(x)\to 1$，则 $\{f_n\}$ 必是相对紧的(从而 X 有 (S) 性质)．若不然，由[3]中定理 5 的证明可知，$\exists\ \varepsilon>0$，对固定的 $f_0\in\sum(x)$，有 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_l^{(n)}\}(1\leqslant l\leqslant k)$ 使得 $d(f_{l+1}^{(n)},\mathrm{Span}(f_0,f_1^{(n)},\cdots,f_l^{(n)}))\geqslant\varepsilon(0\leqslant l<k,n\in N)$. 由 $f_n(x)\to 1$ 得 $(f_0+f_1^{(n)}+\cdots+f_k^{(n)})(x)\to k+1(n\to\infty)$，从而 X^* 不是 k-强凸的．矛盾！故 X 是 k-强光滑的．

定理 1 的证明　设 X 是 k-强光滑的，若 $\exists\ \varepsilon>0$ 及 $x\in S$，对 $\forall\ n\in N$，有子空间 $Y_n\subset X$，使得 $\inf\{\|x+\frac{1}{n}y\|+\|x-\frac{1}{n}y\|-2;y\in S(Y_n)\}\geqslant\frac{1}{n}\varepsilon$. 取定 $f_0\in\sum(x)$. 与定理 4(1) 同理可证，有 $f_1^{(n)},\cdots,f_k^{(n)}\in F^*(x,\frac{2}{n})$，使 $d(f_{l+1}^{(n)},[f_0,f_1^{(n)},\cdots,f_l^{(n)}])\geqslant\varepsilon/4(0\leqslant l<k)$. 因 X 有(S)性质，由 $f_l^{(n)}(x)\to 1$ 知 $\{f_l^{(n)}\}$ 是相对紧的，不妨设 $f_l^{(n)}\to f_l$，则 $f_l\in\sum(x)(1\leqslant l\leqslant k)$ 且 $d(f_{l+1},[f_0,f_1,\cdots,f_l])\geqslant\frac{\varepsilon}{4}(0\leqslant l<k)$. 故 $f_0,f_1,\cdots,f_k$ 线性无关．从而 x 不是 k-光滑点．矛盾！

反之，若 X 不是 k-光滑的，则有 $x\in S$ 及 $f_1,\cdots,f_{k+1}\in\sum(x)$，使 $f_1,\cdots,f_{k+1}$ 线性无关．因此有 $\varepsilon>0$，使 $d(f_{l+1},\mathrm{Span}(f_1,\cdots,f_l))\geqslant\varepsilon(1\leqslant l\leqslant k)$，与定理 4(1) 同理可证，有 k 维子空间 $Y\subset X$ 使 $\inf\{\|x+\frac{1}{n}y\|+\|x-\frac{1}{n}y\|-2;y\in S(Y)\}\geqslant\frac{1}{n}(\frac{a}{2})$，对 $n>\max(2,\frac{8}{a})$ 成立！$a=2^{-k}\varepsilon^{k+1}/2k$.

若 X 不具(S)性质，仍由[3]中定理 5 的证明知，$\exists\ x\in S,\varepsilon_1>0,f\in\sum(x),\{f_l^{(n)}\}\subset S^*(1\leqslant l\leqslant k)$，使 $d(f_{l+1}^{(n)},\mathrm{Span}(f,f_1^{(n)},\cdots,f_l^{(n)}))\geqslant\varepsilon_1(0\leqslant l\leqslant k)$ 且 $(f+f_l^{(n)}+\cdots+f_k^{(n)})(x)>k+1-\frac{1}{n^2}$ 与定理 4(1) 同理可证，有 k 维子空间 $Y_n\subset X$，使 $\inf(\|x+\frac{1}{n}y_n\|+\|x-\frac{1}{n}y_n\|-2;y_n\in S(Y_n)\}\geqslant\frac{1}{n}(\frac{a'}{2})(a'=2^{-k}\varepsilon_1^{k+1}/2k>0)$.

定理 5 的证明　(1) 因 X^* 是 Lk-US，由定义 2 及定理 1 知 X^* 是 k-强光滑的．从而由[3]知 X 是自反的．故由定理 4(1) 知 X 是 Lk-UR. 反之，X 是 Lk-UR 且自反的，由定理 4(1) 知 X^* 是 Lk-US.

(2) 因 X^* 是 k-强光滑的，从而 X 是自反且 k-严格凸的．若 X 不是 k-强凸的，那么 $\exists\ \varepsilon>0$ 及 $x\in S,f\in\sum(x),x_1^{(n)},\cdots,x_k^{(n)}\in S$ 使 $d(x_{l+1}^{(n)},\mathrm{Span}(x,x_1^{(n)},\cdots,x_l^{(n)}))\geqslant\varepsilon(n\in N,0\leqslant l<k)$. 但 $f(x+x_1^{(n)}+\cdots+x_k^{(n)})>k+1-\frac{1}{n}(\to k+1)$. 从而 $f(x_l^{(n)})\to 1$，由 X^* 有 (S) 性质．故 $\{x_l^{(n)}\}$ 是相对紧的．不妨设 $x_l^{(n)}\to x_l(1\leqslant l\leqslant k)$，则 $f(x)=f(x_1)=\cdots=f(x_k)=$

1 且$(0\leqslant l<k)d(x_{l+1},\mathrm{Span}(x,x_1,\cdots,x_l))\geqslant\varepsilon$，与 X 是 k- 严格凸相矛盾！
反之，若 X 是 k- 强凸且自反的，则由定理 4(2) 知，X^* 是 k- 强光滑的．

定理 6 的证明 若 X 不是 ω- 强凸的，则有 $x\in S,f\in\sum(x),\{x_n\}\subset S$，对 $\forall\, l\in N$，有 $\lim f(x+x_{n_1}+\cdots+x_{n_l})=l+1(n_1,\cdots,n_l\to\infty)$，但$\{x_n\}$不是相对紧的．从而$\exists\ \varepsilon>0$，对$\forall\, n\in N$有 $n_1,\cdots,n_k>n$，使 $d(x_{n_{l+1}},\mathrm{Span}(x,x_{n_1},\cdots,x_{n_k}))\geqslant\varepsilon(0\leqslant l<k)$ 且 $f(x+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})>k+1-\frac{1}{n}$. 故 X 不是 k- 强凸的．

定理 7 的证明 设 $x_n\in S$ 且 $x_n\xrightarrow{W}x\in S$，取 $f\in\sum(x)$. 则 $f(x_n)\to 1$，从而对 $\forall\, l\in N$，有 $f(x+x_n+\cdots+x_{n_l})\to l+1(n_1,\cdots,n_k\to\infty)$. 故$\{x_n\}$是相对紧的．因此 $x_n\to x$，所以 X 有(H) 性质．反之，若 $x\in S$、$f\in\sum(x)$、$\{x_n\}\subset S$ 且 $f(x+x_{n_1}+\cdots+x_{n_l})\to l+1(\forall\, l\in N,n_1,\cdots,n_l\to\infty)$. 因 X 是自反的，所以有子列 $x_{n_l}\xrightarrow{W}y$，故 $f(y)=1,y\in S$；因 X 有(H) 性质，故 $x_{n_l}\to y$. 即$\{x_n\}$是相对紧的，进而 X 是 ω- 强凸的．

推论 1 k- 强凸空间有(H) 性质；CLωR 空间有(H) 性质(见[8])

由定理 4 知，k-US 空间是自反的．

参考文献：

[1] ISTRATESCU V I. *Strict convexity and complex strict convexity* [M]. New York and Basel, 1984.

[2] NAN Chao-xun. *Some Remarks on the k—Uniformly Convexity and k-Uniformly Smoothness* [J]. J. of Math. Res. & Exp., 1990, **10**(1): 47—50.

[3] 南朝勋，王建华. *k-严格凸性与k-光滑性* [J]. 数学年刊 A 辑, 1990, **11**: 321—324.

[4] SULLIVAN F. *A generalization of uniformly rotund Banach Space* [J]. Canad. J. Math., 1979, **31**: 628—646.

[5] 方习年. 关于一致凸性与一致光滑性 [J]. 淮北煤师院学报, 1996, **2**: 13—17.

[6] 方习年. *k-UR* 空间的等价定义 [J]. 淮南矿业学院学报, 1996, **3**: 77—81.

[7] BERNAL J and SULLIVAN F. *Muli-dimenional volumes, supper reflexivily and mormal structure in Banach Space* [J]. Illinois J. Math, 1983, **27**: 501—515.

[8] 王建华，张子厚. (C-K)性质的特征 [J]. 数学物理学报, 1997, **17**(3): 280—283.

On k- Uniform Convexity and k- Uniform Smoothness of Banach Spaces

FANG Xi-nian

(Anhui Institute of Mechanical and Electrical Engineering, Wuhu 241000, China)

Abstract: In this paper, Using uniform and simple form we treat or define (locally) k-uniformly convex and k-strongly convex and ω-strong convex, and give (locally) k-uniform smoothness in Banach space. We discuss the relationship among them and their properties.

Key words: k-uniformly smooth; k-strong smooth; ω-strongly convex.