数学研究与评论
第六卷 第三期

链积中参数对称的反链*

查 晓 亚

（中南民族学院数学系）

设k_i为正整数，$i=1,2,\cdots,n$，直积$S=I_{k_1}\times I_{k_2}\times\cdots\times I_{k_n}=\{X=(x_1,x_2,\cdots,x_n, 0\le x_i\le k_i\}$叫做链积，对任意的X，Y∈S，$X<Y\Leftrightarrow x_i\le y_i$，$i=1,2,\cdots,n$．S在偏序“<”下为有限偏序集．$r(x)=\sum_i x_i$原S的秩函数，$S_k=\{X, r(X)=k\}$，$W_k=|S_k|$叫做S的Whitney数记$K=\sum_{i=1}^n k_i$，$k_1=k_2=k_n=1$时，S即为布尔代数$B_n$．

设$\mathscr{F}$为S中的反链，$\mathscr{F}_i=\mathscr{F}\cap S_i$，$|\mathscr{F}_i|=p_i$，$\{p_i, i=0,1,\cdots,n\}$叫做反链$\mathscr{F}$的参数，若成立

$$\sum_i p_i/W_i\le 1, \tag{1}$$

称$\mathscr{F}$具有LYM（Lubell-Yamamoto-Meshalkin）性质，形如（1）的不等式称为LYM型不等式．当$k_1=k_2=\cdots=k_n=1$时，很多文献讨论了$\mathscr{F}$在添加某些限制条件后具有的性质及$|\mathscr{F}|$的最大值，而对一般的情形，类似的讨论尚不多[1,2,3]．

对于链积S中的反链$\mathscr{F}$，若$p_i=p_{k-i}$，称$\mathscr{F}$为参数对称反链，本文证明了当$\mathscr{F}$为参数对称反链时，若至少存在某个l，使得k_l为奇数，则$\mathscr{F}$满足LYM型不等式，并求得$|\mathscr{F}|$的最大值，同时，得到了关于链积Whitney数的一个恒等式．

由于带余反链（$X=(x_1,\cdots,x_n)$与$\overline{X}=(k_1-x_1,\cdots,k_n-x_n)$同属反链$\mathscr{F}$）是参数对称反链的特款，故本文关于带余反链的结果改进了Gronau在〔3〕中所得的$\mathscr{F}$满足的LYM型不等式（除去所有的k_i都是偶数和$k_1\le k_2\le\cdots\le k_n$，$k_1$为奇数的情形），并在形式上改进了〔3〕中所得的$|\mathscr{F}|$的最大值．

主要定理如下：

定理1 设$S=I_{k_1}\times I_{k_2}\times\cdots\times I_{k_n}$为链积，$\mathscr{F}$是S中参数对称反链，即$p_i=p_{k-i}$，$K=\sum_i k_i$，若至少存在某个$l$使得$k_l$为奇数，则

（i）存在具有相同参数的反链，其中所有的具有秩$i\,(i<\frac{k}{2})$和$\frac{1}{2}p_{\frac{k}{2}}$个秩为$\frac{k}{2}$（$k$为偶数时）的元都不小于

$$(0,\cdots,0,\frac{k_l+1}{2},0,\cdots,0),$$

而所有的秩$j\,(j>\frac{k}{2})$和$\frac{1}{2}p_{\frac{1}{2}}$个秩为$\frac{k}{2}$（$k$为偶数时）的元都不大于

$$(k_1,\cdots,k_{l-1},\frac{k_l-1}{2},k_{l+1},\cdots,k_n);$$

* 1984年5月5日收到．

(ii) $$\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]} p_i / N_{i-\frac{k_l+1}{2}} + \sum_{i=[\frac{k}{2}]+1}^{k} p_i / N_i \le 2;$$

其中 N_i 为 $S_1 = I_{k_1} \times \cdots \times I_{k_{l-1}} \times I_{(k_l-1)/2} \times I_{k_{l+1}} \times \cdots \times I_{k_n}$ 的第 i 个 Whitney 数.

当 $i > k - \dfrac{\min\{k_j\}+1}{2}$ 和 $i < \dfrac{\min\{k_j\}+1}{2}$ 时，$N_i = 0$，$j = 1, 2, \cdots, n$.

(iii) $$|\mathscr{F}| = \sum_{i=0}^{k} p_i \le 2N_{[\frac{k+1}{2}]}.$$

定理 2 S 和 S_1 同定理1，以 $\{W_i\}$ 和 $\{N_i\}$ 分别记 S 和 S_1 的 Whitney 数，若 $k = \sum\limits_i k_i$ 为偶数，且至少存在某个 l 使得 k_l 为奇数，则

$$W_{\frac{k}{2}} = 2N_{\frac{k}{2}}. \qquad (2)$$

当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 1$，$n$ 为偶数时，(2) 式即为恒等式 $\binom{n}{\frac{n}{2}} = 2\binom{n-1}{\frac{n}{2}}$.

定理3 S 和 S_1 同定理1，$\mathscr{F}$ 是 S 中的带余反链，若至少存在 l，使 k_l 为奇数，则定理 1 中的 (i)，(ii)，(iii) 成立.

注 1° 当 $k_1 \le k_2 \le \cdots \le k_n$，$k_1$ 为奇数时，定理3 即为 Gronau 所得.

2° 设 $\mathscr{F}$ 为带余反链，由 Gronau 所得的结果和定理 3 便有

$|\mathscr{F}| \le W_{\frac{k}{2}}$，$k$ 为偶数；　$|\mathscr{F}| \le 2N_{\frac{k}{2}}$，$k$ 为奇数.

参 考 文 献

[1] G. F. Clements, H.-D. O. F. Gronau, On maximal antichains containing no set and its complement. Discrete Math.33 (1981), 239—247.

[2] G. F. Clements, An existence theorem for antichains, J.Combinatorial Theory, ser. A 22 (1977), 368—371.

[3] H.-D. O. F. Gronau, On maximal antichains lonsisting of sets and their complements, J. Combinatorial Theory, ser.A 29 (1980), 370—375.

[4] G. F. Clements, B. Lindstrom, A generalization of a combinatorial theorem of Macaulay, J.Combinatorial Theory, 7 (1969), 230—238.

[5] G. F. Clements, On existence of distinct representative sets for sub-sets of a finite seto, Canad.J. Math., 12 (1970), 1284—1292.