第21卷第2期 数学研究与评论 Vol. 21 No. 2
2001年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2001

左连续环中若干链条件的等价性*

陈淼森
(浙江师范大学数学系，浙江 金华 321004)

摘　要：(1) 设 R 是左连续环，则 R 是左 Artin 环当且仅当 R 满足左限制有限条件当且仅当 R 关于本质左理想满足极小条件当且仅当 R 关于本质左理想满足极大条件. 同时给出一个左自内射环是 QF 环的充要条件；(2) 证明了左 Z_1-环上的有限生成模都有 Artin-Rees 性质.

关键词：左连续环；左自内射环；左 Z_1-环.
分类号：AMS(1991) 16D50,16W50/CLC O153.3
文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2001)02-0264-03

Extending 模(包括连续模和自内射模)是当今被广泛研究的一类模[1,2]. 对连续环和自内射环，Y. Utumi，N. V. Dung D. V. Huynh and R. Wisbauer 等已有许多研究[3,4]. 本文在讨论一个左自内射环中几种链条件之间关系的同时，给出了一个左自内射环是 QF 环的充要条件. 本文最后证明了左 Z_1-环上有限生成模都有 Artin-Rees 性质.

本文所涉及的环都是指有恒等元的结合环，R-模通常是指左酉 R-模. $\mathrm{Soc}(_RM)$表示左 R-模 M 的基座，$J(R)$表示环 R 的 Jacobson 根. 一个左(或右)Artin 左自内射环称为 QF 环. 环 R 称为左连续环是指 R 的每个左理想是 R 的一个直和项的本质左理想，并且若 R 的左理想同构于环 R 的一个直和项，则自身也是 R 的直和项. 左 R-模 M 称为满足限制极小条件(限制有限条件)，是指对 M 的任意本质子模 K，M/K 是 Artin(有有限长度)模. 显然 M 满足限制有限条件一定满足限制极小条件.

引理 1[1]　R-模 M 关于本质子模满足极小条件(极大条件)当且仅当 $M/\mathrm{Soc}(M)$是 Artin(Noether)模.

引理 2　若环 R 满足右(左)限制有限条件，则 $R/\mathrm{Soc}(R_R)$是右(左)Noether 环.

证明　设 $A\subseteq B$ 是 R 的右理想，使得 A 是右 R-模 B 的本质子模，那么 R 中存在一个满足 $A\cap C=0$ 的极大的右理想 C，使得 $A\oplus C$ 是 R 的本质右理想. 于是 $B\cap C=0$，因此 $R/(A\oplus C)$ 有有限长度. 因为 B/A 作为右 R-模同构于 $(B\oplus C)/(A\oplus C)$，所以 B/A 有有限长度. 下证 $R/\mathrm{Soc}(R_R)$ 的每个右理想是有限生成的. 令 $S=\mathrm{Soc}(R_R)$，设 I 是 R 的包含 S 的右理想，H 是 R 的满足 $S\cap H=0$ 和 $H\subseteq I$ 的极大的右理想，那么 $S\oplus H$ 作为右 R-模是 I 的本质

* 收稿日期：1998-09-28
基金项目：浙江省教委科研基金资助课题(990271)
作者简介：陈淼森(1956-)，男，浙江师范大学副教授.
E-mail：miaosen@mail.jhptt.zj.cn

子模. 由上述知，$I/(S\oplus H)$ 有有限长度. 证明 H 有有限 Goldie 维数. 假设 H 中存在一个右理想的无限直和 $X=J_1\oplus J_2\oplus\cdots$,其中 J_i 是包含在 H 中的非零右理想. 因为 $H\cap S=0$，所以对所有 $i\geqslant 1$，存在右理想 $K_i\subseteq J_i$，使得 K_i 是右 R- 模 J_i 的真本质子模，那么 $Y=K_1\oplus K_2\oplus\cdots$ 是 X 的本质子模，而由上述知，X/Y 有有限长度，但是 $X/Y\cong X_1/Y_1\oplus X_2/Y_2\oplus\cdots$. 故与 X/Y 有有限长度矛盾. 所以 H 有有限 Goldie 维数. 由此知，存在 R 的一个有限生成右理想 U 使得 U 是 H 的本质子模，而由上述知，H/U 有有限长度，所以 H 是有限生成的，于是可得 I/S 是有限生成的，因此 R/S 是右 Noether 环.

定理 1 设 R 是左连续环，则下列条件等价：

1) R 是左 Artin 环；

2) R 关于本质左理想满足极小条件；

3) R 满足左限制有限条件；

4) R 关于本质左理想满足极大条件.

证明 1)⇒2). 显然.

2)⇒3). 由引理 1 知 $R/\mathrm{Soc}({}_RR)$ 是左 Artin 环，所以 $R/\mathrm{Soc}({}_RR)$ 有有限长度. 任取 R 的一个本质左理想 K，因为 $\mathrm{Soc}({}_RR)\subseteq K$，所以 $R/\mathrm{Soc}({}_RR)$ 的同态象 R/K 有有限长度，即 R 满足左限制有限条件.

3)⇒4). 由引理 2 知，$R/\mathrm{Soc}({}_RR)$ 是左 Noether 环，再由引理 1 知，R 关于本质左理想满足极大条件.

4)⇒1). 由[1,命题 18.19]得 R 是左 Artin 环.

左自内射环何时成为 QF 环,在附加若干左或右侧链条件下得到了一些结果[1]. 在此给出左自内射环是 QF 环的一个充要条件.

定理 2 设 R 是左自内射环，则 R 是 QF 环当且仅当 R 满足左(右) 限制有限条件.

证明 只考虑左的情形. 必要性是明显的. 设 R 满足左限制有限条件,于是由引理 2 和引理 1 知，R 关于本质左理想满足极大条件，再由[1,命题 18.19] 即知，R 是 QF 环.

P. F. Smith[5] 称环 R 是左 Z_1- 环，是指每个循环左 R- 模是一个投射模和一个有有限长度模的直和. 同时证明了 R 是左 Z_1- 环当且仅当对 R 的每个左理想 E,存在 R 的幂等元 e 使 $E\subseteq Re$，且左 R- 模 Re/E 有有限长度. 由此易知，左 Z_1- 环满足左限制有限条件.

定理 3 设 R 是左 Z_1- 环，则对每个有限生成左 R- 模 M 和子模 K，有

1) 存在整数 $n>0$，使得 $K\cap J^nM\subseteq JK$，其中 $J=J(R)$ 是环 R 的 Jacobson 根.

2) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(K+J^nM)=K$.

证明 由[1,定理 19.7]知，R 是左 Noether 环，又因为 R 满足左限制有限条件，所以 R 满足左限制极小条件. 于是任意有限生成左 R- 模 M 是 Noether 的. 下证 M 满足限制极小条件. 设 K 是 M 的本质子模，由于限制极小条件对商模继承，而 M 有限生成，不妨设 M 是有限生成自由模，于是存在整数 $n>0$，使 $M=R_1\oplus R_2\oplus\cdots\oplus R_n$,其中 $R_i\cong R$，$i=1,2,\cdots,n$. 令 $L=(K\cap R_1)\oplus(K\cap R_2)\oplus\cdots\oplus(K\cap R_n)$. 因为 $K\cap R_i$ 是 R_i 的本质子模，而 $R_i(\cong{}_RR)$ 是满足左限制极小条件，即 $R_i/(K\cap R_i)$ 是左 Artin 的，因为 $L\subseteq K$，于是 M/K 是 M/L 的同态象，并且 $M/L\cong M/(K\cap R_1\oplus K\cap R_2\oplus\cdots\oplus K\cap R_n)\cong R_1/(K\cap R_1)\oplus R_2/(K\cap R_2)\oplus\cdots\oplus$

$R_n/(K\cap R_n)$. 所以 M/L 是 Artin 的，所以 M/K 是 Artin 的，即 M 满足限制极小条件.

1). 先设 L 是 M 的本质子模，因为 M/L 是 Artin 的，所以降链 $L+JM\supseteq L+J^2M\supseteq\cdots$ 有限，即存在整数 $m>0$，使得 $L+J^mM=L+J^{m+1}M$. 由 Nakayama 引理知，$J^mM\subseteq L$. 所以 $L\cap J^{m+1}M\subseteq L\cap JL\subseteq JL$.

再设 K 是 M 的任一子模，则存在 M 的子模 N，使得 $L=K\oplus N$ 是 M 的本质子模，于是由上知，存在整数 $n>0$，使得 $L\cap J^nM\subset JL$. 由此可得 $K\cap J^nM\subset JK$.

2). 设 K 是 M 的任意子模，取 $a\in\bigcap_{n=1}^{\infty}(K+J^nM)$，令 $F=Ra+K$，则 F 是 M 的子模. 由 1)知，存在整数 $n>0$，使 $F\cap J^nM\subseteq JL$. 因为 $a\in K+J^nM$，设 $a=c+b$，$c\in K$，$b\in J^nM$，所以 $a-c=b\in F\cap J^nM\subseteq JF\subseteq Ja+K$，于是存在 $u\in J$ 使得$(1-u)a\in K$，由 Jacobson 根的性质知，$1-u$ 是 R 的单位，所以 $a\in K$. 因此，$\bigcap_{n=1}^{\infty}(K+J^nM)=K$.

推论 设 R 是左 Z_1-环，则 R 满足 Jacobson 猜想：$\bigcap_{n=1}^{\infty}J^n=0$.

证明 在定理 5 中取 $M=R$，$K=0$ 即得.

作者在访问期间，对佟文廷教授给予的指导谨致衷心感谢.

参考文献：

[1] DUNG N V, HUYNH D V, SMITH P F. et al. *Extending Modules* [J]. Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman Harlaw, 1994.

[2] SANTA D C, SMITH P F. *Extending modules which are direct sums of injective modules and semisimple modules* [J]. Comm. in Alg., 1996, **24**: 3641—3651.

[3] UTUMI Y. *On continuous rings and self-injective rings* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **118**: 158—173.

[4] UTUMI Y. *Self-injective rings* [J]. J. Alg., 1967, **6**: 56—64.

[5] SMITH P F. *Some rings which are characterised by their finitely generated modules* [J]. Quent. J. Math. Oxford, 1978, **29**: 101—109.

Equivalence of Some Conditions in Left Continuous Rings

CHEN Miao-sen

(Zhejiang Normal University, Jinhua 312004, China)

Abstract: In this paper, we obtain following results:

1). Let R be a left continuous ring, then R be a left Artinian iff R satisfies left restricted finite condition iff R satisfies DCC on essential left ideals iff R satisfies ACC on essential left ideals. In addition we give a sufficient and necessary condition under which a left self-injective ring is a QF ring.

2). It is proved that for a left Z_1-ring R, if M is a finitely generated R-module, then M satisfies Artin-Rees property.

Key words: left continuous ring; left self-injective ring; left Z_1-ring,