文章编号: 1000-341X(2006)03-0627-08 **文献标识码**: **A**

迹非零几乎可约分块布尔矩阵的幂敛指数

蒋志明[1], 王宗尧[1], 柳柏濂[2]
(1. 华东理工大学数学系, 上海 201512; 2. 华南师范大学数学系, 广东 广州 510631)
(E-mail: jzhiming@jsol.net)

摘 要: 设 $H_n(d)$ 是恰含 d 个正对角元的 n 阶几乎可约分块布尔矩阵的集合, $1\le d\le n$, 对任何矩阵 $A\in H_n(d)$, 本文证明了

$$k(A)\le\begin{cases}(n-d-2)^2+2, & 1\le d\le s_n\\ 2n-d-1, & s_n\le d_n\le n\end{cases}$$

其中 $s_n=\left\lfloor\frac{2n-5-\sqrt{4n-3}}{2}\right\rfloor$, 同时刻画了 $H_n(d)$ 中幂敛指数达到最大值的极矩阵.

关键词: 布尔矩阵; 幂敛指数; 上确界; 极矩阵.
MSC(2000): 05C50
中图分类: O157.5

1 引 言

设 B_n 是 n 阶布尔矩阵的集合. 由于 B_n 在矩阵布尔乘法下构成一个 2^{n^2} 阶有限半群, 因此, 对任意 $A\in B_n$, 存在一个最小的非负整数 k, 使 $A^k=A^{k+p}$ 对某个正整数 P 成立, 这样的 k 称为 A 的幂敛指数, 记作 $k(A)$, 而称满足条件 $A^{k(A)}=A^{k(A)+p}$ 的最小正整数 P 为 A 的周期, 记作 $P(A)$. IB_n 是 n 阶不可约方阵集合, RB_n 是 n 阶可约布尔方阵的集合, P_n 是 n 阶本原方阵的集合, 当 $A\in P_n$ 时, $P(A)=1$, 此时记 $k(A)$ 为 $\gamma(A)$, 称为 A 的本原指数. 对于任意本原极小强连通有向图 D, 文 [7] 已证, $6\le\gamma(D)\le n^2-4n+6$. 文 [7] 讨论的极小强连通有向图显然不含环的, 而本文讨论的极小强连通有向图允许有环, 从而形成含 d 个环极小强连通有向图类 NP_n(为 n 阶本原几乎可约布尔方阵的集合), NB_n 为 n 阶几乎可约布尔方阵的集合, ND_n 为 n 阶几乎可约分块布尔方阵 (其伴随有向图 $D(A)$ 的强连通分支称为拟极小强连通的, 即分支中允许有环, 但去掉任何一条弧就不连通了) 集合, 即对任何 $A\in ND_n$, A 一定置换相似于下述形式的可约分块三角方阵

$$\begin{pmatrix}A_{11}&&&\\A_{12}&A_{22}&&\\\vdots&&\ddots&\\A_{m1}&A_{m2}&\cdots&A_{mm}\end{pmatrix},\tag{1.1}$$

其中每个对角块 $A_{ii}(i=1,2,\cdots,m)$ 均是几乎可约方阵, 它们相应于 A 的伴随有向图 $D(A)$ 的极小强连通分支 $D(A_{ii})(i=1,2,\cdots,m)$.

收稿日期: 2003-09-08
基金项目: 江西省自然科学基金

在本文中, (v_i, v_j) 表示从 v_i 到 v_j 的弧，若 $v_i = v_j$, 则此弧为环, v_i 称为环点. 对 $D(A)$ 中任一极小强连通分支 $D(A_{ii})$ 中任一条弧 (除了环以外), 删去它后, $D(A_{ii})$ 就不连通了.

记 $D_n(d) = \{A|A \in B_n, A$ 恰有 d 个正对角元, $1 \le d \le n\}$,

$$H_n(d) = \{A|A \in D_n(d) \text{ 且 } A \in ND_n\}.$$

矩阵 A 和 $\pi A\pi^{-1}$ (π 是置换方阵) 常称为置换相似，记为 $A \approx \pi A\pi^{-1}$. 对幂敛指数问题研究，首要任务是确定最大值及达到最大值所有矩阵.

关于 $k(A)$, 迄今已有下列结果.

定理 A[2] 对任意的 $A \in ND_n$, $k(A) \le (n-2)^2+2$, $k(A) = (n-2)^2+2$ 当且仅当在置换相似意义下, $A = (a_{ij})$, 其中 $j = i+1$, $a_{ij} = 1$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$, $a_{n,3} = 1$, $a_{n-1,1} = 1$, 其余 $a_{ij} = 0$.

定理 B 对任意的 $A \in H_n(d)$ 且 $A \in P_n$, $k(A) \le 2n-d-1$, 且上述等号是可以达到的.

证明 对 A 的伴随有向图 $D(A)$ 中任一点 v_i, 至多走长为 $n-d$ 的路遇到一个环，而由此环点再最多走长 $n-1$ 的路到达任一点 v_j, 于是 $\gamma(v_i, v_j) \le (n-d)+(n-1) = 2n-d-1$, 从而 $\gamma(A) = \gamma(D(A)) = \max_{1\le i,j\le n} \gamma(v_i, v_j) \le 2n-d-1$.

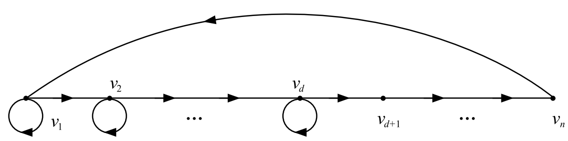

图 1

经验证, $\gamma(v_{d+1}, v_n) = 2n-d-1 = \gamma(D)$. □

定理 C[2] 对任意的 $A \in ND_n$ 且 $A \notin NB_n$, $k(A) \le (n-3)^2+3$, $k(A) = (n-3)^2+3$ 当且仅当在置换相似意义下 $A = (a_{ij})$, 其中 $j = i+1$, $a_{ij} = 1$, $i = 1, 2, \cdots, n-3$； $a_{n-2,1} = 1$, $a_{n-1,3} = 1$, $a_{n,1} = 1$, 其余 $a_{ij} = 0$.

自 1970 年以后的近二十年间，对可约布尔方阵幂敛指数的研究几乎没有什么进展, [1] 从考察可约矩阵对应的一般有向图着手, 创造性地引进局部幂敛指数与局部周期, 巧妙地得到了一个一般性上界, $k(D) \le n + s_0(n_0/f_0 - 2)$, 其中 s_0 是 D 的各强分支中各最小圈长的最大者, n_0 是 D 的最大强分支中所含点数, f_0 是 D 的所有圈长的最大公约数. 从此，开创了研究可约布尔矩阵的幂敛指数的研究，文 [4],[5] 和 [6] 研究了迹非零布尔矩阵幂敛指数的上界和极阵.

正如 [3] 中所述, 对于一些特殊类的一般布尔矩阵的幂敛指数的研究刚刚开始. 本文在 [3],[4] 和 [5] 的基础上得到了以下进一步一般性结果.

对任意的 $A \in H_n(d)$, 有

$$k(A) \le \begin{cases} (n-d-2)^2+2, & 1 \le d \le s_n \\ 2n-d-1, & s_n \le d \le n, \end{cases}$$

其中 $s_n = \left\lfloor \frac{2n-5-\sqrt{4n-3}}{2} \right\rfloor$.

并且对上述达到上界的矩阵作出完全刻画.

2 $H_n(d)$ 的幂敛指数的上界

我们知道， n 阶布尔矩阵的集合 B_n 和以 $\{1,2,\cdots,n\}$ 为顶点集的 n 阶有向图集合之间可建立一一对应 [1]. 我们称 $A\in B_n$ 所对应的有向图 $D(A)=(V,E)$ 为 A 的伴随有向图. 其中 V,E 分别为 D 的顶点集和弧集. 在矩阵与图的这种对应下，对不可约矩阵，几乎可约矩阵，本原矩阵，几乎可约本原矩阵的研究事实上就是分别对强连通有向图，极小强连通有向图，本原有向图，极小强连通本原有向图的研究. 从而，针对 $H_n(d)$ 的研究，可以转化为对恰含 d 个环点的并只有极小强连通分支的有向图的研究.

定理 1 设 A 是具有形式 (1.1) 的矩阵，对任意 $A\in H_n(d)$, 有

$$k(A)\le\begin{cases}(n-d-2)^2+2, & 1\le d\le s_n,\\ 2n-d-1, s_n\le d_n\le n,\end{cases}$$

其中 $s_n=\left\lfloor\frac{2n-5-\sqrt{4n-3}}{2}\right\rfloor$

证明 设 $H_n(d)$ 的任一矩阵为 A, 其伴随有向图为 D, 则有

情况 1 D 为含 d 个环的极小强连通有向图，则由定理 B 知， $k(D)\le 2n-d-1$.

情况 2 (1) D 为含 d 个环的非强连通 (但每一个分支均是极小强连通) 有向图

(2) 对于 D 的某一个分支 $D_i(n_i=|V(D_i)|)$ 是含 d_i 个环，则 $k(D_i)\le 2n_i-d_i-1$.

(3) 若 D_j 不含环，则由 [2] 中定理 1 有 $k(D_j)\le(n_j-2)^2+2$.

(4) 由于 D_i 中只含有 d_i 个环，故 $n_i\le n-(d-d_i)=n+d_i-d$, 从而

$$k(D_i)\le 2(n+d_i-d)-d_i-1=2n+(d_i-d)-d-1\le 2n-d-1\ \ (d_i\le d).$$

(5) 因 D_j 不含环，故 $n_j\le n-d$, 故 $k(D_j)\le(n-d-2)^2+2$.

(6) 取 $k(v_i,v_j)=k(D)$.

$W(v_i,v_j)$ 为 v_i 到 v_j 所有途径集合， $P(v_i,v_j)\in W(v_i,v_j)$ 所有由 v_i 到 v_j 的途径所经过的极小强连通分支记为 $D_1,D_2,\cdots,D_r$.

情形 2.1 v_i 到 v_j 的所有途径不经过任一环点，此时设所有这些连通分支 $D_1,D_2,\cdots,D_r$ 中的点所组成导出子图为 D_0, 则 $n_0\le n-d$, 由 [2] 中推论 1 有

$$k(D_0)\le(n_0-2)^2+2\le(n-d-2)^2+2,$$

所以 $k(D)=k(v_i,v_j)\le k(D_0)\le(n-d-2)^2+2$.

情形 2.2 $W(v_i,v_j)$ 中存在某一条由 v_i 到 v_j 的途径至少经过一个环点.

$$v_i=u=u_1\quad v_j=v=v_r.$$

设 $P(u,v)=W(u_1,v_1)+v_1u_2+W(u_2v_2)+v_2u_3+\cdots+W(u_r,v_r)$, 其中 $W(u_i,v_i)$ 为 $P(u_i,v_j)$ 在 D_i 中的途径,

设 D_i 中有环点为 d_i 个，不妨设 D_1 中有 d_1 个环点，则从 u 出发，至多走 n_1-d_1 的路长与某环点 x 相接触，然后再从 x 出发，至多走 n_1-1 的路长到达 v_1,

$$\begin{aligned}
\text{从而 } u \text{ 到 } v \text{ 的路长} &\le \sum_{i=1}^{r}(n_i-1)+(r-1)+(n_1-d_1)\\
&=\sum_{i=1}^{r}n_i-r+r-1+n_1-d_1\quad (n_1\le n-(d-d_1))\\
&\le n-1+n_1-d_1\le n-1+n-(d-d_1)-d_1\\
&=2n-d-1,
\end{aligned}$$

即 $k(v_i,v_j)\le 2n-d-1$.

情况 3　综合情况 1,2 知

$$\begin{aligned}
k(v_i,v_j)&\le \max\left\{(n-d-2)^2+2,2n-d-1\right\}\\
&\le\begin{cases}(n-d-2)^2+2, & 1\le d\le s_n\\ 2n-d-1, & s_n<d\le n\end{cases}
\end{aligned}$$

其中

$$s_n=\left\lfloor\frac{(2n-5)-\sqrt{4n-3}}{2}\right\rfloor.$$

定理 2　上述结果是容易得到的，即当 $d\ge\left\lfloor\frac{(2n-5)-\sqrt{4n-3}}{2}\right\rfloor$ 时，$k(A)=2n-d-1$ 可以达到，当 $1\le d\le\left\lfloor\frac{(2n-5)-\sqrt{4n-3}}{2}\right\rfloor$ 时，$k(A)=(n-d-2)^2+2$ 可以达到.

证明　设

$$A_1=\left(\begin{array}{c|c}
\overbrace{\begin{array}{cccccc}0&1&&&&\\ \cdot&\cdot&\cdot&&&\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&&\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\\ 1&0&0&\cdot&\cdot&1\\ 0&0&1&\cdot&\cdot&0\end{array}}^{n-d} & 0\\ \hline
0 & \left.\begin{array}{ccc}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{array}\right\}d
\end{array}\right),$$

$$A_2=\left(\begin{array}{c|c}
\overbrace{\begin{array}{ccccc}0&1&&&\\ &\cdot&\cdot&&\\ &&\cdot&\cdot&\\ &&&\cdot&1\\ &&&\cdot&0\end{array}}^{n-d} & \begin{array}{ccccc}&&&&0\\&&&0&\\&&0&&\\&0&&&\\1&&&&\end{array}\\ \hline
\begin{array}{ccccc}&&&&0\\&&&0&\\&&0&&\\&0&&&\\1&&&&\end{array} & \left.\begin{array}{ccccc}1&1&&&\\&\cdot&\cdot&&\\&&\cdot&\cdot&\\&&&\cdot&1\\&&&\cdot&1\end{array}\right\}d
\end{array}\right),$$

易验证 $k(A_1)=(n-d-2)^2+2$, $k(A_2)=2n-d-1$.

定理 3　若 $1\le d\le\frac{(2n-5)-\sqrt{4n-3}}{2}$, $A\in H_n(d)$, 则 $k(A)=(n-d-2)^2+2$, 当且仅当

$$A\approx\left\{\begin{array}{cccccccccccccc}
1 &&&&&&&&&&&&& \\
& 1 & * &&&&&&&&&&& \\
& * & L &&&& 0 &&&&& 0 && \\
&&& 1 &&&&&&&&&& \\
&&&& 0 & 1 &&&&&&&& \\
&&&&& L & L &&&&&&& \\
&& * &&&& L & L &&&& 0 && \\
&&&& 1 & L & L & L & 1 &&&&& \\
&&&& 0 & 0 & 1 & L & 0 &&&&& \\
&&&&&&&&& 1 &&&& * \\
&&&&&&&&&& L &&& \\
&& * &&&& * &&&&& L && \\
&&&&&&&&&&&& L & \\
&&&&&&&&& * &&&& 1
\end{array}\right\}\quad(2.1)$$

其中 (*) 部分的每个元素可为 1 或 0.

证明　(1) 设 A 置换相似于 (2.1) 式右边的分块矩阵,

记

$$B=\begin{pmatrix}
0 & 1 &&&&& \\
0 & 0 &&&&& \\
\cdots && \cdots &&&& \\
\cdots &&& \cdots &&& \\
\cdots &&&& \cdots && \\
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}_{(n-d)\times(n-d)}.$$

由定理 A, $k(B)=(n-d-2)^2+2$, 于是

$$k(A)\ge k(B)=(n-d-2)^2+2$$

另一方面，由定理 1 可知 $k(A)\le(n-d-2)^2+2$, 故 $k(A)=(n-d-2)^2+2$.

(2) 若 $A\in H_n(d)$, 且 $k(A)=(n-d-2)^2+2$, 若 $A\in H_n(d)\cap NB_n$, 则 $A\in H_n(d)\cap NP_n$, 由定理 B, $k(A)\le 2n-d-1<(n-d-2)^2+2$, 矛盾．故设 $A\in H_n(d)\cap ND_n$, 不妨设 A 具有 (1.1) 的形式 $(m\ge 2)$.

把 $D(A)$ 的属于不同强连通分支的点组成的点对分成如下三类:

$w_1=\{(u,v)|u,v$ 属于不同强连通分支且存在某条由 u 到 v 的至少经过一个环点的途径 $\}$

$w_2=\{(u,v)|u,v$ 属于不同强连通分支且存在由 u 到 v 的途径，但所有由 u 到 v 的途径均不经过所有环点 $\}$

$w_3=\{(u,v)|u,v$ 属于不同强连通分支且 u 到 v 无环点 $\}$

结论 1 必有某个 $i, 1 \le i \le m$, 使得 $D(A_{ii})$ 没有环点. 否则，设 $i = 1, 2, \cdots, m, D(A_{ii})$ 都含环点，设 $D(A_{ii})$ 中均含 d_i 个环点， $1 \le d_i \le d$, 由定理 B,

$$\begin{aligned} k(A_{ii}) &\le 2|V(D(A_{ii}))| - d_i - 1 \le 2(d_i + n - d) - d_i - 1 \\ &= 2n - d - 1 + (d_i - d) \le 2n - d - 2 \quad (d_i < d). \end{aligned}$$

取 $h = 2n - d - 2$, 则 $A_{ii}^h = A_{ii}^{h+p}$, p 是 A 的周期，此时 $P = 1$. 设

$$A^h = \begin{pmatrix} A_{11}^h & & & \\ C_{21} & A_{22}^h & & \\ \cdots & & & \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots & A_{mm}^h \end{pmatrix},$$

$$A^{h+p} = \begin{pmatrix} A_{11}^{h+p} & & & \\ D_{21} & A_{22}^{h+p} & & \\ & & \cdots & \\ D_{m1} & D_{m2} & \cdots & A_{mm}^{h+p} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

我们分两种情形讨论：

情形 1. 若 A_{ij} 全为 $0\,(i \ne j)$, 则 $C_{ij} = D_{ij} = 0$, 从而 $A^h = A^{h+p}$.

情形 2. 若 A_{ij} 不全为 $0\,(i \ne j)$, 此时只需考虑不在 $D(A)$ 的同一强连通分支中的点对.

情形 2.1. 若 $(u, v) \in w_3$, 则 $k(u, v) = 0$.

情形 2.2. 若 $(u, v) \in w_2$, 由假设 $w_2 = \varphi$, 则 $k(u, v) = 0$.

情形 2.3. 若 $(u, v) \in w_1$, 设由 u 到 v 的某条途径 $w(u, v)$ 经过某环点，它所经过的极小强连通分支分别为 $D(A_{t_1t_1}), D(A_{t_2t_2}), \cdots, D(A_{t_st_s})$. 在 $D(A_{t_it_i})$ 中经过途径为 $w(u_i, v_i)$, 于是

$$w(u, v) = w(u_1, v_1) + v_1u_2 + w(u_2, v_2) + v_2u_3 + \cdots + w(u_s, v_s) \cdots + w(u_s, v_s),$$

其中 $u_1 = u, v_s = v$.

设这条途径经过 $D(A_{t_jt_j})$ 中的环点，再设 $D\left(A_{t_jt_j}\right)$ 中环点个数为 d_{t_j}, $D\left(A_{t_jt_j}\right)$ 阶数为 n_{t_j}.

由于每个 $D(A_{t_it_i})$ 中由 u_i 到 v_i 有长度 $\le |V(D_{t_it_i})| - 1$ 的路，而在 $D\left(A_{t_jt_j}\right)$ 中，先从 u_j 出发至多经长度为 $\left|V\left(D\left(A_{t_jt_j}\right)\right)\right| - d_{t_j}$ 的路必与某个环点接触，再由此环点走至多长度为 $\left|V\left(D\left(A_{t_jt_j}\right)\right)\right| - 1$ 的路到达 v_j, 故由 u 到 v 必有长度为

$w \le \sum\limits_{i=1}^{s} (|V(D(A_{t_it_i}))| - 1) + (s - 1) + \left(n_{t_j} - d_{t_j}\right) \le n - 1 + (n_{t_j} - d_{t_j})$ 的经过环点的途径.

若非环点分布在多于一个极小强连通分支中，则 $n_{t_j} - d_{t_j} < n - d$, 有 $w \le 2n - d - 2$.

若非环点分布在一个极小强连通分支中，则 u,v 之一必为环点，此时，由 u 到 v 必有长度为 $w \le \sum\limits_{i=1}^{s} (|V(D(A_{t_it_i}))| - 1) + s - 1 \le n - 1 \le 2n - d - 2$ 的途径.

注意到 $w \le 2n - d - 2$, 运用环点，由 u 到 v 必有长度为 h 和 $h + p$ 的途径.

这样对 $D(A)$ 的不在同一极小强连通分支中的点对 (u, v), 由 u 到 v 有长为 $h = 2n - d - 2$ 的途径当且仅当由 u 到 v 有长为 $h + p$ 的途径. 故对所有 i,j , $i \ne j$, $C_{ij} = D_{ij}$, 从而 $A^h = A^{h+p}$

故 $k(A) \le h = 2n - d - 2 < (n - d - 2)^2 + 2$, 矛盾，结论为真.

结论 2 对 $i=1,2,\cdots,m$, 至多有一个 i, 使 $D(A_{ii})$ 无环点．否则，设至少有两个极小连通分支都不含有环点.

若 $D(A_{ii})$ 无环点，则由定理 A,

$$K(A_{ii}) \le (|V(D(A_{ii}))|-2)^2+2 \le (n-d-1-2)^2+2 \le (n-d-2)^2+1.$$

若 $D(A_{ii})$ 有环点，则由定理 B,

$$K(A_{ii}) \le 2|V(D(A_{ii}))|-d_i-1 \le 2(d_i+n-d-2)-d_i-1 \le 2n-d-2,$$

这里 d_i 表示 $D(A_{ii})$ 中环点个数.

取 $h=(n-d-2)^2+1$, 则 $A_{ii}^h=A_{ii}^{h+p}\,(i=1,2,\cdots,m)$, p 是 A 的周期, .

设 A^h, A^{h+p} 具有（ 2.2 ）中的形式.

下面分两种情形：

情形 1. 若 A_{ij} 全为 $0(i\ne j)$, 则 $C_{ij}=D_{ij}=0$, $A^h=A^{h+p}$.

情形 2. 若 A_{ij} 不全为 $0(i\ne j)$, 考虑 $D(A)$ 的属于不同极小强连通分支中的点所组成的点对.

情形 2.1. 若 $(u,v)\in w_3$, 则 $k(u,v)=0$.

情形 2.2. 若 $(u,v)\in w_2$, 设由 u 到 v 的途径所经过的极小强连通分支导出的子图为 D_0, 显然， D_0 非强连通且无环点．由 [2] 中定理 3 知

$$k(D_0) \le (n-d-3)^2+3 \le (n-d-2)^2+1=h.$$

故对 w_2 中的点对 (u,v), 由 u 到 v 有长为 h 的途径，当且仅当由 u 到 v 有长为 $h+p$ 的途径.

情形 2.3. 若 $(u,v)\in w_1$, 类似于结论 1 中的讨论，由 u 到 v 有长为

$$\begin{aligned} w &\le \sum_{i=1}^{s}(|V(D(A_{t_it_i}))|-1)+s-1+\left(n_{t_j}-d_{t_j}\right) \le n-1+\left(n_{t_j}-d_{t_j}\right) \\ &\le n-1+n-d-2 \le (n-d-2)^2+1 \end{aligned}$$

的过环点的途径，这里 $A_{t_jt_j}$, n_{t_j}, d_{t_j} 的意义同结论 1 一样，运用环点，由 u 到 v 有长度为 $(n-d-2)^2+1=h$ 和 $h+p$ 的途径.

这样对 $D(A)$ 的不在同一强连通分支中的点构成的点对 (u,v), 由 u 到 v 有长为 $h=(n-d-2)^2+1$ 的途径当且仅当由 u 到 v 有长为 $h+p$ 的途径．故对所有 i, j, $i\ne j$, $C_{ij}=D_{ij}$, 从而 $A^h=A^{h+p}$, $k(A)\le h<(n-d-2)^2+2$, 矛盾，结论又为真.

由结论 1, 2, 在 $A_{11}, A_{12},\cdots,A_{mm}\,(m\ge 2)$ 中，恰有一个，设为 $A_{i_0i_0}$, 使得 $D(A_{i_0i_0})$ 无环点，其余 $D(A_{ii})\,(i\ne i_0)$ 均有环点.

结论 3 $K(A_{i_0i_0})=(n-d-2)^2+2$. 否则，设 $K(A_{i_0i_0})<(n-d-2)^2+2$, 当 $i\ne i_0$ 时, $D(A_{ii})$ 有环点，由定理 B 知

$$K(A_{ii}) \le 2|V(D(A_{ii}))|-d_i-1 \le 2(n-d-1+d_i)-d_i-1 \le (n-d-2)^2+1.$$

类似于结论 2 证明可得， $k(A)<(n-d-2)^2+2$, 矛盾，结论为真.

由于 $D(A_{i_0 i_0})$ 无环点,且由结论 3, $k(A_{i_0 i_0}) = (n-d-2)^2+2$, 由定理 A 知, $|V(D(A_{i_0 i_0}))| = n-d$, 从而 $D(A_{ii})\,(i \neq i_0)$ 中的点均是环点，再由定理 A 知， $A(i_0, i_0) \approx B$, 于是由定理 D 知 A 置换相似于 (2.1) 式右边的分块矩阵. □

参考文献:

[1] 邵嘉裕．可约布尔矩阵幂敛指数 [J]. 数学学报， 1990, **33**(1): 13–28.
SHAO Jia-yu. *The indices of convergence of reducible Boolean matrices* [J]. Acta Math. Sinica, 1990, **33**(1): 13–28. (in Chinese)

[2] 蒋志明．关于可约布尔矩阵幂敛指数的一个 Brualdi–Ross 型上界 [J]. 高校应用数学学报 (A 辑), 1994, **9**(4): 443–448.
JIANG Zhi-ming. *On an upper bound of Brualdi-Ross type for the indices of convergence of reducible Boolean matrices* [J]. Gaoxiao Yingyong Shuxue Xuebao Ser. A, 1994, **9**(4): 443–448. (in Chinese)

[3] 柳柏濂．组合矩阵论 [M]. 北京：科学出版社， 1996.
LIU Bo-lian. *Combinatorial Matrix Theory* [M]. Beijing: Science Press, 1996. (in Chinese)

[4] 柳柏濂，邵嘉裕．迹非零的布尔矩阵的幂敛指数 [J]. 数学进展， 1994, **23**(4): 322–330.
LIU Bo-lian, SHAO Jia-yu. *The index of convergence of Boolean matrices with non-zero trace* [J]. Adv. in Math. (China), 1994, **23**(4): 322–330. (in Chinese)

[5] 柳柏濂，李乔良．迹非零的布尔矩阵的幂敛指数的上确界 [J]. 数学进展， 1994, **23**(4): 331–335.
LIU Bo-lian, LI Qiao-liang. *Exact upper bound of convergence index for Boolean matrices with non-zero trace* [J]. Adv. in Math. (China), 1994, **23**(4): 331–335. (in Chinese)

[6] 周波，柳柏濂．迹非零布尔矩阵幂敛指数的极阵刻画 [J]. 数学进展， 1996, **25**(6): 540–547.
ZHOU Bo, LIU Bo-lian. *Characterization of the extreme matrices of convergent index for Boolean matrices with non-zero trace* [J]. Adv. in Math. (China), 1996, **25**(6): 540–547. (in Chinese)

[7] BRUALDI R A, ROSS J A. *On the exponent of a primitive, nearly reducible matrix*. Math. Oper. Res., 1980, **5**(2): 229–241.

The Index of Convergence of Nearly Reducible Block Matrices

JIANG Zhi-ming[1], *WANG Zong-yao*[1], *LIU Bo-lian*[2]

(1. Dept. of Math., East China University of Science and Technology, Shanghai 201512, China;
2. Dept. of Math., South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: Let $H_n(d)$, $1 \le d \le n$, be the set of nearly reducible Boolean block matrices of order n with exact d non–zero diagnols. The index of convergence of a matrix A is denoted by $k(A)$. This paper solves the problem for the exact upper bound of $k(A)$ completely. The following result is proved:

$$k(v_i, v_j) \le \max\left\{(n-d-2)^2+2, 2n-d-1\right\} \le \begin{cases} (n-d-2)^2+2, & 1 \le d \le s_n \\ 2n-d-1, & s_n < d \le n \end{cases}$$

$$s_n = \left\lfloor \frac{(2n-5)-\sqrt{4n-3}}{2} \right\rfloor.$$

And we give complete characterization for the extreme matrices with the largest convergent index in $H_n(d)$.

Key words: Boolean matrix; convergent index; exact upper bound; extreme matrix.