一致凸Banach空间中渐近非扩张映象的几乎轨道的渐近行为*

曾　六　川

(上海师范大学数学系, 200234; 复旦大学数学所, 上海200433)

摘　要　设 X 是有Fréchet可微范数的一致凸Banach空间, C 是 X 的有界闭凸子集, $T: C\to C$ 是一个渐近非扩张映象. 证明了, 如果 $\{x_n: n\geq 1\}$ 是 T 的几乎轨道, 则序列 $\{x_0\}$ 弱几乎收敛到集合 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{co}\{x_i: i\geq n\}\cap F(T)$ 的唯一点, 其中, $F(T)$ 是 T 的不动点集.

关键词　几乎轨道, 渐近非扩张映象, 不动点, 弱几乎收敛

分类号　AMS(1991) 47H09/CCL O177.91

设 X 是一致凸Banach空间, X^* 为 X 的对偶空间, $x^*\in X^*$ 在 $x\in X$ 的值, 记成 $\langle x, x^*\rangle$. 设 C 是 X 的非空有界闭凸子集, T 是从 C 到自身的映象. 称 T 是渐近非扩张映象, 若 T 满足条件 $\|T^nx-T^ny\|\leq L_n\|x-y_n\|$, $n\geq 1$, $x, y\in C$, 其中 $\lim_{n\to\infty}L_n=1$. 称 $\{x_n\}$ 是 T 的几乎轨道[5], 若 $\lim_{n\to\infty}[\sup_{m\geq 0}\|x_{n+m}-T^mx_n\|]=0$. 记 T 的不动点集为 $F(T)$, 即 $F(T)=\{x\in C: Tx=x\}$. 符号"$\to$"、"$\rightharpoonup$"分别表示强收敛、弱收敛. 记 $\{x_n\}$ 的子序列的弱极限点集为 $W_w(\{x_n\})$. 本文, 把Tan, Xu[4]的定理推广到了一致凸Banach空间中渐近非扩张映象的几乎轨道的情况.

引理1[4]　对任意 $x, y\in C$, 极限 $\lim_{n\to\infty}\|T^nx-T^ny\|$ 存在, 且 $\|T^mx-T^my\|\geq\lim_{n\to\infty}\|T^nx-T^ny\|$, $\forall m\geq 0$.

引理2[1]　设 C 是一致凸Banach空间的有界闭凸子集, 则存在严格递增的连续凸函数 $g: [0,\infty)\to[0,\infty)$ 满足: $g(0)=0$, 且

$$g\left(\left\|T\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i T x_i\right\|\right)\leq\max_{1\leq i,j\leq n}\left(\|x_i-x_j\|-\|Tx_i-Tx_j\|\right),$$

其中, $T: C\to X$ 是非扩张映象, $x_1,\cdots,x_n\in C$, $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\geq 0$ 且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$.

引理3[4]　设 C 是一致凸Banach空间 X 的有界闭凸子集, $\{x_k\}$ 是使得 $x_k\rightharpoonup x$ 的 C 中序列, 且 $\overline{\lim_{n}}\ \overline{\lim_{k}}\|x_k-T^nx_k\|=0$, 则 $x=Tx$.

引理4　设 $\{x_n: n\geq 1\}$ 与 $\{y_n: n\geq 1\}$ 是 T 的几乎轨道, 则极限 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|$ 存在.

引理5　设 $\{x_n: n\geq 1\}$ 与 $\{y_n: n\geq 1\}$ 是 T 的几乎轨道, 则对 $\forall\epsilon>0$, 存在 $m_0\geq 1$, $n_0\geq 1$ (m_0 与 $\{x_n: n\geq 1\}$, $\{y_n: n\geq 1\}$ 无关), 使得不等式成立:

$$\|T^m(\lambda x_n+\mu y_n)-(\lambda T^mx_n+\mu T^my_n)\|<\epsilon,$$

* 1993年11月1日收到

对$\forall m \geq m_0$, $\forall n \geq n_0$, $\forall \lambda, \mu \geq 0$: $\lambda + \mu = 1$.

引理6 设X是具有Fréchet可微范数的一致凸Banach空间, C是X的有界闭凸子集, $T: C \to C$是渐近非扩张映象, $\{x_n: n \geq 1\}$是T的几乎轨道, 则集$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{co}\{x_m: m \geq n\} \cap F(T)$至多是单点集

引理7 设C是一致凸Banach空间X的有界闭凸子集, $T: C \to C$是渐近非扩张映象, $\{x_n: n \geq 1\}$是T的几乎轨道, 则对每个整数$n \geq 1$, 任意正数$\epsilon > 0$, 存在i_n与k_0(i_n, k_0分别只依赖于n, ϵ)使得

$$\left\|T^k\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_{j+i}\right) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^k x_{j+i}\right\| \leq (1+\epsilon) \cdot g^{-1}\left(\frac{1}{n} + \epsilon d\right), \forall k \geq k_0, \forall i \geq i_n,$$

其中g是由引理2给出的函数, d是C的直径

定义[3] 称序列$\{x_n\}$弱几乎收敛到x, 若$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_{i+k} \to x$关于$k = 0, 1, 2, \cdots$一致地成立

定理1 设X是具有Fréchet可微范数的一致凸Banach空间, C是X的有界闭凸子集, $T: C \to C$是渐近非扩张映象 若$\{x_n: n \geq 1\}$是T的几乎轨道, 则$\{x_n\}$弱几乎收敛到集$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{co}\{x_i: i \geq n\} \cap F(T)$的唯一点

证明 首先, 由Goebel, Kirk[2]知, $F(T)$非空 据引理7, 得到$\left\|T^k\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_{j+i_n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^k x_{j+i_n}\right\| \leq (1+\epsilon) \cdot g^{-1}\left(\frac{1}{n} + \epsilon d\right)$, $\forall k \geq k_0$, $\forall n \geq 1$. 注意到

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^k x_{j+i_n} - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_{j+i_n}\right\| \leq \left\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^k x_{j+i_n} - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_{k+j+i_n}\right\| + \frac{kd}{n}. \tag{1}$$

因为$\{x_n: n \geq 1\}$是T的几乎轨道, 所以, 存在正数, 不失一般性, 记成i_n, 使得$\sup_{k \geq 0}\|T^k x_m - x_{k+m}\| < \frac{1}{n}$, $\forall m \geq i_n$. 因此, $\|T^k x_{j+i_n} - x_{k+j+i_n}\| < \frac{1}{n}$, $\forall k \geq 0$, $\forall j = 0, 1, \cdots, n-1$. 据此及(1), 推得

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^k x_{j+i_n} - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_{j+i_n}\right\| < \frac{1+kd}{n}, \tag{2}$$

$\forall k \geq 0$. 由此即得$\left\|T^k\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_{j+i_n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_{j+i_n}\right\| \leq (1+\epsilon) g^{-1}\left(\frac{1}{n} + \epsilon d\right) + < \frac{1+kd}{n}$, $\forall n \geq 1$, $\forall k \geq k_0$. 从而, 得到$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\|T^k\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_{j+i_n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_{j+i_n}\right\| = 0$. 据此及引理3与引理6, 推得$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_{j+i_n} \to y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{co}\{x_i: i \geq n\} \cap F(T)$. 照上面的方法, 可证, $\left\|T^k\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_{j+i_n+p_n+i}\right) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_{j+i_n+p_n+i}\right\| \leq (1+\epsilon) g^{-1}\left(\frac{1}{n} + \epsilon d\right) + \frac{1+kd}{n}$, $\forall n, p_n, i \geq 1$, $\forall k \geq k_0$. 再由引理3与引理6, 对$\forall i \geq 0$, 有$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_{j+i_n+np+i} \to y$关于$p = 0, 1, \cdots$一致地成立 由于对$\forall n$及$\forall m \geq i_n$,

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} x_{k+1} = \frac{1}{m}\left(\sum_{k=i_n+j_n}^{m-1} x_{k+i} + n\left(\sum_{k=0}^{j}\left(\frac{1}{n}\sum_{v=0}^{n-1} x_{v+i_n+nk+i}\right)\right) + \sum_{k=0}^{i_n} x_{k+i}\right),$$

其中, $m = j_n + i_n + r$, $r < n$, 所以, $\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} x_{k+i} \to y$关于$i = 0, 1, \cdots$一致地成立 这就结束了证

明

运用定理1, 可证下面的定理

定理2 设X, C, T 及$\{x_n: n\geq 1\}$同在定理1中一样, 则$\{x_n\}$强收敛到T的某个不动点, 当且仅当$x_n - x_{n+1}\to 0$.

推论1[4] 设X是具有Fréchet可微范数的一致凸Banach空间, C是X的有界闭凸子集, $T: C\to C$是渐近非扩张映象, 则对每个$x\in C$, $\{T^n x\}$弱几乎收敛到集$\bigcap_{n=0}^{\infty}\overline{co}\{T^i x: i\geq n\}\cap F(T)$的唯一点

推论2[4] 设X, C及T同在推论1中一样, 则$\{T^n x\}$弱收敛到$F(T)$中某点, 当且仅当T在x点是弱渐近正则的, 即$T^n x - T^{n+1}x\to 0$.

参 考 文 献

[1] R. E. Bruck, *On the convex approximation property and the asymptotic behavior of nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math., 34(1981), 304-341.

[2] K. Goeble and W. A. Kirk, *A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., 35(1972), 171-174.

[3] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent series*, Acta Math., 80(1948), 167-190.

[4] K. K. Tan and H. K. Xu, *The nonlinear ergodic theorem for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 114(1992), 399-404.

[5] H. Oka, *Nonlinear ergodic theorems for commutative semigroups of asymptotically nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal., 18(1992), 619-635.

Asymptotic Behaviour of Almost Orbits of Asymptotically Nonexpansive Mappings in Uniformly Convex Banach Spaces

Zeng Liuchuan

(Dept. of Math., Shanghai Normal University, 200234
Inst. of Math., Fudan University, Shanghai 200433)

Abstract

Let X be a uniformly convex Banach space with a Fréchet differentiable norm, C a bounded closed convex subset of X and $T: C\to C$ an asymptotically nonexpansive mapping. It is shown that if $\{x_n: n\geq 1\}$ is an almost-orbit of T, then the sequence $\{x_n\}$ is weakly almost-convergent to the unique point of the set $\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{co}\{x_i: i\geq n\}\cap F(T)$, where $F(T)$ is the fixed point set of T.

Keywords almost-orbit, asymptotically nonexpansive mapping, weakly almost-convergent.