第20卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 20 No. 1
2000年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 2000

Banach 空间一类非线性积分微分方程解的存在性*

陈　芳　启

(天津大学力学系，300072；山东大学数学系，济南 250100)

摘　要：本文利用 Mönch 不动点定理研究了 Banach 空间中一类非线性积分微分方程解的存在性，给出的结论改进、推广了[1－2]中的结果.

关键词：积分微分方程；Mönch 不动点定理；非紧性测度.

分类号：AMS(1991) 45K05/CLC O175.6

文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2000)01-0062-05

1　引　言

文[1]研究了非线性湿气迁移方程，借助黎曼函数方法将所讨论的偏微分方程转化为下述形式的积分—微分方程

$$\varphi(x,t)=\varphi_0(x,t)+\int_0^t\int_a^x(x-y)e^{s-t}F(y,s,(\triangle\varphi)(y,s))\mathrm{d}y\mathrm{d}s,$$

其中 $\varphi_0(x,t)$ 是已知函数，$(\triangle\varphi)(x,t)=(\varphi(x,t),\varphi_x(x,t),\varphi_t(x,t),\varphi_{xx}(x,t),\varphi_{xt}(x,t))$，$F\in C([a,b]\times[0,T]\times R^5,R)$. 建立了该方程解的存在定理，[2]在 Banach 空间中讨论了上述方程的可解性，推广了[1]的主要结果. 本文利用 Mönch 不动点定理及非紧性测度的一个积分不等式，在更一般的条件下得到了上述方程解的存在性定理，对[2]中结果作了本质改进.

2　预备知识

设 E 是实 Banach 空间，a,b,T 是实数，$a<b$，$T>0$，记 $\overline{\Omega}=[a,b]\times[0,T]$，令 $C_0^2(\overline{\Omega},E)=\{\varphi(x,t):\varphi\in C^1(\overline{\Omega},E)$，且 $\varphi_{xx},\varphi_{xt}\in C(\overline{\Omega},E)\}$，对任意的 $\varphi\in C_0^2(\overline{\Omega},E)$，令

$$\|\varphi\|=\max\{\sup_{\overline{\Omega}}\|\varphi(x,t)\|,\sup_{\overline{\Omega}}\|\varphi_x(x,t)\|,\sup_{\overline{\Omega}}\|\varphi_t(x,t)\|,$$
$$\sup_{\overline{\Omega}}\|\varphi_{xx}(x,t)\|,\sup_{\overline{\Omega}}\|\varphi_{xt}(x,t)\|\},$$

则 $C_0^2(\overline{\Omega},E)$ 是一 Banach 空间. 对 $D\subset C_0^2(\overline{\Omega},E)$，记

$$D(x,t)=\{\varphi(x,t):\varphi\in D\},D_x(x,t)=\{\varphi_x(x,t):\varphi\in D\},D_x=\{\varphi_x:\varphi\in D\},$$
$$D(\overline{\Omega})=\{\varphi(x,t):(x,t)\in\overline{\Omega},\varphi\in D\},D_x(\overline{\Omega})=\{\varphi_x(x,t):(x,t)\in\overline{\Omega},\varphi\in D\},$$

* **收稿日期**：1997-04-01

作者简介：陈芳启(1963-)，男，博士，目前在天津大学做博士后研究工作.

其它相关符号与此意义相同. α 表示 Kuratowski 非紧性测度.

引理 1[3] 设 $D\subset C_0^2(\overline{\Omega},E)$ 有界，且 D_t,D_{xx},D_{xt} 都是等度连续的，则

$$\alpha(D)=\max\{\sup_{\overline{\Omega}}\alpha(D(x,t)),\sup_{\overline{\Omega}}\alpha(D_x(x,t)),\sup_{\overline{\Omega}}\alpha(D_t(x,t)),\sup_{\overline{\Omega}}\alpha(D_{xx}(x,t)),\sup_{\overline{\Omega}}\alpha(D_{xt}(x,t))\}$$

引理 2[4] 设 $D=\{x_n\}\subset L^1([a,b],E)$，且存在 $g\in L^1(J,R^+)$，使得对任意的 $x_n\in D$，都有 $\|x_n(t)\|\leqslant g(t)$, a.e. $t\in[a,b]$，则

$$\alpha(\{\int_a^t x_n(s)\mathrm{d}s\})\leqslant 2\int_a^t\alpha(D(s))\mathrm{d}s,\quad 任意的\ t\in[a,b].$$

引理 3[5]（Mönch 不动点定理） 设 E 是 Banach 空间，$K\subset E$ 是闭凸集，$A:K\to K$ 是连续算子，且具有下列性质：

$$x\in K,D\subset K\ 可数,\overline{D}=\overline{\mathrm{co}}(\{x\}\cup A(D))\Rightarrow D\ 是相对紧集,$$

则 A 在 K 中至少有一不动点.

3 主要结果

本文在 Banach 空间 $C_0^2(\overline{\Omega},E)$ 中考虑积分微分方程

$$\varphi(x,t)=\varphi_0(x,t)+\int_0^t\int_a^x(x-y)e^{s-t}F(y,s,(\triangle\varphi)(y,s))\mathrm{d}y\mathrm{d}s,\tag{1}$$

这里

$$\varphi_0(x,t)\in C_0^2(\overline{\Omega},E),(\triangle\varphi)(x,t)=(\varphi(x,t),\varphi_x(x,t),\varphi_t(x,t),\varphi_{xx}(x,t),\varphi_{xt}(x,t)),$$
$$F\in C(\overline{\Omega}\times E\times E\times E\times E\times E,E).$$

定义算子 A：

$$(A\varphi)(x,t)=\varphi_0(x,t)+\int_0^t\int_a^x(x-y)e^{s-t}F(y,s,(\triangle\varphi)(y,s))\mathrm{d}y\mathrm{d}s.\tag{2}$$

本文使用下列假设：

(H_1) 对任何有界集 $B_i\subset E(1\leqslant i\leqslant 5)$，$F$ 在 $\overline{\Omega}\times B_1\times B_2\times B_3\times B_4\times B_5$ 上一致连续.

(H_2) 存在常数 $L\geqslant 0$ 及 $a(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^+)$，使得对一切 $(x,t)\in\overline{\Omega}$，$u_i\in E(1\leqslant i\leqslant 5)$ 有

$$\|F(x,t,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)\|\leqslant L\sum_{i=1}^5\|u_i\|+a(x,t),$$

(H_3) 存在常数 $\tau\geqslant 0$，对任意的 $(x,t)\in\overline{\Omega}$，有界集 $B_i\subset E(1\leqslant i\leqslant 5)$ 有

$$\alpha(F(x,t,B_1,B_2,B_3,B_4,B_5))\leqslant\tau\max_{1\leqslant i\leqslant 5}\{\alpha(B_i)\}.$$

引理 4[2] 设条件(H_1)成立，则 $A:C_0^2(\overline{\Omega},E)\to C_0^2(\overline{\Omega},E)$ 连续、有界，且对任何有界集 $D\subset C_0^2(\overline{\Omega},E)$，有 $A(D),A(D)_x,A(D)_t,A(D)_{xx},A(D)_{xt}$ 都是等度连续的.

定理 设(H_1)－(H_3)成立，则方程(1)在 $C_0^2(\overline{\Omega},E)$ 中至少有一解.

证明 显然，只需证明算子 A 在 $C_0^2(\overline{\Omega},E)$ 中有不动点即可. 由引理 4 知，A 映 $C_0^2(\overline{\Omega},E)$ 入 $C_0^2(\overline{\Omega},E)$ 且是连续、有界的.

证明分两步完成

(1) 取 $k>0$ 充分大，使得

$$\begin{cases}\gamma_1\equiv\max\{\frac{2(b-a)\tau}{k}+\frac{4(b-a)\tau}{k^2},\frac{2\tau}{k}+\frac{4\tau}{k^2}\}<1,\\ \gamma_2\equiv\frac{5(b-a+1)L}{k}(1+\frac{1}{k})<1.\end{cases}\tag{3}$$

对任意的 $\varphi\in C_0^2(\overline{\Omega},E)$，令

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_k=\max\{&\sup_{\overline{\Omega}}\{\|\varphi(x,t)\|e^{-k(x+t)}\},\sup_{\overline{\Omega}}\{\|\varphi_x(x,t)\|e^{-k(x+t)}\},\\ &\sup_{\overline{\Omega}}\{\|\varphi_t(x,t)\|e^{-k(x+t)}\},\sup_{\overline{\Omega}}\{\|\varphi_{xx}(x,t)\|e^{-k(x+t)}\},\\ &\sup_{\overline{\Omega}}\{\|\varphi_{xt}(x,t)\|e^{-k(x+t)}\}\},\end{aligned}$$

显然，在 $C_0^2(\overline{\Omega},E)$上范数 $\|\cdot\|_k$ 与 $\|\cdot\|$ 是等价的，因此算子 A 在范数 $\|\cdot\|_k$ 下仍是连续、有界的. 记 $\eta_0=\max\{(b-a)^2(T+1),(b-a)(T+1),T\}$，取

$$R\geqslant\frac{\|\varphi_0\|_k+\eta_0e^{-ka}\sup_{\overline{\Omega}}a(x,t)}{1-\gamma_2}.\tag{4}$$

记 $B_R=\{\varphi\in C_0^2(\overline{\Omega},E):\|\varphi\|_k\leqslant R\}$，显然 B_R 是 $C_0^2(\overline{\Omega},E)$中的有界闭凸集，由[2]中定理 2 证明知，$A$ 映 B_R 入 B_R.

(2) 在这部分，Banach 空间$(C_0^2(\overline{\Omega},E),\|\cdot\|_k)$中的 Kuratowski 非紧性测度用 α^* 表示.

设 $D\subset B_R$ 是可数集，且 $D=\overline{\mathrm{co}}(\{\bar{\varphi}\}\cup A(D))$，其中 $\bar{\varphi}$ 是 B_R 中的元素. 由引理 4 知，$A(D)_t$，$A(D)_{xx}$，$A(D)_{xt}$都是等度连续的，再据引理 1 得

$$\begin{aligned}\alpha(A(D))=\max\{&\sup_{\overline{\Omega}}\alpha(A(D)(x,t)),\sup_{\overline{\Omega}}\alpha(A(D)_x(x,t)),\sup_{\overline{\Omega}}\alpha(A(D)_t(x,t)),\\ &\sup_{\overline{\Omega}}\alpha(A(D)_{xx}(x,t)),\sup_{\overline{\Omega}}\alpha(A(D)_{xt}(x,t))\}.\end{aligned}\tag{5}$$

对任意的$(x,t)\in\overline{\Omega}$，由引理 2，$(H_3)$及(5)式得

$$\begin{aligned}\alpha(A(D)(x,t))&\leqslant 4(b-a)(\int_0^t\int_a^x\alpha(\{F(y,s,(\triangle\varphi)(y,s)):\varphi\in D\})\mathrm{d}y\mathrm{d}s\\ &\leqslant 4(b-a)\tau\int_0^t\int_a^x e^{k(y+s)}\max\{\alpha(e^{-k(y+s)}D(y,s)),\alpha(e^{-k(y+s)}D_x(y,s)),\\ &\qquad\alpha(e^{-k(y+s)}D_t(y,s)),\alpha(e^{-k(y+s)}D_{xx}(y,s)),\alpha(e^{-k(y+s)}D_{xt}(y,s))\}\mathrm{d}y\mathrm{d}s\\ &\leqslant 4(b-a)\tau\int_0^t\int_a^x e^{k(y+s)}\alpha^*(D)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\leqslant\frac{4(b-a)\tau}{k^2}e^{k(x+t)}\alpha^*(D).\end{aligned}$$

于是，对任意的$(x,t)\in\overline{\Omega}$，有

$$\alpha(e^{-k(x+t)}A(D)(x,t))\leqslant\frac{4(b-a)\tau}{k^2}\alpha^*(D)\leqslant\gamma_1\alpha^*(D)\text{（注意到(3)式）}.$$

由于

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}((A\varphi)(x,t))=\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+\int_0^t\int_a^x e^{s-t}F(y,s,(\triangle\varphi)(y,s))\mathrm{d}y\mathrm{d}s,\\ &\frac{\partial}{\partial t}((A\varphi)(x,t))=\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}+\int_a^x(x-y)F(y,t,(\triangle\varphi)(y,t))\mathrm{d}y-\\ &\qquad\int_0^t\int_a^x(x-y)e^{s-t}F(y,s,(\triangle\varphi)(y,s))\mathrm{d}y\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}((A\varphi)(x,t))=\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}+\int_0^t e^{s-t}F(x,s,(\triangle\varphi)(x,s))\mathrm{d}s,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}((A\varphi)(x,t))=\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial t}+\int_a^x F(y,t,(\triangle\varphi)(y,t))\mathrm{d}y-\int_0^t\int_a^x e^{s-t}F(y,s,(\triangle\varphi)(y,s))\mathrm{d}y\mathrm{d}s$$

对任意的$(x,t)\in\overline{\Omega}$,用类似方法可得

$$\alpha(e^{-k(x+t)}A(D)_x(x,t))\leqslant\frac{4\tau}{k^2}\alpha^*(D)\leqslant\gamma_1\alpha^*(D),$$

$$\alpha(e^{-k(x+t)}A(D)_t(x,t))\leqslant(\frac{2(b-a)\tau}{k}+\frac{4(b-a)\tau}{k^2})\alpha^*(D)\leqslant\gamma_1\alpha^*(D),$$

$$\alpha(e^{-k(x+t)}A(D)_{xx}(x,t))\leqslant\frac{2\tau}{k}\alpha^*(D)\leqslant\gamma_1\alpha^*(D),$$

$$\alpha(e^{-k(x+t)}A(D)_{xt}(x,t))\leqslant(\frac{2\tau}{k}+\frac{4\tau}{k^2})\alpha^*(D)\leqslant\gamma_1\alpha^*(D).$$

再据(5)式得$\alpha^*(A(D))\leqslant\gamma_1\alpha^*(D)$,这样有

$$\alpha^*(D)=\alpha^*(\overline{\mathrm{co}}(\{\bar{\varphi}\}\cup A(D)))=\alpha^*(A(D))\leqslant\gamma_1\alpha^*(D).$$

由于$0\leqslant\gamma_1<1$,故有$\alpha^*(D)=0$,即D是相对紧集.由Mönch不动点定理得,算子A在B_R中有不动点x^*,从而方程(1)在$C_0^2(\overline{\Omega},E)$中有解$x^*$.定理至此得证.

注1 在研究Banach空间积分—微分方程(1)时,文[2]中使用了下列紧性条件:

$$\alpha(F(x,t,B_1,B_2,B_3,B_4,B_5))\leqslant\tau\max_{1\leqslant i\leqslant 5}\{\alpha(B_i)\}.$$

在其定理1中要求$\tau\in[0,\frac{1}{2\eta_0})$;定理2中要求$\tau\in[0,\frac{1}{2\eta_0e^{k(b-a+T)}})$,其中

$$\eta_0=\max\{(b-a)^2\cdot(T+1),(b-a)(T+1),T\},$$
$$k=\sqrt{25L^2(b-a+1)^2+20L(b-a+1)}.$$

这是对常数τ的一个相当强的限制,显然本文定理的条件(H_3)中完全去掉了这一限制.

注2 应该指出的是,在文[2]中也使用了范数$\|\cdot\|_k$本文的意义正在于,通过对范数$\|\cdot\|_k$中常数k的选取技巧(体现在(3)式中)结合非紧性测度的一个积分不等式,完全去掉了[2]紧性条件中对常数τ的限制,使得紧性条件便于使用和检验.

作者感谢郭大钧教授的指导和鼓励.

参考文献:

[1] 施德明. 非线性湿气迁移方程的初值问题[J]. 应用数学学报, 1990, **13**: 31—38.

[2] 周友明. Banach空间中一类非线性积分微分方程解的存在性[J]. 数学研究与评论, 1996, **16**: 615—621.

[3] CHANDRA J, LAKSHMIKANTHAM V and MITCHELL A R. *Existence of solutions of boundary value problems for nonlinear second order systems in Banach spaces* [J]. Nonlinear Anal., 1978, **2**: 157—168.

[4] HEINZ H P. *On the behaviour of measure of noncompactness with respect to differentiation and integration of vector-valued functions* [J]. Nonlinear Anal., 1983, **7**: 1351—1371.

[5] MÖNCH H. *Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces* [J]. Nonlinear Anal., 1980, **4**: 985—999.

[6] GUO Da-jun and LAKSHMIKANTHAM V. *Nonlinear Problems in Abstract Cones* [M]. Academic Press, Inc., Boston and New York, 1988.

[7] 郭大钧,孙经先. 抽象空间常微分方程 [M]. 山东科技出版社,1989.

Existence of Solutions for a Class of Nonlinear Integrodifferential Equations in Banach Spaces

CHEN Fang-qi

(Dept. of Mech., Tianjin University, 3000072; Dept. of Math., Shandong University, Jinan 250100)

Abstract: The existence of solutions for a class of nonlinear integrodifferential equations in Banach spaces is studied by means of Mönch fixed point theorem, and an existence theorem of solutions is obtained which improved essentially the results in [1—2].

Key words: integrodifferential equation; Mönch fixed point theorem; measure of noncompactness.