第4卷 第4期
1984年10月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.4
Oct. 1984

多重 Fourier 级数 Riesz 球平均的一个注记*

范大山

（安徽大学）

在一维的 Fourier 级数理论中，设 $f\in L_{(0,2\pi)}$，如关系式：

$$\int_0^h\{f(\theta+t)-f(\theta-t)\}\,dt=o\left(\frac{|h|}{\log\frac{1}{|h|}}\right),\qquad (h\to 0)$$

关于 θ 均匀地成立，则称 f 满足 Salem 条件。佐藤于日本的学士院纪事中指出：如果 f 满足 Salem 条件，则在 f 的每一 Lebesgue 点 x_0，其 Fourier 级数 $\mathfrak{S}[f;x_0]$ 收敛。G. Freud 改进了佐藤的结论，证明了如 f 满足 Salem 条件，且存在 θ_0 满足

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h f(\theta_0+t)dt=f(\theta_0),$$

则 $\mathfrak{S}[f;\theta_0]$ 收敛。（见[1]，P.202）

作为一维 Fourier 级数的类比，考虑多重 Fourier 级数。现设 E_n 是 n 维欧氏空间，$Q_n=\{x\in E_n,\ -\pi<x_i\leqslant\pi,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$，如 $f(x)\in L(Q_n)$，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数临界阶的 Riesz 球平均定义为

$$S_R(f,x)=\sum_{|k|<R}\left(1-\frac{|k|^2}{R^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}a_k e^{ik\cdot x},$$

（其中 a_k 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数）。

称函数：

$$F(x,r)=\int_{|t-x|<r}\{f(t)-f(x)\}dt$$

为 $f(x)$ 的球形积分。

如果存在 $r_0>0$，使对任一 $x\in Q_n$，有

$$r^{1-n}\{F(x,r+2h)+F(x,h)-2F(x,r+h)\}=o\left(\frac{h}{\log\frac{1}{h}}\right)$$

关于 $r\,(0<h\leqslant r\leqslant r_0)$ 一致成立，则称 $f(x)$ 在 Q_n 上满足 Salem 条件。（见[2]）。

现设 $f_x(t)=\frac{1}{|S(x,t)|}\int_{S(x,t)}f(\xi)d\xi$,

* 1983年9月27日收到。

其中$S(x,t)=\{\xi\in E_n,|\xi-x|=t\}$，$|S(x,t)|$是$S(x,t)$的体积。记$\bar{f}_{x_0}(t)=f_{x_0}(t)-f(x_0)$。我们把[2]中的一个主要结果改进为：

定理 设$f\log^+|f|\in L(Q_n)$，且$f(x)$满足Salem条件，则关系式

$$\lim_{R\to\infty}\sum_{|k|<R}\left(1-\frac{|k|^2}{R^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}a_k e^{ik\cdot x_0}=f(x_0)$$

在满足

$$\int_0^t \tau^{n-1}\bar{f}_{x_0}(\tau)d\tau=o(t^n)\qquad (t\to o^+)$$

的点x_0成立。

显然我们获得了一维理论中G.Freud的结论。定理的证明可以不用[2]中所采用的极大函数的方法，而直接依赖于下述引理：

引理 设$\int_0^t \tau^{n-1}\bar{f}_{x_0}(\tau)d\tau=o(t^n)\quad(t\to o)$，并且$f(x)$在$Q_n$上满足Salem条件，则

$$\int_0^t u^{n-1}\bar{f}_{x_0}(u)\begin{matrix}\sin\left(Ru-\frac{n}{2}\pi\right)\\ \cos\left(Ru-\frac{n}{2}\pi\right)\end{matrix}du=o(R^{-n})+o(t^n)\log^{-1}R,\ \left(\frac{\pi}{R}\leqslant t\to o^+\right).$$

因此定理的证明比[2]的证明简单。

参考文献

[1] 陈建功，三角级数论(上)，上海科技出版社，1964年。

[2] 陆善镇，数学学报23：4 (1980)，609—623。