第21卷第2期
2001年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 21 No. 2
May 2001

Baer 条件对群的影响*

班桂宁[1]， 庞素琳[2]， 赵啸海[3]

(1. 广西大学数学系，广西 南宁 530004；2. 华南理工大学自动控制工程系，广东 广州 510640；
3. 广西电视大学，广西 南宁 530022)

摘 要：本文从全新的角度着手，研究超可解群和 p-超可解群，获得一系列重要结果. 附带地，推广归功于 Baer 的一个重要定理.

关键词：超可解群；p-超可解群；Sylow 塔性；严格 p-闭群.

分类号：AMS(1991) 20D15，20D45/CLC O151.21

文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2001)02-0257-07

超可解群是幂零群与可解群之间一类比较重要的有限群. 对超可解群进行特征刻画是研究超可解群的一个重要课题. 关于超可解群的等价条件有很多著名的结果，其中很大一部分已经编入了群论专著. 本文考虑的是超可解群被超可解群的扩张. 从这个全新的角度着手，我们获得了一系列重要的结果. 本文的群都是有限群. 严格 p-闭群的定义见[1]. $\pi(G)$ 表示 $|G|$ 的所有素因子的集合. 其它记号与术语都是标准的.

1957 年，Baer 给出如下定理[1]：

定理 1 群 G 超可解的充要条件是：(a) G 有 Sylow 塔性；(b) 对 G 之任一 Sylow p-子群 P，$N_G(P)/C_G(P)$ 都严格 p-闭.

本文将推广此定理.

定义 1 设 π 为一个素数集合. 集合 $\{H \mid H \le G,\ \pi(H) \subseteq \pi\}$ 的极大元叫做 G 的 π 极大子群.

引理 1 设 G 为 π 可分. 如果 G 有一个 π-Hall 子群可解，则 G 的任一 π-Hall 子群都可解. 此结论对 π'-Hall 子群也成立.

证明 仅需证明 π-Hall 子群的情形. 对 $|G|$ 运用归纳法. 设 H 为 G 的可解 π-Hall 子群，K 为任意 π-Hall 子群. 若 $O_\pi(G) \neq 1$，设 $\overline{G} = G/O_\pi(G)$，显然 $\overline{H}$ 为 $\overline{G}$ 的可解 π-Hall 子群. 由归纳假设，$\overline{K}$ 可解. 因为 $O_\pi(G) \leqslant H$，所以 K 可解. 下设 $O_{\pi'}(G) \neq 1$，设 $\overline{G} = G/O_{\pi'}(G)$，则 $\overline{H}$ 是 $\overline{G}$ 的可解 π-Hall 子群. 由归纳假设，$\overline{K}$ 可解，故 $K \cong \overline{K}$ 可解. □

仿照[2，V，定理 2.1(3)]的证明，易得：

* 收稿日期：1998-03-23
基金项目：国家自然科学基金(19861001)和广东省自然科学基金资助项目(D32450 K245)
作者简介：班桂宁(1962-)，男，广西上林人，广西大学教授.

引理 2 设 G 为 π 可分. 则 G 的任一可解 π 子群都包含在某一 π-Hall 子群之中. 此结论对 π' -Hall 子群也成立.

利用引理 1,2,推广了[2, V, 定理 2.1]的部分结果:

命题 设 G 为 π 可分. 如果 G 有一个 π 极大子群或 π' 极大子群可解,则 G 的所有 π-Hall 子群都共轭,且任一 π 子群必包含在某一 π-Hall 子群之中. 并且对 π' -Hall 子群与 π' 子群也有类似结论.

证明 仿照[2, V, 定理 2.1] 的证明.

引理 3[1] 若 G 有正规循环子群 H 使 G/H 超可解,则 G 超可解.

由 Schur-Zassenhaus 定理和 Sylow 定理易证:

引理 4 设 H 是 G 的正规 Hall 子群, K 是 H 在 G 中的补,则 $C_G(H) = Z(H) \times M$, $M = C_K(H) \trianglelefteq G$.

定义 2 设 $\pi(G) = \{p_1, \cdots, p_r\}$, $S_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$, $i = 1, \cdots, r$. 如果对于所有 i, $S_1 \cdots S_i \trianglelefteq G$, 则 G 叫做($p_1, \cdots, p_r$)Sylow 塔群. 凡是($p_1, \cdots, p_r$)Sylow 塔群都叫做弱 Sylow 塔群.

显然:交错群 A_4 是弱 Sylow 塔群;单群 PSL (2,5)是内-弱 Sylow 塔群;弱 Sylow 塔群的子群和商群都是弱 Sylow 塔群,($p_1, \cdots, p_r$)Sylow 塔群的直积是($p_1, \cdots, p_r$)Sylow 塔群;当 G 有一个正规弱 Sylow 塔-Hall 子群 H 使得 G/H 为弱 Sylow 塔群时 G 也是弱 Sylow 塔群;等等.

由 Frattini 论断易知:

引理 5 设 $H \leqslant G$, $N \trianglelefteq G$,则 $N_G(H)N/N \subseteq N_{G/N}(HN/N)$. 当 $H \in \mathrm{Syl}_p(HN)$ 时等号成立.

由定义易证:

引理 6 严格 p -闭群和超可解群的子群、商群及直积仍分别为严格 p -闭群和超可解群.

引理 7[1] 设 H/K 是 G 的 p -主因子. 则 $|H/K| = p$ 当且仅当 $\mathrm{Aut}_G(H/K)$ 是方次数(exponent) 能整除 $p - 1$ 的交换群.

由定义易证:

引理 8 如果 $J, K, H \leqslant G$, $K \leqslant H$,则 $N_K(J)/C_K(J)$ 同构于 $N_H(J)/C_H(J)$ 的子群.

定义 3 设 p 为素数, $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. 如果 $N_G(S)/C_G(S)$ 严格 p -闭, 则 G 叫做 p -Baer 群. 对于所有素数 q , G 都是 q -Baer 群, 则叫做 Baer 群. 例如: 单群 PSL (2,17)和对称群 S_4 都是 Baer 群; 交错群 A_4 的每个真子群都是 Baer 群.

由定义易证:

引理 9 Baer 群的 Hall 子群、商群和直积仍是 Baer 群.

系理 p -Baer 群的含有 Sylow$p$ -子群的子群, 商群和直积仍是 p -Baer 群.

下面定理比较重要.

定理2 如果 G 的真子群都是 Baer 群, 则 G 是弱 Sylow 塔群.

证明 首先定理的条件对商群也成立. 设 p 为 $|G|$ 的最小素因子. 若 G 有正规 p 子群 $P \neq 1$, 由归纳假设, 可设 $P \notin \mathrm{Syl}_p(G)$ 且 G/P 有正规 Sylow q- 子群 QP/P, 此时 $q \neq p$. 可设 $PQ \trianglelefteq G$, $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$, $P \in \mathrm{Syl}_p(PQ)$. 因为 $G > PQ$, 所以 $N_{QP}(P)/ C_{QP}(P) =$

$\dfrac{PQ}{Z(P)\times C_Q(P)}$严格$p$-闭，故$C_Q(P)\geqslant Q$，$PQ=P\times Q$，所以$Q$ char PQ，$Q\trianglelefteq G$. 由G/Q为弱Sylow塔群知：G为弱Sylow塔群. 下设对于G的每个p子群$P\neq 1$，$N=N_G(P)<G$. 因为N是弱Sylow塔群，所以N可解，因而$N=SH$，S是N的Sylow p-子群，H是S在N中的补. 因为$P\trianglelefteq N$，故$P\leqslant S, PH\leqslant N$. 因为$\dfrac{N_{PH}(P)}{C_{PH}(P)}=\dfrac{PH}{Z(P)\times C_H(P)}$严格$p$-闭，所以$C_H(P)\geqslant H$，$N_G(P)/C_G(P)=SH/C_G(P)$是$p$-群. 由Frobenius p-幂零准则知：G有正规p补K. 由K为弱Sylow塔群知：G为弱Sylow塔群.

定义4 设$p\in\pi$（素数集）. G叫做p-幂零π-闭群如果G有正规p-幂零π-Hall子群. 显然，弱Sylow塔群为p-幂零π-闭群.

系理 设p为$|G|$的最小素因子. 如果G的所有真子群都是p-Baer群，则G为p-幂零π-闭群.

证明 首先定理条件对商群也成立. 若G有正规p子群$P\neq 1$，可设$P\notin \mathrm{Syl}_p(G)$且存在素数集$\pi\ni p$使得$G/P$含有正规$p$-幂零$\pi$-Hall子群$H/P$. 显然$H$为$G$的正规$\pi$-Hall子群. 因为$H$为$p$-可解，所以可设$H=SK$，$S\geqslant P$是$G$的Sylow p-子群，K是H的p'-Hall子群. 因为$G\geqslant H>PK$，所以$N_{PK}(P)/C_{PK}(P)=\dfrac{PK}{Z(P)\times C_K(P)}$为严格$p$-闭，故$C_K(P)\geqslant K$，$PK=P\times K$，$K$ Char $PK\trianglelefteq H$，故$K\trianglelefteq H$，进而H为p-幂零. 注意到当N为p-可解时可设$N=SH$，S为N的Sylow p-子群，H为S在N中的补，当对于G的每一个p-子群$P\neq 1$都有$N=N_G(P)<G$时我们可以仿照定理2的证明完成这个系理的证明.

对称群S_4是3-可解群，它的所有真子群都是3-Baer群. 设$3\in\pi$，S_4的正规π-Hall子群只有S_4，但S_4不是3-幂零.

由[3,4，5]和Thompson极小单群分类定理（能否不用?），易证：

定理3 如果Baer群G的所有真子群都是弱Sylow塔群，则G可解.

系理 设p为$|G|$的最小素因子. 如果p-Baer群G的所有真子群都是p-幂零π-闭群，则G可解.

交错群S_4是Baer群与内-弱Sylow塔群，但S_4不超可解. 设$Z_5=\langle a\rangle, Z_3{}^4=\langle c_1\rangle\times\langle c_2\rangle\times\langle c_3\rangle\times\langle c_4\rangle, \alpha: Z_5\to \mathrm{Aut}(Z_3{}^4), a\to\alpha(a): c_i\to c_{i+1}, c_4\to(c_1c_2c_3c_4)^{-1}, N=Z_3{}^4\rtimes_\alpha Z_5, \beta: Z_2\to\mathrm{Aut}(N), b\to\beta(b): a\to a, c_i\to c_i{}^{-1}, G=(Z_3{}^4\rtimes_\alpha Z_5)\rtimes_\beta Z_2$，显然$Z_5$和$Z_2$都不正规于$G$，即：弱Sylow塔群除了顺序与反序外还有其它序. 由Frobenius p-幂零准则易证：

定理4 设$\pi(G)=\{p_1,p_2,\cdots,p_r\}$，如果$G$的真子群都是$(p_1,\cdots,p_r)$Sylow塔群，则$G$是弱Sylow塔群.

定义5 设$H\leqslant G$，如果对于每个$p \mid |H|$及$S\in\mathrm{Syl}_p(H)$，都有$N_G(S)/C_G(S)$严格p-闭，则H叫做G的B子群.

显然，Baer群是它自己的B子群. 群G的B子群是Baer群，但是G的Baer子群不一定是G的B子群，如A_5的Sylow 2-子群.

定理5 设$H\trianglelefteq G$，且G/H超可解，则下列论断等价：

(1) G超可解.

(2) H是弱Sylow塔B子群.

(3) H 是 G 的 B 子群，且 H 的每个真子群都是($p_1,\cdots,p_r$)Sylow 塔群，其中 $\pi(H)=\{p_1,\cdots,p_r\}$.

(4) H 是 Sylow 塔 B 子群.

(5) H 是 G 的超可解 B 子群.

(6) 对 H 的每个 p 子群 S，$N_G(S)/C_G(S)$ 严格 p-闭.

(7) 对 G 的每个 p 子群 S，$N_G(S)/C_G(S)$ 严格 p-闭.

(8) G 的所有子群都是 Baer 群.

证明 考察[1, Chap. 1, Theorem 1.12]的证明可知：(1)⇒(7).

下证：(2)⇒(1). 对 $|G|$ 用归纳法. 不妨设 $|H|\neq 1$.

设 P 是 H 的正规 Sylow p-子群. 由 $P\operatorname{Char}H$ 知：$P\trianglelefteq G$. 设 $P\leqslant S\in \mathrm{Syl}_p(G)$，由 $\overline{G}=G/C_G(P)$ 严格 p-闭知：$\overline{S}\trianglelefteq\overline{G},\overline{S}\in\mathrm{Syl}_p(\overline{G})$，进而 $\dfrac{G}{SC_G(P)}\cong\overline{G}/\overline{S}$ 为方次数能整除 $p-1$ 的交换群，故 $SC_G(P)\geqslant G'$. 因为 $P\trianglelefteq S$，所以 $Z=Z(S)\cap P\neq 1$，由 $C_G(Z)\geqslant SC_G(P)$ 知：$C_G(Z)\trianglelefteq G$. 设 $C=Z(C_G(Z))=K\times L$，$K\in\mathrm{Syl}_p(C)$，L 是 C 的 p'-Hall 子群. 由于 $C\geqslant Z$，$Z\leqslant K^x$，$x\in C$，故 $Z\leqslant K$. 又 $K\leqslant S^g$，$g\in C_G(Z)$，故 $K\leqslant S$. 但 $[K,C_G(Z)]=1$，故 $[K,S]=1$，$K\leqslant Z(S)$. 因为 $K\operatorname{Char}C\operatorname{Char}C_G(Z)\trianglelefteq G$，所以 $K\trianglelefteq G$. 又 $G\trianglerighteq P\cap K\geqslant Z\neq 1$. 设 $N\leqslant P\cap K$ 是 G 的极小正规子群，则 $C_G(N)\geqslant SC_G(P)$，进而 $G/C_G(N)$ 为方次数能整除 $p-1$ 的交换群，故 $|N|=p$. 令 $\overline{G}=G/N$，对于任意 $\overline{S}\in\mathrm{Syl}_q(\overline{H})$ 可设 $S\in\mathrm{Syl}_q(SN)$，此时 $N_{\overline{G}}(\overline{S})=\overline{N_G(S)}$，且 φ: $N_G(S)/C_G(S)\rightarrow\overline{N_G(S)}/C_{\overline{G}}(\overline{S})$，$g\rightarrow\overline{g}C_{\overline{G}}(\overline{S})$ 是满态，故 $N_{\overline{G}}(\overline{S})/C_{\overline{G}}(\overline{S})$ 严格 p-闭，又 $\overline{H}\trianglelefteq\overline{G}$ 是弱 Sylow 塔群，故 $\overline{G}$ 超可解，进而 G 超可解.

容易看出：(7)⇒(6)⇒(2)⇒(1)⇒(5)⇒(4)⇒(3)⇒(2)⇒(1)⇒(8)⇒(1)⇒(7)⇒(8). 故定理得证.

注 取 $H=G$ 可得到定理1 (Baer) 的推广.

当 G 的正规子群 N 为 p'-群或循环 p-群时，由 G/N 为 p-超可解可推出 G 为 p-超可解. p-幂零 π-闭群的子群、商群和直积仍是 p-幂零 π-闭群. 如果 p 是 $|G|$ 的最小素因子，则 p-超可解群必为 p-幂零 π-闭群 (注：由[1, Chap. 1, Theorem 1.12]的证明知，p-超可解群一定是 p-Baer 群). 仿照定理5的证明我们获得 p-超可解群相应于 Baer 的结果：

系理 设 $H\trianglelefteq G$，p 为 $|H|$ 的最小素因子，且 G/H 为 p-超可解群，则下列论断等价：

(1) G 为 p-超可解群.

(2) H 是 p-幂零 π-闭群，且对于 $S\in\mathrm{Syl}_p(H)$，$N_G(S)/C_G(S)$ 严格 p-闭.

(3) H 是 p-超可解群，且对于 $S\in\mathrm{Syl}_p(H)$，$N_G(S)/C_G(S)$ 严格 p-闭.

(4) 对于 H 的每个 p-子群 S，$N_G(S)/C_G(S)$ 严格 p-闭.

(5) 对于 G 的每个 p-子群 S，$N_G(S)/C_G(S)$ 严格 p-闭.

(6) G 的所有子群都是 p-Baer 群.

设 $\pi(G)=\{p_1,\cdots,p_r\}$，$p_1>\cdots>p_r$，$\pi(i)=\{p_i,\cdots,p_r\}$，$G(i)\in\mathrm{Syl}_{p_i}(G)$，$H(i)$ 是 G 的 $\pi(i)$ 极大子群. 由定义及归纳法易知：

引理10 群 G 为 Sylow 塔群当且仅当对于每个 i 都存在 $G(i)$ 和 $H(i)$ 使得 $H(i)\leqslant N_G(G(i))$ (此条件等价于 $G(i)\trianglelefteq H(i)$).

引理11 设 H 是 G 的 $\pi(i)$ 极大子群，$S \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G), S \leqslant H$. 如果对于每个 i 都存在 $G(i)$ 和 $H(i)$ 使得 $H(i) \leqslant N_G(G(i))$，则 $S \trianglelefteq H$.

定理6 群 G 超可解当且仅当对每个 i 都存在 $G(i)$ 与 $H(i)$ 使得：(a) $H(i) \leqslant N_G(G(i))$，且 (b) $H(i)/C_{H(i)}(G(i))$ 严格 p-闭.

引理12 设 M 与 N 是 G 的正规子群. 如果 G/M 和 G/N 都是 Baer（p-Baer）群，则 $\dfrac{G}{M \cap N}$ 也是 Baer（p-Baer）群.

证明 设 $X = \overline{G} = \dfrac{G}{M \cap N}, Y = \dfrac{G}{M} \times \dfrac{G}{N}$. 由于当 $\overline{P} = \mathrm{Syl}_p(\overline{G})$ 时可设 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$，故 $PM/M \in \mathrm{Syl}_p(G/M)$，$PN/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$. 所以 $\dfrac{PM}{M} \times \dfrac{PN}{N} \in \mathrm{Syl}_p(Y), N_Y(\dfrac{PM}{M} \times \dfrac{PN}{N}) = N_{G/M}(PM/M) \times N_{G/N}(PN/N)$，且 $C_Y(\dfrac{PM}{M} \times \dfrac{PN}{N}) = C_{G/M}(PM/M) \times C_{G/N}(PN/N)$. 若 $\overline{g} \in N_X(\overline{P})$，则 $P^g \leqslant P(M \cap N) \leqslant PM \cap PN$，所以 $(PM)^g = PM$，$(PN)^g = PN$，故 $(gM, gN) \in N_Y(\dfrac{PM}{M} \times \dfrac{PN}{N})$. 若 $\overline{g} \in C_X(\overline{P})$，则 $[g, P] \leqslant M \cap N$，故 $(gM, gN) \in C_Y(\dfrac{PM}{M} \times \dfrac{PN}{N})$. 故

$$\varphi\colon N_X(\overline{P})/C_X(\overline{P}) \to N_Y(\frac{PM}{M} \times \frac{PN}{N})/C_Y(\frac{PM}{M} \times \frac{PN}{N}),$$

$$\overline{g}C_X(\overline{P}) \to (gM, gN)C_Y(\frac{PM}{M} \times \frac{PN}{N})$$

是同态. 若 $\overline{g} \in N_X(\overline{P}), (gM, gN) \in C_Y(\dfrac{PM}{M} \times \dfrac{PN}{N})$，则对于任意 $y \in P$ 有 $(M, N) = [(gM, gN), (yM, yN)] = ([g, y]M, [g, y]N)$，故 $[g, y] \in M \cap N, [\overline{g}, \overline{P}] = \overline{1}$，$\overline{g} \in C_X(\overline{P})$，进而 φ 是单态. 所以 $N_X(\overline{P})/C_X(\overline{P})$ 严格 p-闭，$\dfrac{G}{M \cap N}$ 为 Baer 群. □

引理13[6] 设 P 是 G 的一个 π-子群，而 N 是 G 的一个 π'-正规子群，则有：

$$C_{G/N}(PN/N) = C_G(P)N/N.$$

依照引理12易证：

定理7 设 $N \trianglelefteq G, \overline{G} = G/N$.

(1) 如果 $G/\Phi(G)$ 是 Baer（p-Baer）群，则 $\overline{G}/\Phi(\overline{G})$ 也是 Baer（p-Baer）群.

(2) 如果 $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$，$(|S|, |N|) = 1$，则 $N_G(S)/C_G(S) \cong N_{\overline{G}}(\overline{S})/C_{\overline{G}}(\overline{S})$.

定理8 如果 $\overline{G} = G/\Phi(G)$ 是可解的 Baer（p-Baer）群，则 G 是可解的 Baer（p-Baer）群.

证明 当 G 是超可解群时由定理1（Baer）得证. 故对 $|G|$ 运用归纳法时可设 G 非超可解，此时 $\overline{G}$ 也非超可解，并且还可设 $F(G) > \Phi(G) > 1$ 是 p-群. 故 $F(G) \leqslant S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. 又因为 $N = N_G(S) = S \rtimes M$（M 为 N 的 p'-Hall 子群），$C_G(S) \leqslant C_G(F(G)) \leqslant F(G) \leqslant S$，所以 $C_G(S) = C_N(S) = Z(S)$. 同理 $C_{\overline{G}}(\overline{S}) = Z(\overline{S})$. 显然，$S/Z(S) \in \mathrm{Syl}_p(N_G(S)/Z(S))$，$\overline{S}/Z(\overline{S}) \in \mathrm{Syl}_p(N_G(\overline{S})/Z(\overline{S}))$，且 $\dfrac{N_{\overline{G}}(\overline{S})/Z(\overline{S})}{\overline{S}/Z(\overline{S})} \cong N_{\overline{G}}(\overline{S})/\overline{S} \cong N_G(S)/S \cong \dfrac{N_G(S)/Z(S)}{S/Z(S)}$，故 G 为可解的 Baer 群.

由此，可解的 Baer（p-Baer）群系是饱和的．虽然我们还不知道 Baer 群系是否饱和，但是用转移方法可获得下面一个比较令人满意的结果．

定义6 设 G 是非 Baer 群．如果 G 的任何真商群（不同构于1或 G）都是 Baer 群，则 G 叫做外 Baer 群．

定理9 设 G 为外 Baer 群，$\Phi(G) \neq 1$，则

(1) G 恰有一个极小正规子群 N．

(2) 对于每个 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$，$P \geqslant N \nsubseteq \Phi(P)$，其中 $p \mid |N|$．

(3) $F(G)$ 为初等交换 p-群，且 $1 < N \leqslant \Phi(G) \leqslant F(G)$，$C_G(N) = C_G(\Phi(G)) = C_G(F(G)) = F(G)$．

(4) $C_G(P) = Z(P) \leqslant F(G)$．

(5) G 非可解且非 p-正规．

(6) N 非循环．

证明 (1) 显然．

(2) 若 $N \leqslant \Phi(P)$，设 $\overline{G} = G/N$，且可设 $N_G(P) = P \rtimes M$，其中 M 为 P 在 $N_G(P)$ 中的补．显然，$C_G(P) = Z(P) \times C_M(P)$，$N_{\overline{G}}(\overline{P}) = \overline{P} \rtimes \overline{M}$，且 $C_{\overline{G}}(\overline{P}) = Z(\overline{P}) \times C_{\overline{M}}(\overline{P})$．设 $K = \{k \in M \mid [k,P] \leqslant N\}$，则 $K \leqslant M$，$C_{\overline{M}}(\overline{P}) = \overline{K}$，$KN \trianglelefteq N_G(P)$．因为 $\overline{K} \times \overline{P} \trianglelefteq \overline{N_G(P)}$，所以 $P \rtimes K \trianglelefteq N_G(P)$，$\dfrac{P \rtimes K}{\Phi(P)} = \dfrac{P}{\Phi(P)} \times \dfrac{K\Phi(P)}{\Phi(P)}$ 为 p- 幂零，而 $\Phi(P) \leqslant \Phi(N_G(P))$，故 $P \rtimes K/\Phi(N_G(P))$ 为 p- 幂零，所以 $P \rtimes K$ 为 p- 幂零，因此 $P \rtimes K = P \times K$，进而 $K \leqslant C_M(P) \leqslant K$，$C_M(P) = K$．显然，$\overline{P}C_{\overline{G}}(\overline{P})/C_{\overline{G}}(\overline{P}) \in \mathrm{Syl}_p(N_{\overline{G}}(\overline{P})/C_{\overline{G}}(\overline{P}))$，且 $\dfrac{N_{\overline{G}}(\overline{P})}{\overline{P}C_{\overline{G}}(\overline{P})} \cong \dfrac{\overline{N_G(P)}}{\overline{P \times C_M(P)}} = \overline{N_G(P)}/\overline{P \times C_M(P)} \cong \dfrac{N_G(P)}{P \times C_M(P)} = \dfrac{N_G(P)}{PC_G(P)} \cong \dfrac{N_G(P)/C_G(P)}{PC_G(P)/C_G(P)}$，故 $N_G(P)/C_G(P)$ 为严格 p- 闭．因此 G 为 Baer 群，矛盾．

(3) 因为 $\Phi(F(G)) \trianglelefteq G$，所以 $F(G)$ 为初等交换 p-群．可设 $C_G(N) = C \trianglelefteq G$，若 C 不是 p-群，令 $V = V_{C \to S}$，其中 $S = S \cap P \in \mathrm{Syl}_p(C)$，取 $K = \mathrm{Ker}\, V$．由 (2)，存在 $n \in N$，$n \notin S'$．由[2，(5.1)]知：

$$V(n) = \prod_{i=1}^{t} x_i n^{f_i} x_i^{-1} S' = n^{[C:S]} S',$$

故 $n \notin K$，$K < C$．取 $|C|$ 的素因子 $q \neq p$，x 为 C 的 q 阶元，则 $x \in K$；又对于任意 $g \in G$，$x^g \in C^g = C$，故 $x^g \in K$，$G \trianglerighteq X =: \langle x^g \mid g \in G \rangle \leqslant K$，$1 \neq N \cap X \leqslant K$，进而 $N \cap X = N, N \leqslant K$，矛盾．故 C 是 p-群，情形 (3) 成立．

(4) 因为 $C_G(P) \leqslant C_G(N) \leqslant P$，所以 $C_G(P) = Z(P) \leqslant C_G(N) \leqslant F(G)$．

(5) 假设 G 为 p-正规．因为对于任意 $g \in G$，$(Z(G)^g \leqslant C_G(N)^g = F(G) \leqslant P$，所以 $Z(P)^g = Z(P)$，从而 $Z(P) \triangleleft G$，而 $1 \neq Z(P) \geqslant N$，故 $C_G(N) = P$，$P \trianglelefteq G$ 是初等交换 p-群，又 $\Phi(G)$ 在 P 中有补，故 $\Phi(G)$ 在 G 中有补（注意：这里可不用上同调的 W. Gasch ütz 结果)，与情形 (3) 矛盾．

(6) 若 N 循环，则 $|N| = p$，进而 $N \leqslant Z(P)$，其中 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$．因此，$C_G(N) = P$，由 (3) 知：P 可换，与 (5) 矛盾．　□

参考文献：

[1] MICHAEL W. *Between Nilpotent and Solvable* [M]. Polygonal Publishing House, 80 Passaic Avence, Passaic, NJ07055 USA.

[2] 徐明曜. 有限群导引（上册）[M]. 北京：科学出版社，1987.
XU Ming-yao. *Introduction to the Finite Groups I* [M]. Beijing: Science Press, 1987.

[3] HUPPERT B. *Endliche Gruppen I* [M]. Berlin Hildelberg-New York: Springer-Verlag, 1979.

[4] GORENSTEIN D. *Finite Groups* [M]. Northeastern University, Chelsea Publishing Company, New York, N. Y., 1980.

[5] HUPPERT B. BLACKBURN N. *Finite Groups III* [M]. Berlin Heidelbery-New York: Springer-Verlag, 1982.

[6] KURZWELL H. *Endliche Gruppen* [M]. Berlin Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1977.

Influence of Baer's Conditions on Groups

BAN Gui-ning[1], PANG Su-lin[2], ZHAO Xiao-hai[3]

(1. Dept. of Math., Guangxi University, Nanning 530004, China;

2. Dept. of Automatic Control and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China;

3. Guangxi Broadcasting University, Nanning 530022, China)

Abstract: In this paper, the supersolvable groups and p-supersolvable groups are investigated by some new techniques. We obtain some important results. By these results, we expand a Baer's theorem.

Key words: Supersolvable group; p-supersolvable group; Sylow tower property; strictly p-closed group.