第26卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.2
2006年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2006

文章编号: 1000-341X(2006)02-0341-13 **文献标识码**: **A**

基于完备 BR_0- 代数的全蕴涵三 I 算法

吴洪博， 王国俊， 于鸿丽
(陕西师范大学数学研究所，陕西 西安 710062)
(E-mail: whbshanxi@yahoo.com.cn)

摘 要: 研究了基础 BR_0- 代数的性质和基于完备基础 BR_0- 代数的全蕴涵三 I 算法，对一般蕴涵算子给出了三 I 算法解存在的一个充分条件，并将结果应用于 R_0- 单位区间 $\overline{W}$, 不但极大的简化了 R_0- 单位区间 $\overline{W}$ 的 R_0- 型 α- 三 I 算法结果的证明，而且使其证明过程与相应的模糊命题演算系统结合起来，说明了 R_0- 型三 I 算法是与 $B\mathcal{L}^*$ 系统相匹配的模糊推理方法.

关键词: 模糊逻辑；基础 BR_0- 代数； R_0- 单位区间；三 I 算法；基础 $\mathcal{L}^*$ 系统.
MSC(2000): 03B52
中图分类: O141.1

1 引 言

模糊推理是模糊控制的理论基础. 在一个模糊控制系统中，当输入为 A 时，结果是 B, 现输入为 A^*, 结果如何？将其转化为推理模型是：

问题 1.1

$$\begin{array}{rlcl} \text{已知} & A & \longrightarrow & B \\ \text{且给定} & A & & \\ \hline \text{求} & & & B^* \end{array} \tag{1.1}$$

模糊推理有多种不同的方法 [1−6], 其基本思想是：

i) 把 A, B, A^* 以及待求的 B^* 用 Fuzzy 集来表示，这时就可对它们进行运算.

ii) 把蕴涵算式 $A \to B$ 转化为 $X \times Y$ 上的一个模糊关系 R, 即转化成映射 $R: X \times Y \to [0,1]$.

iii) 把给定 A^*(即输入) 与第二步中的模糊关系 R 作合成即得输出 $B^* = A^* \circ R$.

例如： Zadeh 的合成推理方法 (Compositional Rule of Inference) 是

$$B^*(y) = \sup_{x \in X}[A^*(x) \wedge R(x,y)] = \sup_{x \in X}[A^*(x) \wedge R_z(A(x), B(y))],$$

这里， R_z 表示 Zadeha 蕴涵算子.

王国俊于 [4,7] 中建立了模糊命题演算的形式演绎系统 $\mathcal{L}^*$ 和与之在语义上相匹配的 R_0- 代数，并提出了模糊推理全蕴涵三 I 方法 [8], 将模糊推理的实用性和数学的严谨性较好的结合起来. 模糊推理全蕴涵三 I 方法的基本思想是：

设 A, A^*, B 是模糊集，则问题 (1.1) 中的 B^* 是使

$$(A(x) \to B(x)) \to (A^*(x) \to B^*(y)) \tag{1.2}$$

收稿日期: 2004-04-05
基金项目: 国家自然科学基金 (10471083), 陕西师范大学重点科研基金 (995130)

取最大值时的最小模糊集.

(1.2) 式中的最大值与赋值格和蕴涵算子的定义有关，王国俊于文献 [4,8] 中就部分蕴涵算子给出了问题 (1.1) 在 (1.2) 式意义下有解的一个充分条件. 模糊推理方式的多样性最主要地体现在 (1.2) 中可选取蕴涵算子的多样性 [4], 而蕴涵算子的多样性决定了赋值格的多样性. 本文中所选取的赋值格是由 BR_0 算子确定的基础 BR_0- 代数 [10] 和 R_0- 单位区间 $\overline{W}$[4], 本文的主要结构如下：

1). 讨论基于基础 BR_0- 代数的模糊推理全蕴涵三 I 算法，同时，就一般蕴涵算子给出了解存在的一个充分条件.

2). 将基于 BR_0- 代数的模糊推理全蕴涵三 I 算法应用于 R_0- 单位区间 $\overline{W}$, 简化文献 [8] 中三 I 算法结果的证明，更加体现三 I 算法与相应的逻辑系统的密切联系.

3). 将基于完备基础 BR_0- 代数的模糊推理全蕴涵三 I 算法与基础模糊命题演算形式演绎系统 $\mathcal{L}^*$ 结合起来，从而更加体现了这种算法所具有的数学严谨性，同时也说明了 R_0- 型三 I 算法是与基础 $\mathcal{L}^*$ 系统相匹配的模糊推理方法.

2 基于完备基础 BR_0- 代数的模糊推理全蕴涵三 I 算法

R_0- 代数是王国俊于文献 [4] 中为模糊命题演算的形式演译系统 $\mathcal{L}^*$ 而建立的相匹配的语义部分. 本文第一作者在王国俊指导下于文献 [10,11] 中提出了基础 BR_0- 代数理论，而将 R_0- 代数作为基础 BR_0- 代数的特例，并于文献 [10,11] 中证明了著名的 MV- 代数就是基础 BR_0- 代数的另一特例. 本节中我们讨论基于完备基础 BR_0- 代数的模糊推理全蕴涵三 I 算法.

定义 2.1[10] 设 M 是 $(\neg,\vee,\to)$ 型代数，如果：

① M 上有偏序 $\le$ 使 $(M,\le)$ 成为有界分配格，且 $\vee$ 是关于序 $\le$ 而言的 M 中的上确界运算;

② $\neg$ 是关于序 "$\le$" 而言的逆序对合对应.

③ 对 $a,b,c\in M$, 以下条件成立.

$$\begin{aligned}
&BR_0C_1:\ \neg a\to\neg b=b\to a.\\
&BR_0C_2:\ 1\to a=a, a\to a=1.\\
&BR_0C_3:\ b\to c\le(a\to b)\to(a\to c).\\
&BR_0C_4:\ a\to(b\to c)=b\to(a\to c).\\
&BR_0C_5:\ a\to b\vee c=(a\to b)\vee(a\to c).\\
&\qquad\qquad a\to b\wedge c=(a\to b)\wedge(a\to c)
\end{aligned}$$

(这里 1 是 M 的最大元，并以 0 记 $\neg 1$).

那么称 M 为基础 BR_0- 代数，记作 BR_0- 代数 M, 并将 $a\to b$ 记作 $R_0(a,b)$. 再若 M 是一个完备格，则称 M 是完备基础 BR_0- 代数.

注：这里给出完备基础 BR_0- 代数的概念是因为后面在求解模糊推理全蕴涵三 I 算法时要用到 M 中任一子集的上确界或下确界.

性质 2.1[10] 设 M 是 BR_0- 代数， $a,b\in M$, 则

$$a\le b\ \text{当且仅当}\ R_0(a,b)\le 1.$$

证明 必要性. 若 $a \le b$, 则 $b = a \vee b$. 由 bR_0C5 得

$$R_0(a,b) = R_0(a, a\vee b) = R_0(a,a) \vee R_0(a,b) = 1.$$

若 $R_0(a,b) = 1$, 从而由 BR_0C2 得

$$(R_0(a,b), R_0(1,b)) = R_0(1,b) = b \tag{1}$$

又由 BR_0C1 并结合 BR_0C3 得:

$$R_0((a,b), R_0(1,b)) = R_0((\neg b, \neg a), R_0(\neg b, 0)) \ge R_0(\neg a, 0) = R_0(1,a) \tag{2}$$

结合 (1),(2) 并再次应用 BR_0C1 得 $b \ge a$

定义 2.2[10] 设 M 是 BR_0- 代数，定义 $\otimes : M^2 \to M$, 对 $(a,b) \in M^2, \otimes(a,b) = a \otimes b = \neg(a \to \neg b)$. 并称 $\otimes$ 为 M 上的圈乘运算.

性质 2.2[10] 设 M 是 BR_0- 代数，$a,b,c \in M$, 则 1) $a\otimes b = b \otimes a$; 2) $(a\otimes b)\otimes c = a \otimes (b \otimes c)$. 即圈乘运算满足交换律，结合律.

证明 1) $a \otimes b = \neg(a \to \neg b) = \neg(b \to \neg a) = b \otimes a$.

$$\begin{aligned} 2)\quad (a\otimes b)\otimes c &= \neg(a\otimes b \to \neg c) = \neg(\neg(a \to \neg b) \to \neg c) \\ &= \neg(c \to (a \to \neg b)) = \neg(a \to (c \to \neg b)) \\ &= \neg(\neg(c \to \neg b) \to \neg a) = \neg(c \otimes b \to \neg a) \\ &= (c \otimes b) \otimes a) = a \otimes (b \otimes c). \end{aligned}$$

性质 2.3[10] 设 M 是 BR_0- 代数， $a,b,c \in M$, 则

$$a \otimes b \to c = a \to (b \to c).$$

证明 $a \otimes b \to c = \neg(a \to \neg b) \to c = \neg c \to (a \to \neg b) = a \to (\neg c \to \neg b) = a \to (b \to c)$.

注 结合性质 2.1 和性质 2.3 可得

$$a \otimes b \le c \text{ 当且仅当 } a \otimes b \to c = 1 \text{ 当且仅当 } a \to (b \to c) = 1 \text{ 当且仅当 } a \le b \to c.$$

因此两种运算 $\otimes, \to$ 是 BR_0- 代数 M 中的伴随对 [4]. 这一结果同时也表明在完备 BR_0- 代数 M 中， $(\vee_i x_i) \otimes a = \vee_i (x_i \otimes a), a \to \wedge_i y_i = \wedge_i (a \to y_i)$[4].

性质 2.4[10] 在 BR_0- 代数中， $R_0(a,y) = a \to y$ 关于 y 是保序映射.

证明 设 M 是 BR_0- 代数， $a, y_1, y_2 \in M_1, y_1 \le y_2$, 由 BR_0C3 和性质 2.1 得

$$R_0(a \to y_1) \to R_0(a \to y_2) \ge y_1 \to y_2 = 1.$$

因此由性质 2.1 得 $R_0(a \to y_1) \le R_0(a \to y_2)$.

性质 2.5[10] 设 M 是 BR_0- 代数， $a,b \in M$, 则 $a \otimes (a \to b) \le b$.

证明

$$\begin{aligned} a \otimes (a \to b) \to b &= \neg[a \to \neg(a \to b)] \to b \\ &= \neg b \to (a \to \neg(a \to b)) = \neg b \to ((a \to b) \to \neg a) \\ &= (a \to b) \to (\neg b \to \neg a) = (a \to b) \to (a \to b) \\ &= 1. \end{aligned}$$

由性质 2.1 则得 $a \otimes (a \to b) \le b$.

性质 2.6[10] 在 BR_0- 代数中 $R_0(x,b)=x\to b$ 关于 x 是逆序映射.

证明 设 M 为 BR_0- 代数, $x_1 \le x_2$, 由 BR_0C1, BR_0C3, BR_0C2 得

$$R_0(x_2,b)\to R_0(x_1,b)=R_0(\neg b\to\neg x_2)\to R_0(\neg b\to\neg x_1)\ge \neg x_2\to\neg x_1=x_1\to x_2=1.$$

因此由性质 2.1 得 $R_0(x_2,b)\le R_0(x_1,b)$.

定义 2.3 设 M 是一完备 BR_0- 代数, X 是任一非空集合, $F: X\to M$ 是从 X 到 M 的一个映射, 则称 F 是论域 X 上的一个 M- Fuzzy 集, 论域 X 上的全体 M-Fuzzy 集构成的集族记作 $\mathcal{F}(X)$.

定义 2.4[8] (R_0- 型全蕴涵 α- 三 I 规则) 设 M 为 BR_0- 代数, $\alpha\in M, A, A^*\in\mathcal{F}(X), B\in\mathcal{F}(Y)$, 则问题 (1.1) 式中的解 B^* 是 $\mathcal{F}(Y)$ 中使 $(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y))\ge\alpha$, 即

$$R_0(R_0(A(x),B(y)),R_0(A^*(x),B^*(y)))\ge\alpha. \tag{2.1}$$

对任意 $(x,y)\in X\times Y$ 都成立的最小 Fuzzy 集, 在此规则下求解 B^* 的方法称为 R_0- 型全蕴涵 α- 三 I 方法.

当 $\alpha=1$ 时, 称 R_0- 型全蕴涵 α- 三 I 规则为 R_0- 型全蕴涵三 I 规则, 称相应的求解 B^* 的方法为 R_0- 型全蕴涵三 I 算法.

注 这里 (2.1) 可理解问题 (1.1) 的解 $B^*\in\mathcal{F}(Y)$ 应使已知 $A(x)\to B(y)$ 对 $A^*(x)\to B^*(y)$ 的支持度 [4] 不小于 α, 而 $\alpha=1$ 时问题 (1.1) 的解 $B^*\in\mathcal{F}(Y)$ 应使已知 $A(x)\to B(y)$ 全力支持 $A^*(x)\to B^*(y)$.

定理 2.1 在完备 BR_0- 代数中, 问题 (1.1) 关于 R_0- 型全蕴涵 α- 三 I 规则的解是存在的, 且

$$B^*(y)=\sup_{x\in X}[A^*(x)\otimes R_0(A(x),B(y))\otimes\alpha].$$

证明 首先证明对任意 $(x,y)\in X\times Y$,

$$(A(x)\to B(x))\to(A^*(x)\to A^*(x)\otimes R_0(A(x),B(y))\otimes\alpha)\ge\alpha.$$

这是因为根据性质 2.3, 性质 2.4,BR_0C2 有

$$\begin{aligned}
&\alpha\to((A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to A^*(x)\otimes R_0(A(x),B(y))\otimes\alpha)\\
&=\alpha\otimes(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to A^*(x)\otimes R_0(A(x),B(y))\otimes\alpha)\\
&=\alpha\otimes R_0(A(x),B(y))\otimes A^*(x)\to A^*(x)\otimes R_0(A(x),B(y))\otimes\alpha\\
&=A^*(x)\otimes R_0(A(x),B(y))\otimes\alpha\to A^*(x)\otimes R_0(A(x),B(y))\otimes\alpha\\
&=1,
\end{aligned}$$

从而由性质 2.1 得

$$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to A^*(x)\otimes R_0(A(x),B(y))\otimes\alpha)\ge\alpha.$$

其次证明对 $B^*(y)\in\mathcal{F}(Y)$. 若

$$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y))\ge\alpha,$$

则有

$$A^*(x) \otimes R_0(A(x), B(y)) \otimes \alpha \leq B^*(y). \tag{1}$$

这是因为若

$$(A(x) \to B(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y)) \geq \alpha$$

由性质 2.1 得

$$\alpha \to ((A(x) \to B(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y))) = 1$$

从而由性质 2.3, 性质 2.2 得

$$A^*(x) \otimes R_0(A(x), B(y)) \otimes \alpha \to B^*(y) = 1,$$

再次由性质 2.1 得

$$A^*(x) \otimes R_0(A(x), B(y)) \otimes \alpha \leq B^*(y). \tag{2}$$

结合 (1),(2) 并根据性质 2.5 得

$$B^*(y) = \sup_{x \in X} [A^*(x) \otimes R_0(A(x), B(y)) \otimes \alpha].$$

推论 2.2 在完备 BR_0- 代数中，问题 (1.1) 在 R_0- 型全蕴涵三 I 算法规则下的解是存在的，且

$$B^*(y) = \sup_{x \in X} [A^*(x) \otimes R_0(A(x), B(y))].$$

证明 在定理 2.1 中取 $\alpha = 1$ 即可.

定义 2.5 如果当 A 与 B 满足条件 P 时由一种求解问题 (1.1) 式的算法当 $A^* = A$ 时求得的解 $B^* = B$, 则称这种算法为 P- 还原算法.

定理 2.3 在完备 BR_0- 代数中， R_0- 型全蕴涵三 I 算法是 P 还原算法，这里性质 P 指：存在 $a \in X$ 使得 $A(a) = 1$.

证明 由推论 2.2 知用 R_0- 型全蕴涵三 I 方法求得问题 (1.1) 的解 $B^*(y) = \sup_{x \in X}[A^*(x) \otimes R_0(A(x), B(y))]$. 当 $A^* = A$ 时，有

$$B^*(y) = \sup_{x \in X} [A^*(x) \otimes R_0(A(x), B(y))],$$

由性质 2.5 得

$$B^*(y) = \sup_{x \in X} [A(x) \otimes R_0(A(x), B(y))] \leq \sup_{x \in X} [B(y)] = B(y),$$

又由于存在 $a \in X$, 使得 $A(a) = 1$, 因此

$$\begin{aligned} B^*(y) &= \sup_{x \in X} [A(x) \otimes R_0(A(x), B(y))] \geq A^*(a) \otimes R_0(A(a), B(y)) \\ &= 1 \otimes R_0(1, B(y)) = B(y). \end{aligned}$$

因此 $B^*(y) = B(y)$.

下面我们应用全蕴涵三 I 方法在 BR_0- 代数中求解 FMT 问题.

Fuzzy Modus Tollens 问题 (简称 FMT 问题) 提法如下：

问题 2.2

$$\begin{array}{rccc} \text{已知} & A & \to & B \\ \text{且给定} & & & B^* \\ \hline \text{求} & A^* & & \end{array} \tag{2.2}$$

定义 2.6[8] (R_0- 型全蕴涵 α- 三 I FMT 规则) 设 M 是 BR_0- 代数中. $\alpha \in M, A \in \mathcal{F}(X), B^* \in \mathcal{F}(Y)$, 则问题 (2.2) 中的解 A^* 是 $\mathcal{F}(X)$ 中使 (2.1) 式对任意 $(x, y) \in X \times Y$ 恒成立的最大 Fuzzy 集，按此规则求解 (问题 2.2) 式中 A^* 的方法称为 R_0- 型全蕴涵 α- 三 I FMT 方法.

当 $\alpha = 1$ 时，称这种算法为 R_0- 型三 I FMT 方法.

定理 2.4 在完备 BR_0- 代数中，问题 2.2 关于 R_0- 型全蕴涵 α- 三 I FMT 规则的解是存在的，且

$$\begin{aligned} A^*(x) &= \inf_{y\in Y}[\alpha \to ((A(x) \to B(y)) \to B^*(y))] \\ &= \inf_{y\in Y}[R_0(\alpha, R_0(R_0(A(x), B(y)), B^*(y)))]. \end{aligned}$$

证明 首先证明对 $(x, y) \in X \times Y, \alpha \to ((A(x) \to B(y)) \to B^*(y))$ 满足 2.1 式，这是因为根据 BR_0C4 及 BR_0C2 得

$$\begin{aligned} &\alpha \to ((A(x) \to B(y)) \to ((\alpha \to ((A(x) \to B(y)) \to B^*(y))) \to B^*(y))) \\ &\quad = \alpha \to ((\alpha \to ((A(x) \to B(y)) \to B^*(y))) \to ((A(x) \to B(y)) \to B^*(y))) \\ &\quad = (\alpha \to ((A(x) \to B(y)) \to B^*(y))) \to (\alpha \to ((A(x) \to B(y)) \to B^*(y))) \\ &\quad = 1. \end{aligned}$$

因此由性质 2.1 得

$$(A(x) \to B(y)) \to ((\alpha \to ((A(x) \to B(y)) \to B^*(y))) \to B^*(y)) \geq \alpha. \tag{1}$$

其次证明若 $A^*(x) \in \mathcal{F}(X)$ 使得

$$(A(x) \to B(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y)) \geq \alpha.$$

则

$$\alpha \to ((A(x) \to B(y)) \to B^*(y)) \geq A^*(x). \tag{2}$$

这是因为若 $(A(x) \to B(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y)) \geq \alpha$. 由性质 2.1 得

$$\alpha \to ((A(x) \to B(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y))) = 1,$$

由性质 2.3 得

$$\alpha \to (A^*(x) \to ((A(x) \to B(y)) \to B^*(y))) = 1,$$

$$A^*(x) \to (\alpha \to ((A(x) \to B(y)) \to B^*(y))) = 1.$$

因此由性质 2.1 得 $A^*(x) \le \alpha \to ((A(x) \to B(y)) \to B^*(y))$ 由性质 2.6, 并结合 (1),(2) 得

$$\begin{aligned} A^*(x) &= \inf_{y \in Y}[\alpha \to ((A(x) \to B(y)) \to B^*(y))] \\ &= \inf_{y \in Y}[R_0(\alpha, R_0(R_0(A(x), B(y)), B^*(y)))]. \end{aligned}$$

推论 2.5 在完备 BR_0 代数中，问题 2.2 关于 R_0- 型全蕴涵三 IFMT 规则有解．而且

$$A^*(x) = \inf_{y \in Y}[R_0(R_0(A(x), B(y)), B^*(y))] = \inf_{y \in Y}[(A(x) \to B(y)) \to B^*(y)].$$

证明 在定理 2.4 中取 $\alpha = 1$ 并利用 BR_0C2 即可得本推论之结果.

定理 2.6 在完备 BR_0- 代数中 R_0- 型全蕴涵三 I FMT 算法具有 P 还原性．这里 P 指存在 $a \in Y$ 使得 $B(a) = 0$. 还原性指当 $B^* = B$ 时，利用 R_0- 型全蕴涵三 I FMT 算法求得问题 2.2 中的解 $A^* = A$.

证明 由推论 2.5 知问题 2.2 式关于 R_0- 型三 I FMT 算法解

$$A^*(x) = \inf_{y \in Y}[(A(x) \to B(y)) \to B^*(y)],$$

当 $B^* = B$ 时有 $A^*(x) = \inf\limits_{y \in Y}[(A(x) \to B(y)) \to B(y)]$, 由于存在 $a \in Y$ 使得 $B(a) = 0$, 因此

$$\begin{aligned} A^*(x) &= \inf_{y \in Y}[(A(x) \to B(y)) \to B(y)] \le (A(x) \to 0) \to 0 \\ &= \neg A(x) \to 0 = \neg\neg A(x) = A(x). \end{aligned} \tag{1}$$

又由于对任意 $y \in Y$

$$A(x) \to ((A(x) \to B(y)) \to B(y)) = (A(x) \to B(y)) \to (A(x) \to B(y)) = 1,$$

因此对任意 $y \in Y$, 有 $A(x) \le (A(x) \to B(y)) \to B(y)$, 因此

$$A^*(x) = \inf_{y \in Y}[(A(x) \to B(y)) \to B(y)] \ge \inf_{y \in Y} A(x) = A(x). \tag{2}$$

结合 (1),(2) 可知： $A^*(x) = A(x)$.

3 基于 R_0- 单位区间 $\overline{W}$ 的 R_0- 型三 I 算法

在文献 [4,8] 中，王国俊讨论了基于 R_0- 单位区间 $\overline{W}$ 的 R_0- 型三 I 算法，并取得了一些重要成果，本节我们将第二节的结果应用于 R_0- 单位区间 $\overline{W}$, 而将 R_0- 单位区间的结果看作是第二节的推论，这样做不但极大的改善了文献 [8] 中的证明过程，且更进一步体现了这种算法和相应的逻辑系统之间的密切联系.

首先我们应用 BR_0C5 证明 BR_0- 代数的一个重要性质.

性质 3.1 设 M 是 BR_0- 代数， $a, b \in M$, 则

$$a \to b \ge \neg a \vee b.$$

证明 因为

$$\begin{aligned}\neg a\vee b\to(a\to b)&=\neg(a\to b)\to\neg(\neg a\vee b)=\neg(a\to b)\to a\wedge\neg b\\&=(\neg(a\to b)\to a)\wedge(\neg(a\to b)\to\neg b)=(\neg a\to(a\to b))\wedge(b\to(a\to b))\\&=(\neg a\to(\neg b\to\neg a))\wedge(b\to(a\to b))=(\neg b\to(\neg a\to\neg a))\wedge(a\to(b\to b))\\&=1,\end{aligned}$$

因此由性质 2.1 知 $\neg a\vee b\leq a\to b$.

定义 3.1 设 M 是 BR_0- 代数，如果对于任意 $a,b\in M$, 有

$$BR_0C6:(a\to b)\vee((a\to b)\to\neg a\vee b)=1,$$

则称 M 为 R_0- 代数.

定理 3.1 设 M 是全序 R_0- 代数，则若 $a>b$ 时， $a\to b=\neg a\vee b$.

证明 由于 $a\not\leq b$, 因此由性质 2.1 可知 $a\to b<1$, 又 M 是全序 BR_0- 代数, 由条件 BR_0C6 得 $(a\to b)\to\neg a\vee b=1$, 因此由性质 2.1 得 $a\to b\leq\neg a\vee b$. 再结合性质 3.1 得 $a\to b=\neg a\vee b$.

定义 3.2[4] 设 $I=[0,1]$, 在 I 上规定

$$a\vee b=\max\{a,b\},\quad\neg a=1-a,\quad a\to b=\begin{cases}1 & a\leq b,\\ \neg a\vee b & a>b\end{cases}$$

则 $(I,(\vee,\neg,\to))$ 是一个 R_0- 代数，并称此 R_0- 代数为 R_0- 单位区间，记作 $\overline{W}$.

显然 R_0- 单位区间是一个完备 BR_0- 代数，因而是一个完备 R_0- 代数.

推论 3.1 在 R_0- 单位区间 $\overline{W}$ 中，问题 (1.1) 式关于 R_0- 型三 I 规则的解是存在的，而且

$$B^*(y)=\sup_{x\in E_y}[A^*(x)\wedge R_0(A(x),B(y))],$$

其中 $E_y=\{x\in X|(A^*(x)'<R_0(A(x),B(y)))\}$.

证明 由推论 2.2 知其解存在，而且

$$\begin{aligned}B^*(y)&=\sup_{x\in X}[A^*(x)\otimes R_0(A(x),B(y))]\\&=\sup_{x\in X}[\neg(A^*(x)\to\neg R_0(A(x),B(y))]\\&=\sup_{\substack{x\in X\\A^*(x)\leq\neg R_0(A(x),B(y))}}[\neg(A^*(x)\to\neg R_0(A(x),B(y)))]\vee\\&\quad\sup_{\substack{x\in X\\A^*(x)>\neg R_0(A(x),B(y))}}[\neg(A^*(x)\to\neg R_0(A(x),B(y)))]\\&=\sup_{\substack{x\in X\\A^*(x)\leq\neg R_0(A(x),B(y))}}[0]\vee\sup_{x\in X_y}[\neg(\neg A^*(x)\vee\neg R_0(A(x),B(y)))]\\&=\sup_{x\in E_y}[A^*(x)\wedge R_0(A(x),B(y))].\end{aligned}$$

推论 3.2 在 R_0- 单位区间 $\overline{W}$ 中，对 $\alpha\in\overline{W}$, 问题 (1.1) 关于 R_0- 型全蕴涵 α- 三 I 规则的解是存在的，而且

$$B^*(y)=\sup_{x\in E_y\cap K_y}[A^*(x)\wedge R_0(A(x),B(y))]\wedge\alpha,$$

其中

$$E_y = \{x \in X | (A^*(x))' < R_0(A(x), B(y))\},$$

$$K_y = \{x \in X | \alpha' < A^*(x) \wedge R_0(A(x), B(y))\}.$$

证明 由定理 2.3 知其解存在，而且

$$\begin{aligned}
B^*(y) &= \sup_{x\in X}[A^*(x) \otimes R_0(A(x), B(y)) \otimes \alpha] \\
&= \sup_{\substack{x\in X \\ (A^*(x)) \leq R_0(A(x),B(y))}} [(\neg(A^*(x) \to \neg R_0(A(x), B(y))) \otimes \alpha] \bigvee \\
&\quad \sup_{\substack{x\in X \\ (A^*(x)) > R_0(A(x),B(y))}} [(\neg(A^*(x) \to \neg R_0(A(x), B(y))) \otimes \alpha] \\
&= \sup_{\substack{x\in X \\ (A^*(x))' < R_0(A(x),B(y))}} [\neg(\neg A^*(x) \bigvee \neg R_0(A(x), B(y))) \otimes \alpha] \\
&= \sup_{\substack{x\in X \\ (A^*(x))' < R_0(A(x),B(y))}} [\neg(A^*(x) \wedge R_0(A(x), B(y)) \to \neg\alpha)] \\
&= \sup_{x\in E_y, x\in K_y} [A^*(x) \wedge R_0(A(x), B(y)) \wedge \alpha] \\
&= \sup_{x\in K_y \cap E_y} [A^*(x) \wedge R_0(A(x), B(y))] \wedge \alpha.
\end{aligned}$$

推论 3.3 在 R_0- 单位区间 $\overline{W}$ 中，问题 2.2 关于 R_0- 型全蕴涵 α- 三 I FMT 规则的解是存在的，而且

$$A^*(x) = \inf_{y\in E_x \cap K_x} [B^*(y) \vee R_0'(A(x), B(y))] \vee \alpha',$$

这里

$$E_x = \{y \in Y | B^*(y) < R_0(A(x), B(y))\},$$

$$K_x = \{y \in Y | B^*(y) \vee R_0'(A(x), B(y)) < \alpha\}.$$

证明 由定理 2.4 知其解存在，而且

$$\begin{aligned}
A^*(x) &= \inf_{y\in Y}[\alpha \to ((A(x) \to B(y)) \to B^*(y))] \\
&= \inf_{\substack{y\in Y \\ R_0(A(x),B(y)) \leq B^*(y)}} [\alpha \to 1] \wedge \inf_{\substack{y\in Y \\ R_0(A(x),B(y)) > B^*(y)}} [\alpha \to (R_0(A(x), B(y)) \to B^*(y))] \\
&= \inf_{y\in E_x} [\alpha \to R_0'(A(x), B(y)) \vee B^*(y))] \\
&= \inf_{\substack{y\in E_x \\ \alpha \leq R_0'(A(x),B(y)) \vee B^*(y)}} [1] \wedge \inf_{\substack{y\in E_x \\ y\in K_x}} [\neg\alpha \vee R_0'(A(x), B(y)) \vee B^*(y))] \\
&= \inf_{y\in E_x \cap K_x} [R_0'(A(x), B(y)) \vee B^*(y)] \vee \alpha'.
\end{aligned}$$

推论 3.4 在 R_0 单位区间 $\overline{W}$ 中，问题 2.2 关于 R_0- 型全蕴涵三 I FMT 规则的解是存在的，而且

$$A^*(x) = \inf_{y\in E_x} [R_0'(A(x), B(y)) \vee B^*(y)].$$

证明 在推论 3.3 中取 $\alpha=1$ 即可.

推论 3.5 ① 在 R_0- 单位区间 $\overline{W}$ 中，问题 (1.1) 的 R_0- 型全蕴涵三 I 算法是 P- 还原算法. 这里 P 指存在 $a\in X$, 使 $A(a)=1$.

② 在 R_0- 单位区间 $\overline{W}$ 中. 问题 (2.2) 的 R_0- 型全蕴涵三 I FMT 算法是 P- 还原算法，这里 P 指存在 $b\in Y$ 使得 $B(b)=0$.

证明 这里因为 R_0- 单位区间 $\overline{W}$ 就是一个完备 BR_0- 代数，因此应用定理 2.3, 定理 2.6 直接得本推论.

与文献 [4,8] 中的证明相比较，本文的证明不仅过程简单，而且充分利用了 R_0- 代数，特别是 BR_0- 代数的性质，不但使其过程更加合理，而且也体现了逻辑系统 $\overline{W}$ 在全蕴涵型三 I 推理方法中的作用.

4 R_0- 型全蕴涵三 I 算法与模糊命题形式演绎系统 $B\mathcal{L}^*$ 的关系

模糊命题演算形式演绎系统 $\mathcal{L}^*$ 是王国俊于 1997 年提出的 [12]. 其目的是为模糊控制中的模糊推理建立严格的理论基础. 我们对模糊命题演算形式演绎系统进行了研究，文献 [14] 中得到了其改进的等价系统，根据简化系统公理结构的特点，文献 [10,11] 中提出了基础 R_0- 代数和基础 $\mathcal{L}^*$ 系统，并证明了 Łukasiewicz 模糊命题演算系统是 $B\mathcal{L}^*$ 系统的另一扩张 [15], MV- 代数是 BR_0- 代数的特例 [10]. 本节主要讨论完备的 BR_0- 代数中的 R_0 型全蕴涵三 I 算法与模糊命题演算的形式演绎系统 $B\mathcal{L}^*$ 的关系. 从中我们将看到 R_0- 型三 I 算法是与基础 $B\mathcal{L}^*$ 系统相匹配的模糊推理方法，从而也体现了三 I 算法所具有的数学严谨性.

定义 4.1[11] 由以下的公式集 $F(S)$, 公理 L^*1--L^*9 及推理规则 MP 组成的系统称为模糊命题演算的形式演绎基础系统，记作 $B\mathcal{L}^*$.

(1) 记 $S=\{p_1,p_2,\cdots\}$ 是无限可数集， $F(S)$ 是由 S 生成的 $(\neg,\vee,\to)$ 型代数， $F(S)$ 中的元素叫公式.

(2) $F(S)$ 中具有以下各种形式的公式为 $B\mathcal{L}^*$ 系统中的公理

$$\begin{array}{ll}
L^*1: & A\to(B\to A\wedge B);\\
L^*2: & (\neg A\to\neg B)\to(B\to A);\\
L^*3: & (A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C));\\
L^*4: & (B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C));\\
L^*5: & A\to\neg\neg A;\\
L^*6: & A\to A\vee B;\\
L^*7: & A\vee B\to B\vee A;\\
L^*8: & (A\to C)\wedge(B\to C)\to(A\vee B\to C);\\
L^*9: & (A\wedge B\to C)\to(A\to C)\vee(B\to C).
\end{array}$$

以上形如 $P\wedge Q$ 的公式是 $\neg(\neg P\vee\neg Q)$ 的简写.

(3) $B\mathcal{L}^*$ 系统中的推理规则为：由 $A, A\to B$ 推得 B, 简称 MP 规则.

引理 4.1[11] $B\mathcal{L}^*$ 系统关于 BR_0- 代数是完备的，可靠的.

引理 4.2[11] 在 $B\mathcal{L}^*$ 系统中若定义 $A\otimes B=\neg(A\to\neg B)$. 则

① $A\otimes B\to C\approx A\to(B\to C)$, ② $A\otimes B\approx B\otimes A$.

R_0- 型全蕴涵三 I 规则是求解问题 (1.1) 式中的 B^* 使之满足

(1) $(A\to B)\to(A^*\to B^*)=1$; (2) 若 $(A\to B)\to(A^*\to C^*)=1$, 则 $B^*\to C^*=1$.

由引理 4.1 可知这相当于在 $B\mathcal{L}^*$ 系统中， B^* 应满足

(1) $\vdash (A\to B)\to(A^*\to B^*)$; (2) 若 $\vdash (A\to B)\to(A^*\to C^*)$, 则

$$\vdash B^*\to C^*. \tag{4.1}$$

命题 4.1 在 $B\mathcal{L}^*$ 系统中，设 $A,B,A^*\in F(S)$, 定义 $B^*=A^*\otimes(A\to B)$, 则 B^* 必满足 (4.1) 式.

证明

1°	$A^*\otimes(A\to B)\to A^*\otimes(A\to B)$	$B\mathcal{L}^*$中定理[11].
2°	$A^*\otimes(A\to B)\to A^*\otimes(A\to B)\approx(A\to B)\to(A^*\to A^*\otimes(A\to B))$.	引理4.2
3°	$(A\to B)\to(A^*\to A^*\otimes(A\to B))$	$1°,2°$, MP 规则
4°	$(A\to B)\to(A^*\to B^*)$.	$3°$, 定义

因此 $\vdash (A\to B)\to(A^*\to B^*)$. 又若 $\vdash (A\to B)\to(A^*\to C^*)$, 则

1°	$(A\to B)\to(A^*\to C^*)$	已知
2°	$(A\to B)\to(A^*\to C^*)\approx(A\to B)\otimes A^*\to C^*$	引理 4.2
3°	$(A\to B)\otimes A^*\to C^*$	$1°,2°,MP$
4°	$B^*\to C^*$	$3°$, 定义

R_0- 型全蕴涵三 IFMT 规则是求解问题 2.2 式中的 A^* 满足以下条件：

(1) $(A\to B)\to(A^*\to B^*)=1$;

(2) 若 $(A\to B)\to(C^*\to B^*)=1$, 则 $C^*\to A^*=1$.

应用引理 4.1, 这相当于在 $B\mathcal{L}^*$ 系统中， B^* 应满足

(1) $\vdash (A\to B)\to(A^*\to B^*)$. (4.2)

(2) 若 $\vdash (A\to B)\to(C^*\to B^*)$, 则 $\vdash C^*\to A^*$.

命题 4.2 在 $B\mathcal{L}^*$ 系统中，设 $A,B,B^*\in F(S)$, 定义 $A^*=(A\to B)\to B^*$. 则 A^* 必满足 4.2 式.

证明

1°	$((A\to B)\to B^*)\to((A\to B)\to B^*)$	$B\mathcal{L}^*$中定理[1]
2°	$(((A\to B)\to B^*)\to((A\to B)\to B^*))\to((A\to B)\to(((A\to B)\to B^*)\to B^*))$	L^*3
3°	$(A\to B)\to(((A\to B)\to B^*)\to B^*)$	$1°,2°,MP$
4°	$(A\to B)\to(A^*\to B^*)$	$3°$, 定义

因此 $\vdash (A\to B)\to(A^*\to B^*)$. 又若 $\vdash (A\to B)\to(C^*\to B^*)$, 则

1°	$(A\to B)\to(C^*\to B^*)$	已知
2°	$((A\to B)\to(C^*\to B^*))\to(C^*\to((A\to B)\to B^*))$	L^*3
3°	$C^*\to((A\to B)\to B^*)$	$1°,2°,MP$
4°	$C^*\to A^*$	$3°$, 定义

R_0- 型全蕴涵 α- 三 I 规则是要求解问题 (1.1) 中的 B^* 满足条件：

(1) $\alpha\to((A\to B)\to(A^*\to B^*))=1$;

(2) 若 $\alpha \to ((A \to B) \to (A^* \to C^*)) = 1$, 则有

$$B^* \to C^* = 1, \tag{4.3}$$

R_0- 型全蕴涵 α- 三 IFMT 规则是要求解问题 (2.3) 中的 A^* 满足以下条件:

1) $\alpha \to ((A \to B) \to (A^* \to B^*)) = 1,$ (4.4)

2) 若 $\alpha \to ((A \to B) \to (C^* \to B^*)) = 1$, 则 $C^* \to A^* = 1$.

应用引理 4.1, 可知 (4.3) 式等价于在 $B\mathcal{L}^*$ 系统中 B^* 应满足:

(1) $\vdash \alpha \to ((A \to B) \to (A^* \to B^*)),$ (4.5)

(2) 若 $\vdash \alpha \to ((A \to B) \to (A^* \to C^*))$, 则 $\vdash B^* \to C^*$.

应用引理 4.1 可知 (4.4) 式等价于在 $B\mathcal{L}^*$ 系统中, A^* 应满足

(1) $\vdash \alpha \to ((A \to B) \to (A^* \to B^*)).$ (4.6)

(2) 若 $\vdash \alpha \to ((A \to B) \to (C^* \to B^*))$, 则 $\vdash C^* \to A^*$.

(4.5) 式和 (4.6) 式中的公式中出现了 BR_0- 代数中的元素 α, 而这在定义 4.1 中是不允许的, 因此若讨论 (4.3) 式, (4.4) 式与 $B\mathcal{L}^*$ 系统中定理的关系, 就需要在 $B\mathcal{L}^*$ 系统中的公式集 $F(S)$ 中引入命题常元. 即把其赋值格 BR_0- 代数中的元按合理的方式也作为 $F(S)$ 中的原子命题来参与公式的合成. 事实上, 这种生成公式代数的方法在文献 [16–18] 中就已经采用. 若我们采用类似的方法将 BR_0- 代数中的元也引入到公式集 $F(S)$ 中, 则与命题 4.1, 命题 4.2 的比较容易看到: 在 (4.5) 式中 $B^* = \alpha \otimes (A \to B) \otimes B^*$, 在 (4.6) 式中 $A^* = \alpha = ((A \to B) \to B^*)$.

将本节的讨论与第二节的结果做比较可看出: R_0- 型全蕴涵三 I 算法是与基础 $B\mathcal{L}^*$ 系统相匹配的模糊推理方法.

5 后记

本文我们主要是针对 BR_0- 代数中 R_0- 型全蕴涵三 I 算法进行了讨论, 但在第二节中关于 R_0- 型三 I 解法定理的证明过程中我们只用到了 BR_0- 代数的部分性质. 因此第二节的结果可应用到基于更广泛的一类逻辑系统的三 I 算法中去.

参考文献:

[1] 吴望名. 模糊推理的原理和方法 [M]. 贵阳: 贵州科技出版社, 1994.
WU Wang-ming. *The Principles and Methods for Fuzzy Infernce* [M]. Guiyang: Guizhou Science and Technology Press, 1994. (in Chinese)

[2] 陈永久. 模糊控制技术及应用实例 [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1993.
CHEN You-jiu. *The Teconology of Fuzzy Controling and Its Applications* [M]. Beijing: Beijing Normal University Press, 1993. (in Chinese)

[3] 张文修, 梁怡. 不确定性推理原则 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1996.
ZHANG Wen-xiu, LIANG Yi. *The Uncertainty Reasoning Principles* [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1996. (in Chinese)

[4] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理 [M]. 北京: 中国科学出版社, 2000.
WANG Guo-jun. *Non Classical Mathematical Logic and Approximite Reasoning* [M]. Beijing: Chinese Science Press, 2000. (in Chinese)

[5] DUBOIS D, PRADE H. *Fuzzy sets in approximate reasoning* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, **40**(1): 143–244.

[6] ZADEH L A. *Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes* [J]. IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernet., 1973, **1**: 28–44.

[7] WANG Guo-jun. *On the logic foundation of fuzzy reasoning* [J]. Information and Science, 1997, **177**: 47–88.
[8] 王国俊．模糊推理的全蕴涵三 I 算法 [J]. 中国科学 (E 辑), 1999, **29**(1): 43–53.
WANG Guo-jun. *The total complication triple I method for fuzzy reasoning* [J]. Sci. China Ser. E, 1999, **29**(1): 43–53. (in Chinese)
[9] 宋士吉，吴澄．模糊推理的反向三 I 算法 [J]. 中国科学 (E 辑), 2002, **32**(2): 230–246.
SONG Shi-ji, WU Cheng. *The opposite triple I method for fuzzy reasoning* [J]. Sci. China Ser. E, 2002, **32**(2): 230–246. (in Chinese)
[10] 吴洪博．基础 R_0- 代数与基础 $\mathcal{L}^*$ 系统 [J]. 数学进展， 2003, **32**(5): 565–576.
WU Hong-bo. *The basic R_0-algibra and basic $\mathcal{L}^*$system* [J]. Adv. Math. (China), 2003, **32**(5): 565-576. (in Chinese)
[11] 吴洪博．模糊命题演算的形式演绎系统 $\mathcal{L}^*$ 及其重言式的研究 [D]. 四川大学博士学位论文， 2001.
WU Hong-bo. *The study of formal deductive system for fuzzy propositional calculus and its tautologes* [D]. Ph.D.Thesis of Sichuan University, 2001. (in Chinese)
[12] 王国俊． Fuzzy 命题演算的一种形式演绎系统 [J]. 科学通报， 1997, **42**(10): 1041–1045.
WANG Guo-jun. *A kind of formal deductive system for fuzzy propositional calculus* [J]. Chinese Sci. Bull.,1997, **42**(10): 1041–1045. (in Chinese)
[13] 吴洪博．基础 R_0- 代数的性质及在 $\mathcal{L}^*$ 系统中的应用 [J]. 数学研究与评论， 2003, **23**(3): 557–563.
WU Hong-bo. *The properties of basic R_0-algibra and its applications in$\mathcal{L}^*$ system* [J]. J. Math. Res. Exposition, 2003, **23**(3): 557–563. (in Chinese)
[14] WU Hong-bo. A kind of simplified formal deductive system $\mathcal{L}_0^*$ for thd system $\mathcal{L}^*$ [J]. J. Fuzzy Math., 2001, **9**(2): 365–371.
[15] 吴洪博，文秋梅． $B\mathcal{L}^*$ 系统的一种扩张 –Lukasiewicz 系统 [J]. 模糊系统与数学， 2002, **16**(2): 52–57.
WU Hong-bo, WEN Qiu-mei. *A kind of extension of $B\mathcal{L}^*$ system—Lukasiewicz system* [J]. Mohu Xitong yu Shuxue, 2002, **16**(2): 52–57. (in Chinese)
[16] PAVELKA J. *On fuzzy logic(I)* [J]. Z.für Mathematik Logic u Grundlagen d mathematik, 1979, **25**: 45–52.
[17] PAVELKA J. *On fuzzy logic(II)* [J]. Z.für Mathematick logic u Grundlagen d Mathematik, 1979, **25**: 119–134.
[18] PAVELKA J. *On fuzzy logic (III)* [J]. Z für Mathematik logic u Grundlagen d Mathematik, 1979, **25**: 447–464.

Total Complication Triple I Method Based on Complete BR_0-Algebra

WU Hong-bo, WANG Guo-jun, YU Hong-li
(Inst. of Math., Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

Abstract: We study the properties of BR_0-algebra and the total complication triple I method on complete BR_0-algebra, and we apply the results to R_0-Unite interval $\overline{W}$. Not only we have simplified the proof of the results of R_0-type triple I method on R_0-Unite interval $\overline{W}$, but also we make the proof to combine with the formal deductive system for fuzzy propositional calculus. This work also explains that the R_0-type triple I method is a matching fuzzy inference with $B\mathcal{L}^*$ system.

Key words: fuzzy logic; BR_0-algebra; R_0-unite interral $\overline{W}$; triple I method; $B\mathcal{L}^*$ system.