

集合论与代数的新运算 (II)*

杨安洲

(北京工业大学)

定义1 令 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ 为可数无穷集合, $F(X) = \{A: A \subseteq X \text{ 且 } A \text{ 是有限集}\}$. 对于 $A \subseteq X$, 先作一一对应 $A \longleftrightarrow (i_1, i_2, \dots, i_n, \dots)$, 其中 $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots \in \{0, 1\}$, 满足 $(\forall k)(x_k \in A \Leftrightarrow i_k = 1) \& (\forall k)(x_k \notin A \Leftrightarrow i_k = 0)$, 然后把 A 与 A 所对应的 $(i_1, i_2, \dots)$ 作恒同的理解, $A \in F(X) \leftrightarrow (A = (i_1, i_2, \dots, i_n, \dots))$ 中最多只有有限个 i_a 等于 1, 其余的均为 0, 对于 $A = (i_1, i_2, \dots, i_n, \dots)$, $B = (j_1, j_2, \dots, j_n, \dots) \in p(X) = \{A: A \subseteq X\}$, 令 $\varphi(A, B) = (k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)$, 其中当 $\{l: i_l = j_l = 0\} \neq \emptyset$ (非空), $\min\{l: i_l = j_l = 0\} = l_0$ 时取 $k_{l_0} = 1$, 其余所有的 k_a 均与 A 中的 i_a 相同, 然后再令 $A + B = \varphi(A, B) \cap \varphi(B, A)$, i, e . 先用 φ , 然后用“交运算”, 并把 * 限制在 $F(X)$ 中进行.

定理1 在 $F(X)$ 中的运算 * 是可结合的、可交换的, 在运算 * 下由 ϕ (空集) 出发可生成 $F(X)$.

定义2 与 **定理2** 用对偶原理, 对偶地可得对于 $F_c(X) = \{A: A \subseteq X \text{ 且 } (X - A = \{x: x \in X \text{ 且 } x \notin A\} \text{ 是有限集})\}$ 的运算 $*_c = \odot$, 其中 X 仍为可数无穷集; 在 $F_c(X)$ 中的运算 $\odot$ 是结合的、交换的, 在运算 $\odot$ 下由 X 出发可生成 $F_c(X)$.

定义3 令 X 是可数无穷集, $F(X)$, $F_c(X)$ 仍如前, $*$, $\odot$ 仍如前; 现在引进一个新的东西 (对象) 称为“虚构的集合”并且把它记为 O (注: 可理解作全部是空位, $O = (\square, \square, \dots, \square, \dots)$); 命 $G(X) = F(X) \cup F_c(X) \cup \{O\}$, 在 $G(X)$ 上定义运算 $\oplus$: ①. $A \in G(X)$, 令 $A \oplus O = O \oplus A = A$, ②. $A, B \in F(X)$, 令 $A \oplus B = A * B$ (定义1), ③. $A, B \in F_c(X)$, 令 $A \oplus B = A \odot B$ (定义2.), ④. $A \in F(X)$, $B \in F_c(X)$, $A = \phi^k = \phi * \phi * \dots * \phi$ (k 个 ϕ) $B = X^l = X \odot X \odot \dots \odot X$ (l 个 X), 令

$$A \oplus B = B \oplus A = \begin{cases} O \text{ (虚构的集合)}, & \text{当 } k = l \text{ 时,} \\ \phi^{k-l} = \phi * \phi * \dots * \phi, & (k-l \text{ 个 } \phi), \text{ 当 } k > l \text{ 时} \\ X^{l-k} = X \odot X \odot \dots \odot X, & (l-k \text{ 个 } X), \text{ 当 } l > k \text{ 时.} \end{cases}$$

定理3 按定义3, 则 $\langle G(X), \oplus \rangle$ 是循环群 (无穷的), 在运算 $\oplus$ 下由 $\{O, \phi$ (空), $X\}$ 出发可生成 $G(X)$.

结束语 以上的新运算以及定理 (包括 (I) 与这里的 (II) 的内容) 回答了“同时具有集合论意义和代数学意义的运算是存在的”.

* 1986年6月10日收到.