1987年11月

数学研究与评论
第七卷　第四期

关于多项式求根的一个并行算法的收敛性*

郑士明

（杭州大学）

1. 引　言

设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} \quad (a_0=1) \tag{1}$$

是首项系数为1的实系数或复系数的 n 次多项式．Durand[1] 和Kerner[2] 独立地提出了求（1）的所有根 r_1，…，r_n 的并行算法：

$$x_i^{(m+1)}=x_i^{(m)}-\frac{f(x_i^{(m)})}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i^{(m)}-x_j^{(m)})} \quad (i=1,\cdots,n;\ m=0,1,\cdots). \tag{2}$$

其中（$x_1^{(0)}$，…，$x_n^{(0)}$）是（r_1，…，r_n）的某一初始近似．

对于 $m=0,1,\cdots$，记

$$\eta_m=\max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(m+1)}-x_i^{(m)}\right|,\quad B_m=\max_{\substack{1\le i,\ j\le n\\ i\neq j}}\left|x_i^{(m)}-x_j^{(m)}\right|^{-1}, \tag{3}$$

$$s_m=B_m\eta_m,\quad g_m=g(s_m),\quad h_m=h(s_m), \tag{4}$$

其中

$$g(t)=g(n,t)=(n-1)\frac{t}{1-t}\left(1+\frac{t}{1-2t}\right)^{n-1}\frac{1}{1-2t} \tag{5}$$

$$h(t)=h(n,t)=(n-1)\frac{t}{1-t}\left(1+\frac{t}{1-2t}\right)^{n-1}=(1-2t)g(t) \tag{6}$$

是 $t\in[0,\frac{1}{2})$ 的函数．

利用这些记号，［3］中关于迭代法（2）的收敛性定理可以改写成下述的

定理A．设（$x_1^{(0)}$，…，$x_n^{(0)}$）满足

$$g_0=g(n,s_0)\le 1,\quad s_0=B_0\eta_0\in[0,\frac{1}{2}), \tag{7}$$

则当 $m\to\infty$ 时，由（2）产生的序列（$x_1^{(m)}$，…，$x_n^{(m)}$）$\to$（r_1，…，r_n）．

关于用Newton法求算子方程 $F(x)=0$ 的零点的收敛性，有著名的Канторович定理（见［4］）．该定理要求初值 $x^{(0)}$ 满足一定的条件，包括 $F''(x)$ 在 $x^{(0)}$ 的适当邻域内的Lipschitz常数．而定理A的条件则完全加在初值上．然而，在某种意义下，Канторович定理的条件是不能放宽

* 1984年6月27日收到．本文系中国科学院科学基金资助的课题．

的．王德人曾经发问：定理A的条件能否放宽？本文的目的是，对此作出否定的回答，同时，在定理A的条件下给出误差的先天和后天估计．我们将看到，当（7）以严格不等式成立时，则收敛速度是二阶的，并且多项式不会有重根，另一方面，具有重根的多项式也可以使（7）式以等式成立．此时，敛速是线性的，并且误差估计是最佳的．

2．条件（7）的最佳性

定理1 设$n\geq 2$．若正数B，η满足$g(2, B\eta)>1$，则存在n次多项式$f(x)$及初始近似$(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$，使得$B_0=B$，$\eta_0=\eta$，而当$m\to\infty$时，由（2）产生的序列$(x_1^{(m)},\cdots,x_n^{(m)})$不收敛于$(r_1,\cdots,r_n)$．

证 取$x_i^{(0)}=\dfrac{2i-3}{2B}$ $(i=1,\cdots,n)$，

$$f(x)=\begin{cases} x^2+(B\eta-\frac{1}{4})/B^2, & n=2, \\ [x^2+(B\eta-\frac{1}{4})/B^2]\prod\limits_{j=3}^{n}(x-r_j), & n>2, \end{cases}$$ 其中$r_j=x_j^{(0)}$ $(j=3,\cdots,n)$．

由（2），容易验证，

$$|x_i^{(0)}-x_j^{(0)}|^{-1}=B/|i-j| \quad (i,\ j=1,\cdots,n,\ j\neq i),$$
$$|x_1^{(1)}-x_1^{(0)}|=|x_2^{(1)}-x_2^{(0)}|=\eta,\quad |x_i^{(1)}-x_i^{(0)}|=0 \quad (i=3,\cdots,n).$$

因此，由（3），$B_0=B$，$\eta_0=\eta$．此外，由于$g(n, t)$关于$t\in[0, \frac{1}{2})$严格单调增加，并且

$$g(n, 0)=0,\quad \lim_{t\to\frac{1}{2}}g(n, t)=+\infty \quad (n\geq 2), \tag{8}$$

$$g(2, \frac{1}{4})=1, \tag{9}$$

所以由$g(2, B\eta)>1$推出$B\eta>\frac{1}{4}$．从而$f(x)$有一对复根r_1，$r_2=\pm i\sqrt{B\eta-\frac{1}{4}}\Big/B$．另一方面，由（2）产生的$x_1^{(m)}$，$\cdots$，$x_n^{(m)}$均为实数$(m=0,1,\cdots)$，故当$m\to\infty$时，$(x_1^{(m)},\cdots,x_n^{(m)})$不收敛于$(r_1,\cdots,r_n)$．定理1证毕．

由定理1见到，存在$n=2$，使得条件（7）不能放宽．

3．误差估计

定理2 设$n\geq 2$．如果$(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$满足条件（7），那么：（i）由（2）产生的序列满足

$$\max_{1\leq i\leq n}|x_i^{(m)}-r_i|\leq\frac{\eta_m}{1-h_m}<\frac{(1-2s_0)^m g_0^{2^m-1}}{1-(1-2s_0)g_0^{2^m}}\eta_0 \quad (m=0,1,\cdots); \tag{10}$$

（ii）当$g_0=1$时，上述估计是最佳的，即存在n及相应的n次多项式和初值，使得$g_0=1$，而（10）成为等式；（iii）当$g_0<1$时，$f(x)$不会有重根．

证 不妨假设$s_0=B_0\eta_0>0$，否则，由（2），（3），$\eta_0=0$意味着$x_i^{(0)}$ $(i=1,\cdots,n)$均为$f(x)$的根．由于$g(n, t)$，$h(n, t)$都是$t\in[0, \frac{1}{2})$的严格单调增加函数，并且$g(n, 0)=0$，故由$s_0>0$得到$g_0>0$．对任何$t\in(0, \frac{1}{2})$，当$n_1\leq n_2$时，$g(n_1, t)\leq$

$g(n_2, t)$，$h(n_1, t) \leq h(n_2, t)$. 如果$s_0 > \frac{1}{4}$，则由（9），$g(n, s_0) \geq g(2, s_0) > g(2, \frac{1}{4}) = 1$，与（7）矛盾，从而

$$0 < s_0 \leq \frac{1}{4}, \quad 0 < (1-2s_0) < 1. \tag{11}$$

再由（6）与（7），

$$0 < h_0 = h(s_0) = (1-2s_0)g_0 < 1. \tag{12}$$

对于$i = 1, \cdots, n$及$m = 0, 1, \cdots$，〔3〕中已证得

$$x_i^{(m+2)} = x_i^{(m+1)} - (x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)}) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x_j^{(m)} - x_j^{(m+1)}}{x_i^{(m+1)} - x_j^{(m)}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left[1 + \frac{x_j^{(m+1)} - x_j^{(m)}}{x_i^{(m+1)} - x_j^{(m+1)}}\right],$$

利用（3）—（6）及不等式

$$|x_i^{(m+1)} - x_j^{(m)}| \geq |x_i^{(m)} - x_j^{(m)}| - |x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)}|,$$

$$|x_i^{(m+1)} - x_j^{(m+1)}| \geq |x_i^{(m)} - x_j^{(m)}| - |x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)}| - |x_j^{(m+1)} - x_j^{(m)}|$$

得到

$$B_{m+1} \leq B_m/(1-2s_m), \tag{13}$$

$$\eta_{m+1} \leq \eta_m h_m, \tag{14}$$

$$s_{m+1} \leq s_m g_m \tag{15}$$

由（5），（6）易见，对任何$0 \leq c \leq 1$，$0 < t < \frac{1}{2}$，$g(ct) \leq cg(t)$，$h(ct) \leq ch(t)$，故由（4），(15)，我们有

$$h_{m+1} \leq h_m g_m, \tag{16}$$

$$g_{m+1} \leq g_m^2 \tag{17}$$

这样，从（7），(11)，(12）出发，借助于（14）—(17)，用数学归纳法可以证明，序列g_m，h_m，η_m，s_m都单调递减，并且，对任何m，$l = 0, 1, \cdots$，下列诸式成立：

$$g_{m+l} \leq g_m^{2^l} \leq 1, \tag{18}$$

$$h_{m+l} \leq h_m g_m^{2^l - 1} < 1, \tag{19}$$

$$\eta_{m+l} \leq \eta_m h_m^l g_m^{2^l - l - 1} \tag{20}$$

于是，对于$i = 1, \cdots, n$及m，$p = 0, 1, \cdots$，

$$|x_i^{(m+p+1)} - x_i^{(m)}| \leq \sum_{l=0}^{p} \eta_{m+l} \leq \eta_m \sum_{l=0}^{p} h_m^l \leq \frac{\eta_m}{1-h_m}$$

令$p \to \infty$，由定理A得到

$$\max_{1 \leq i \leq n} |r_i - x_i^{(m)}| \leq \frac{\eta_m}{1-h_m}$$

将（19），（20）中m，l的位置互换，并取$l = 0$，再由（6）知道，$h_0 g_0^{-1} = (1-2s_0)$，立即得到（10）.

其次，对于$n = 2$，任取$x_1^{(0)} > 0$，$x_2^{(0)} = -x_1^{(0)}$，$f(x) = x^2$，利用（2）—（6），容易验证，对于$m = 0, 1, \cdots$，

$$x_1^{(m)} = x_1^{(0)}/2^m, \quad x_2^{(m)} = -x_1^{(m)}, \quad s_m = \frac{1}{4}, \quad g_m = 1,$$

而（10）成为等式

最后，假设

$$g_0 = g(n,\ s_0) < 1. \tag{21}$$

由（8）及$g(n,\ t)$的连续性和单调性，存在唯一的$t^* \in (0,\ \frac{1}{2})$，使得$g(n,\ t^*) = 1$．则由（21），$s_0 = B_0\eta_0 < t^*$．所以，由（6）及$h_m$的单调性，

$$h_m \leq h_0 = h(n,\ s_0) \leq h(n,\ t^*) = 1 - 2t^* \tag{22}$$

由（3）与$t^* - B_0\eta_0 > 0$得到

$$t^* \min_{\substack{1\leq i,\ j\leq n\\ i\neq j}} |x_i^{(0)} - x_j^{(0)}| - \eta_0 > 0 \tag{23}$$

对于$m = 0, 1, \cdots$。利用$s_m = B_m\eta_m$的单调性及（13），（14），（22），

$$\frac{B_{m+1}}{t^* - B_{m+1}\eta_{m+1}} \leq \frac{B_m}{t^*(1 - 2B_m\eta_m) - B_m\eta_m h_m} = \frac{B_m}{t^* - B_m\eta_m(2t^* + h_m)} \leq \frac{B_m}{t^* - B_m\eta_m}$$

于是，$\dfrac{B_m}{t^* - B_m\eta_m} \leq \dfrac{B_0}{t^* - B_0\eta_0}$ (23)

由（3）得到

$$\frac{1}{t^* \min\limits_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}} |x_i^{(m)} - x_j^{(m)}| - \eta_m} \leq \frac{1}{t^* \min\limits_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}} |x_i^{(0)} - x_j^{(0)}| - \eta_0}.$$

令$m \to \infty$得到

$$t^* \min_{\substack{1\leq i,\ j\leq n\\ i\neq j}} |r_i - r_j| \geq t^* \min_{\substack{1\leq i,\ j\leq n\\ i\neq j}} |x_i^{(0)} - x_j^{(0)}| - \eta_0 > 0\ .$$

从而$f(x)$没有重根，定理2证毕．

参 考 文 献

〔1〕Durand, E., Solutions Numérques des Équations Algébriques, Tome 1; Équations du Type $F(x) = 0$; Racines dún Polynome, Masson, Paris, 1960.

〔2〕Kerner, I.O., Numer Math., 8(1966), 290—294.

〔3〕郑士明，科学通报，27(1982)，515—517.

〔4〕Канторович, Л. В., Успехи Мат. Наук, 3(1948), 89—185.