第23卷第3期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 3
2003年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 2003

有界对称域上的 D^p 乘子*

李 永 群
(湖南大学数学系，湖南 长沙 410082)

摘 要：设 Ω 是 C^n 中包含原点的有界对称域. 本文在 Ω 上得到了关于 D^p 空间的两个乘子定理.

关键词：有界对称域；D^p 空间；乘子.
分类号：AMS(2000) 30H05/CLC number：O174
文献标识码：A 　　　**文章编号**：1000-341X(2003)03-0488-05

1 引言和记号

设 Ω 是 C^n 中包含原点的有界对称域，用 b 记它的 Silov 边界. Ω 相对原点是圆型的和星形的. 用 Γ 记 Ω 的全纯自同构群，Γ_0 是 Γ 的使原点不变的子群. b 上存在唯一的 Γ_0 不变的测度 σ 使 $\sigma(b)=1$.

华罗庚[1] 用群表示的方法构造了一组齐次多项式

$$\{\varphi_{kv}\}, k=0,1,\cdots; v=1,2,\cdots,m_k, m_k=C^k_{n+k-1}.$$

它们在 Ω 中是完备正交的，在 b 上是标准正交的.

用 $H(\Omega)$ 记 Ω 上全纯函数的全体. Ω 上的 Hardy 空间 $H^p(\Omega)(0<p<\infty)$ 定义为

$$H^p(\Omega)=\{f: f\in H(\Omega), \|f\|_p<\infty\},$$

这里 $\|f\|_p=\sup\limits_{0<r<1}M_p(r,f), M_p(r,f)=\{\int_b|f(r\xi)|^p d\sigma(\xi)\}^{1/p}$.

每个 $f\in H(\Omega)$ 有级数展开式[2]

$$f(z)=\sum_{k,v}a_{kv}\varphi_{kv}(z), a_{kv}=\lim_{r\to 1}\int_b f(r\xi)\overline{\varphi_{kv}(\xi)}d\sigma(\xi),$$

它在 Ω 的紧子集上一致收敛，这里 $\sum\limits_{k,v}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{v=1}^{m_k}$.

史济怀在文献[3]中引入了一种新的空间 $D^p(\Omega)$，$D^p(\Omega)(0<p<\infty)$ 定义为：

$$D^p(\Omega)=\{f: f\in H(\Omega), f=\sum_{k,v}a_{kv}\varphi_{kv}(z), \|f\|_{D^p}^p=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-kn}(2^{kn}\sum_{l\in I_R}b_l^2)^{p/2}<\infty\},$$

* 收稿日期：2001-01-02
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10271043)
作者简介：李永群 (1975-)，女，硕士.

这里 $b_l^2=\sum_{v=1}^{m_k}|a_{lv}|^2, I_K=\{S:2^k\leqslant S<2^{k+1}, S\in N\}$.

对于一个复数序列 $\{b_{kv}\}$, $v=1,2,\cdots,m_k$, $k=0,1,2\cdots$，令

$$l^p=\{\{b_{kv}\}:\|b_{kv}\|_p=(\sum_{k,v}|b_{kv}|^p)^{1/p}<\infty\}, 0<p<\infty$$

$$l^\infty=\{\{b_{kv}\}:\|b_{kv}\|\infty=\sup_k\sum_{v=1}^{m_k}|b_{kv}|<\infty\}.$$

如果复数序列 $\{\lambda_k\}$ 满足对任意的 $\sum_{k,v}a_{kv}\varphi_{kv}(z)\in D^p(\Omega)$，有 $\sum_{k,v}\lambda_k a_{kv}\varphi_{kv}(z)\in D^q(\Omega)$，就称 $\{\lambda_k\}$ 是映 $D^p(\Omega)$ 入 $D^q(\Omega)$ 的一个乘子. 如果序列 $\{\lambda_k\}$ 满足对任意的 $\sum_{k,v}a_{kv}\varphi_{kv}(z)\in D^p(\Omega)$，有 $\{\lambda_k a_{kv}\}\in l^q$，那么称 $\{\lambda_k\}$ 为映 $D^p(\Omega)$ 入 l^q 的一个乘子.

关于有界对称域上的 D^p 乘子，文献[4]中得到下面的结果：

定理 A 设 $0<p<2\leqslant q<\infty$, $\alpha=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$，如果 $\lambda_k=O(k^{-n\alpha-\frac{3n}{2}+1})$, $n>1$，那么 $\{\lambda_k\}$ 是映 $D^p(\Omega)$ 入 $D^q(\Omega)$ 的一个乘子.

显然，定理 A 中对 λ_k 的估计不是最好的，本文给出了一个更好的估计.

在本文中，Ω 表示在 C^n 中的有界对称域，B 表示 C^n 中的单位球. C 表示常数，不同的地方不必相同.

2 定理及其证明

由[5]中定理 3 有下面的引理：

引理 设 $0<r,s,u,v\leqslant\infty$，定义

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{u}-\frac{1}{r}, 当\ r>u; p=\infty, 当\ r\leqslant u,$$

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{v}-\frac{1}{s}, 当\ s>v; q=\infty, 当\ s\leqslant v,$$

则 $(l(r,s),l(u,v))=l(p,q)$. 这里 $(l(r,s),l(u,v))$ 表示从 $l(r,s)$ 到 $l(u,v)$ 的乘子空间，下面相同.

$$l(p,q)=\{a=\{a_{kv}\}:\|a\|_{p,q}=\{\sum_{m=0}^{\infty}(\sum_{k\in I_m}\sum_{v=1}^{m_k}|a_{kv}|^p)^{q/p}\}^{\frac{1}{q}}<\infty\},$$

$$I_m=\{k:k\in Z, 2^{m-1}\leqslant k<2^m\}, m=1,2,\cdots; I_0=\{0\}.$$

当 p 或 q 是无穷时，上式中相应的和式用上确界取代.

定理 1 设 $0<p\leqslant 2\leqslant q<\infty$, $\alpha=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$，如果 $\lambda_k=O(k^{-n\alpha})$, $n>1$，那么 $\{\lambda_k\}$ 是映 $D^p(\Omega)$ 入 $D^q(\Omega)$ 的一个乘子.

证明 分四步证明.

(Ⅰ) 当 $p=q=2$ 时，则 $\lambda_k=O(1)$，由 $D^p(\Omega)$ 的定义直接可得结论.

(Ⅱ) 当 $q=2$, $p<2$ 时，由[4]中定理 2 得.

(Ⅲ) 当 $p=2$, $q>2$ 时，任给 $f(z)=\sum_{k,v}a_{kv}\varphi_{kv}(z)\in D^2$.

由 D^2 及 $l(2,2)$ 的定义知

$$\{a_{kv}\} \in l(2,2) = l^2. \tag{1}$$

令 $g(z) = \sum_{k,v} \lambda_k a_{kv} \varphi_{kv}(z)$，要证 $g \in D^q(\Omega)$，只须证

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kn} (2^{kn} \sum_{l \in I_k} \sum_{v=1}^{m_l} |\lambda_l a_{lv}|^2)^{q/2} < \infty, \tag{2}$$

而

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kn} (2^{kn} \sum_{l \in I_k} \sum_{v=1}^{m_l} |\lambda_l a_{lv}|^2)^{q/2} \leqslant C \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{l \in I_k} \sum_{v=1}^{m_k} (l^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} l^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} |a_{lv}|)^2)^{q/2}$$

$$= C \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{l \in I_k} \sum_{v=1}^{m_l} |a_{lv}|^2)^{q/2},$$

所以要证(2)式成立，只须证下式成立即可

$$\{a_{lv}\} \in l(2,q). \tag{3}$$

而由(1)式，要证(3)式成立，只须证下式成立即可

$$l^\infty \subset (l^2, l(2,q)).$$

由引理知：$(l^2, l(2,q)) = l(\infty,\infty) = l^\infty$.

(Ⅳ) 当 $0 < p < 2 < q < \infty$ 时，令

$$\lambda_k = O(k^{-n\alpha}) = O(k^{-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}) = O(k^{-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}) \cdot O(k^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}) = \mu_k \cdot \delta_k,$$

其中 $\mu_k = O(k^{-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})})$，$\delta_k = O(k^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})})$.

由前面的证明知 $\{\mu_k\} \in (D^p, D^2)$，$\{\delta_k\} \in (D^2, D^q)$，所以 $\{\lambda_k\} = \{\mu_k \cdot \delta_k\} \in (D^p, D^q)$.

由定理 1，可得到[8]中定理 1 的一个简单的证明，现作推论写下.

推论 1 设 $0 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$，$\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$，如果 $\lambda_k = O(k^{-n\alpha})$，$n > 1$，那么 $\{\lambda_k\}$ 是映 $H^p(\Omega)$ 入 $H^q(\Omega)$ 的乘子.

证明 由[3]中定理 1 知 $H^p \subset D^p$，$D^q \subset H^q$，所以 $(D^p, D^q) \subset (H^p, D^q) \subset (H^p, H^q)$. 由定理 1 知 $\{\lambda_k\} \in (D^p, D^q)$，所以 $\{\lambda_k\} \in (H^p, H^q)$.

由定理 1，推论 1，及[8]中定理 1 的后面一条，可得下面的推论.

推论 2 当 $\Omega = B$ 时，定理 1 中数 α 的估计为最好，即对每一个 $\beta < \alpha$，$\lambda_k = O(k^{-n\beta})$ 不能导出 $\{\lambda_k\}$ 是映 $D^p(B)$ 入 $D^q(B)$ 的乘子.

定理 2 设 $0 < p < 2 \leqslant q < \infty$，如果 $\{\lambda_k\}$ 满足

$$\sum_{k=1}^{N} k^{\frac{nq}{p}+q(\frac{3}{2}n-1)} |\lambda_k|^q = O(N^{nq}), \tag{4}$$

那么 $\{\lambda_k\}$ 是映 $D^p(\Omega)$ 入 l^q 的乘子.

证明 任给 $f(z) = \sum_{k,v} a_{kv} \varphi_{kv}(z) \in D^p(\Omega)$.

在[3]中推论 1 中取 $k = q$，$q = 2$，有

$$\int_0^1 (1-r)^{nq(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-1} M_2^q(r,f) \mathrm{d}r \leqslant C \| f \|_{D^p}^q.$$

又因为 $M_2(r,f) \geqslant M_1(r,f)$，所以

$$C\|f\|_{D^p}^q \geqslant \int_0^1 (1-r)^{nq(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-1} M_1{}^q(r,f)\mathrm{d}r.$$

任取一增数列$\{S_k\}(S_0=0,S_k\to 1)$,注意到$M_1(r,f)$是r的增函数,并由[6]中引理4,得

$$C\|f\|_{D^p}^q \geqslant \sum_{k=0}^{\infty}\int_{S_k}^{S_{k+1}}(1-r)^{nq(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-1}M_1^q(S_k,f)\mathrm{d}r$$

$$\geqslant \frac{1}{\eta}\sum_{k=1}^{\infty}[(1-S_k)^{\eta}-(1-S_{k+1})^{\eta}]S_k^{qk}k^{q(1-n)}\sum_{v=1}^{m_k}|a_{kv}|^q, \tag{5}$$

这里$\eta = nq(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})$. 由[7]中P101页知条件(4)等价于条件

$$\sum_{k=N}^{\infty}k^{q(n-1)}|\lambda_k|^q = O(N^{-\eta}), \tag{6}$$

由此即知级数$\sum_{k=1}^{\infty}k^{q(n-1)}|\lambda_k|^q<\infty$. 不妨设其和为1,今取

$$S_0=0, S_N = 1-\{\sum_{k=N}^{\infty}k^{q(n-1)}|\lambda_k|^q\}^{1/q},$$

所以

$$(1-S_k)^{\eta}-(1-S_{k+1})^{\eta} = |\lambda_k|^q k^{q(n-1)}, k=0,1,2,\cdots.$$

而由(6)式有

$$S_k^{qk}\geqslant (1-\frac{C}{k})^{qk}\to e^{-cq}>0, k\to\infty.$$

于是从(5)式即得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{v=1}^{m_k}|\lambda_k a_{kv}|^q \leqslant C\|f\|_{D^p}^q,$$

所以$\{\lambda_k\}$是映$D^p(\Omega)$入l^q的乘子.

作为定理2的一个应用,可得下面推论.

推论 设$0<p<2\leqslant q<\infty$,如果$f(z)=\sum_{k,v}a_{kv}\varphi_{kv}(z)\in D^p(\Omega)$,那么

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{q-1-nq(\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}\sum_{v=1}^{m_k}|a_{kv}|^q \leqslant C\|f\|_{D^p}^q. \tag{7}$$

证明 由于$\sum_{k=1}^{N}k^{\frac{nq}{p}+q(\frac{3}{2}n-1)}k^{q-1-nq(\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} = \sum_{k=1}^{N}k^{nq-1} = O(N^{nq})$,所以由定理2知(7)式成立.

参考文献:

[1] 华罗庚. 多复变数函数论中的典型域的调和分析[M]. 北京:科学出版社,1958.
Hua Lo-geng. *Harmonic Analysis on Canonical Domains in the Theory of Several Complex Variables* [M]. Beijing: Science Press, 1958. (in Chinese)

[2] HAHA K T, MITCHELL J. *H^p spaces on bounded symmetric domains* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1969, **146**: 521-531.

[3] SHI J H. *D^p spaces on bounded symmetric domains of C^n*[J]. Acta. Math. Sinica New Series, 1994, **10**

(1): 11—18.

[4] 高进寿. 有界对称域上的 D^p 乘子 [J]. 杭州大学学报, 1997, **24**(3): 190—194.
GAO Jin-shou. *D^p Multiplier on bounded Symmetric Domains* [J]. J. Hangzhou University, 1997, **24** (3): 190—194. (in Chinese)

[5] 肖建斌. $H^{p,\infty}$ 空间的 Hardy-Littlewood 定理 [J]. 数学进展, 1995, **24**(2): 139—144.
XIAO Jian-bin. *Hardy-Littlewood theorems for $H^{p,\infty}$ Spaces* [J]. Advances in Math., 1995, **24**(2): 139—144. (in Chinese)

[6] 史济怀. 有界对称域上的 Hardy-littlewood 定理 [J]. 中国科学 A 辑, 1988, **4**: 366—375.
SHI Ji-huai. *Hardy—Litterwood theorems on bounded symmetric domains* [J]. Science in China, Ser. A, 1988, **4**: 366—375. (in Chinese)

[7] DUREN P L. *Theory of H^p spaces* [M]. Academic Press, New York, 1970.

[8] Ren Fu-yao, Xiao Jian-bin. *H^p multipliers on bounded symmetric domains* [J]. Science in China, Ser. A, 1994, **37**(3): 257—264.

D^P Multiplier on Bounded Symmetric Domains

LI Yong-qun

(Dept. of Math., Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: In this paper, we get two theorems about D^P multiplier on a bounded symmetric domain $\Omega \in C^n$.

Key words: bounded symmetric domain; D^P space; multiplier.