第13卷第4期 1993年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 13 No. 4 Nov. 1993

关于单形的三角不等式*

苏化明
(合肥工业大学数学力学系,230009)

§0 引言

蒋星耀、刘根洪分别在[1]、[2]中建立了欧式空间 E^n 中关于单形顶点角[3]正弦的不等式. 本文首先利用代数方法证明一个涉及单形顶点角与二面角的不等式(定理1),然后再给出双曲型空间 H^n 中单形二面角的一个不等式(定理2). 作为定理1的特例,可导出[1],[2]的某些主要结果. 利用定理1,我们还可以将 Klamkin 提出的一个不等式[4]推广到 E^n.

§1 定理及证明

定理1 设 $\mathfrak{S}$ 为 n 维欧式空间 $E^n(n\geqslant 2)$ 中的单形,它的顶点角为 α_i,它的任意两个侧面 f_i,f_j 所成的内二面角为 θ_{ij},又 m_i 为正数 $(i,j=1,2,\cdots,n+1,i\neq j)$,则有

$$\sum_{i=1}^{n+1}\Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}m_j^2\Big)\sin^2\alpha_i\leqslant\left[\frac{2}{n(n-1)}\right]^{n/2}\Big[\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(m_im_j\sin\theta_{ij})^2\Big]^{n/2}\leqslant\frac{1}{n^n}\Big(\sum_{i=1}^{n+1}m_i^2\Big)^n,\tag{1.1}$$

其中等号成立的充要条件是下列各式均成立

$$\frac{m_i^2}{\sum_{i=1}^{n+1}m_i^2}=\frac{\cos\theta_{jk}}{n(\cos\theta_{ij}\cos\theta_{ik}+\cos\theta_{jk})}\tag{1.2}$$

$(i,j,k=1,2,\cdots,n+1,i,j,k$ 两两不等$)$.

证明 设单形 $\mathfrak{S}$ 的 $n+1$ 个界面上在外法线单位向量分别为 $e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}$,则向量 $m_1e_1,m_2e_2,\cdots,m_{n+1}e_{n+1}$ 的 Gram 矩阵

$$M=((m_ie_i,m_je_j))$$

为正半定的,且有 $\det M=0$,这里 (m_ie_i,m_je_j) 表示向量 m_ie_i,m_je_j 的内积.

显然 M 又可写作

$$M=\begin{bmatrix} m_1^2 & & & -m_im_j\cos\theta_{ij}\\ & m_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ -m_im_j\cos\theta_{ij} & & & m_{n+1}^2\end{bmatrix}.$$

---

* 1991年3月9日收到.

M 的特征方程为 $\det(M-\lambda I)=0$,其中 I 为 $n+1$ 阶单位矩阵,展开后得到

$$\lambda^{n+1}-C_1\lambda^n+C_2\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^nC_n\lambda+(-1)^{n+1}C_{n+1}=0. \tag{1.3}$$

由于 M 是退化的正半定矩阵,$\operatorname{rank}M=n$,故(1.3)有 n 个正实根和一个零根.在(1.3)中约去这个零根后得到

$$\lambda^n-C_1\lambda^{n-1}+C_2\lambda^{n-2}+\cdots+(-1)^nC_n=0, \tag{1.4}$$

这里 $C_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$.

由 Maclaurin 不等式[4],有

$$\frac{C_1}{\binom{n}{1}}\geqslant\left[\frac{C_2}{\binom{n}{2}}\right]^{1/2}\geqslant\left[\frac{C_n}{\binom{n}{n}}\right]^{1/n}. \tag{1.5}$$

由于 C_2 是 M 的所有 2 阶主子式之和,C_n 是 M 的所有 n 阶主子式之和,由单形顶点角的定义[3],即有

$$C_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(m_im_j\sin\theta_{ij})^2,\quad C_n=\sum_{i=1}^{n+1}\Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}m_j^2\Big)\sin^2\alpha_i,$$

而 $C_1=\operatorname{tr}M=\sum_{l=1}^{n+1}m_l^2$,将 C_1,C_2,C_n 代入(1.5)即得不等式(1.1)

由 Maclaurin 不等式等号成立条件知(1.1)中等号成立的充要条件为 $n+1$ 阶实对称矩阵 M 有 n 重特征根,即有 $\operatorname{rank}\left[M-\Big(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n+1}m_l^2\Big)I\right]=1$ 或矩阵 $M-\Big(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n+1}m_l^2\Big)I$ 的任意两行元素对应成比例:

$$\frac{m_i^2-\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n+1}m_l^2}{-m_jm_i\cos\theta_{ji}}=\frac{-m_im_j\cos\theta_{ij}}{m_j^2-\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n+1}m_l^2}=\frac{-m_im_k\cos\theta_{ik}}{-m_jm_k\cos\theta_{jk}}, \tag{1.6}$$

亦即(1.2)式成立.

定理 2 设 Ω 为 n 维双曲型空间 $H^n(n\geqslant2)$ 中的单形,它的任意两个侧面 F_i,F_j 所成的内二面角为 φ_{ij},又 P_i 为正数$(i,j=1,2,\cdots,n+1,i\neq j)$,则有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(p_ip_j\sin\varphi_{ij})^2<\frac{n-1}{2n}\Big(\sum_{i=1}^{n+1}p_i^2\Big)^2. \tag{1.7}$$

证明 考虑 $n+1$ 阶实对称矩阵

$$P=\begin{bmatrix} p_1^2 & & & -p_ip_j\cos\varphi_{ij}\\ & p_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ -p_ip_j\cos\varphi_{ij} & & & p_{n+1}^2\end{bmatrix}.$$

由[5]的结果可推知矩阵 P 有 n 个正特征根和 1 个负特征根,分别记为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{n+1}$,其中 $\mu_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,$\mu_{n+1}<0$,由矩阵的特征根和各阶主子式的关系知

$$\sum_{i=1}^{n+1}\mu_i=\sum_{i=1}^{n+1}p_i^2, \tag{1.8}$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\mu_i\mu_j=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(p_ip_j\sin\varphi_{ij})^2. \tag{1.9}$$

记 $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(p_ip_j\sin\varphi_{ij})^2=S$，则由(1.8)，(1.9)得

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i=\sum_{i=1}^{n+1}p_i^2-\mu_{n+1},\tag{1.10}$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mu_i\mu_j=S-\mu_{n+1}\sum_{i=1}^{n}\mu_i=S-\mu_{n+1}\Big(\sum_{i=1}^{n+1}P_i^2-\mu_{n+1}\Big).\tag{1.11}$$

由 Maclaurin 不等式[4]有

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i}{\binom{n}{1}}\geqslant\left[\frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mu_i\mu_j}{\binom{n}{2}}\right]^{1/2}.$$

于是

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mu_i\mu_j\leqslant\frac{n-1}{2n}\Big(\sum_{i=1}^{n}\mu_i\Big)^2.\tag{1.12}$$

由(1.10)，(1.11)和(1.12)可得

$$(n+1)\mu_{n+1}^2-2\Big(\sum_{i=1}^{n+1}p_i^2\Big)\mu_{n+1}+2nS-(n-1)\Big(\sum_{i=1}^{n+1}p_i^2\Big)^2\leqslant 0.$$

因为 $\mu_{n+1}<0$，故由上式可得

$$S<\frac{n-1}{2n}\Big(\sum_{i=1}^{n+1}p_i^2\Big)^2.\tag{1.7}$$

§2 几个推论

推论 1 对于 E^n 中的单形 $\mathfrak{C}$ 成立不等式

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sin^2\alpha_i\leqslant\left[\frac{2}{n(n-1)}\right]^{n/2}\Big(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\sin^2\theta_{ij}\Big)^{n/2}\leqslant\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n,\tag{2.1}$$

$$\prod_{i=1}^{n+1}\sin\alpha_i\leqslant\left(\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}\right)^{(n+1)/2},\tag{2.2}$$

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\sin\theta_{ij}\leqslant\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n(n+1)/4}.\tag{2.3}$$

三式中等号均当且仅当 $\mathfrak{C}$ 为正则单形时成立.

证明 在不等式(1.1)中取 $m_1=m_2=\cdots=m_{n+1}=1$ 即得(2.1).

下证(2.1)式等号成立之充要条件.

条件之充分性显然.

条件之必要性. 当(2.1)式等号成立时，由(1.1)等号成立条件的(1.6)式，有

$$\frac{\frac{1}{n}}{\cos\theta_{ji}}=\frac{\cos\theta_{ij}}{\frac{1}{n}}=\frac{\cos\theta_{ik}}{\cos\theta_{jk}},$$

由 i,j,k 的任意性知 $\cos\theta_{ij}=\pm\frac{1}{n}$，故 $\theta_{ij}=\arccos\frac{1}{n}$，或 $\theta_{ij}=\pi-\arccos\frac{1}{n}(i,j=1,2,\cdots,n+1,$
$i\neq j)$.

若 n 维正则单形 Σ 的内二面角设为 $\beta_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n+1,i\neq j)$. 因为 $n\geqslant 2$,所以

$$\beta_{ij}=\arccos\frac{1}{n}\leqslant\theta_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n+1,i\neq j).$$

故由[6]中的定理 2 知单形 Σ 与单形 $\mathfrak{S}$ 相似,从而 $\mathfrak{S}$ 为正则单形.

由(2.1)知

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sin^2\alpha_i\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \tag{2.4}$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\sin^2\theta_{ij}\leqslant\frac{n-1}{2n}(n+1)^2. \tag{2.5}$$

(2.4)式即[1],[2]的主要结论之一,但[1]仅给出了(2.4)等号成立的充分条件.

利用算术一几何平均不等式及(2.4),(2.5)式即可得到(2.2),(2.3)式.

推论 2 设 x_i 为正数 $(i=1,2,\cdots,n+1)$,对于 E^n 中的单形 $\mathfrak{S}$ 成立不等式

$$\sum_{i=1}^{n+1}x_i\sin\alpha_i\leqslant n^{-n/2}\Big(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{x_i}\Big)^{n/2}\Big(\prod_{i=1}^{n+1}x_i\Big)^{1/2}, \tag{2.6}$$

式中等号成立的充分必要条件为单形 $\mathfrak{S}$ 的各侧面面积相等且下面各式成立

$$\frac{x_i^{-1}}{\sum_{i=1}^{n+1}x_i^{-2}}=\frac{\cos\theta_{ij}}{n(\cos\theta_{ij}\cos\theta_{ik}+\cos\theta_{jk})} \tag{2.7}$$

$(i,j,k=1,2,\cdots,n+1,i,j,k$ 两两不等).

证明 由(1.1)得

$$\sum_{i=1}^{n+1}\Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}m_j^2\Big)\sin^2\alpha_i\leqslant\frac{1}{n^n}\Big(\sum_{i=1}^{n+1}m_i^2\Big)^n. \tag{2.8}$$

令 $m_i=\left(\frac{1}{x_1}\right)^{1/2}\Big(\prod_{j=1}^{n+1}x_j\Big)^{1/2n}$,则 $x_i=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}m_j^2\ (i=1,2,\cdots,n+1)$,此时(2.8)式即为

$$\sum_{i=1}^{n+1}x_i\sin^2\alpha_i\leqslant\frac{1}{n^n}\Big(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{x_i}\Big)^n\Big(\prod_{i=1}^{n+1}x_i\Big). \tag{2.9}$$

利用 Cauchy 不等式,有

$$\sum_{i=1}^{n+1}x_i\sin\alpha_i\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\sin^2\alpha_i\Big)^{1/2}. \tag{2.10}$$

结合(2.9),(2.10)即得(2.6),而(2.6)式等号成立当且仅当(2.9),(2.10)两式等号同时成立.

由 Cauchy 不等式等号成立条件知(2.1)式等号当且仅当

$$\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1}\sin\alpha_1}=\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_2}\sin\alpha_2}=\cdots=\frac{\sqrt{x_{n+1}}}{\sqrt{x_{n+1}}\sin\alpha_{n+1}},$$

即

$$\sin\alpha_1=\sin\alpha_2=\cdots=\sin\alpha_{n+1} \tag{2.11}$$

时成立.

利用高维正弦定理[2]知(2.11)式等价于单形 $\mathfrak{S}$ 的各侧面面积相等.

由不等式(1.1)等号成立条件知(2.9)式等号成立的充分条件为(2.7)式成立. 因此(2.6)式等号成立的充要条件为单形 $\mathfrak{S}$ 的各侧面面积相等且(2.7)式成立.

特别在(2.6)中取 $n=2$,对 E^2 中的$\triangle ABC$,有

$$x_1\sin A+x_2\sin B+x_3\sin C\leqslant\frac{1}{2}(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\sqrt{\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}},\tag{2.12}$$

此即 Klamkin 在[7]中提出的不等式.

推论 3 单形 $\mathfrak{S}$ 的侧面面积 V_i 和它的体积 V 之间成立不等式

$$V\leqslant\sqrt{n+1}\left[\frac{(n-1)!^2}{n^{3n-2}}\right]^{\frac{1}{2(n-1)}}\left(\prod_{i=1}^{n+1}V_i\right)^{\frac{n}{n^2-1}},\tag{2.13}$$

其中等号当且仅当 $\mathfrak{S}$ 为正则单形时成立.

证明 不等式(2.13)首先在[8]中被证实,文[1]、[2]等后来也分别给出了证明.下面我们利用不等式(2.3)给出一个新的证明.

用数学归纳法.

易知 $n=2$ 时(2.13)式成立.下设 $n-1$ 时($n\geqslant3$) (2.13)成立.

若单形 $\mathfrak{S}$ 的侧面 f_1,f_2 的 $n-1$ 维体积分别为 $V_1,V_2,f_1\cap f_2$ ($n-2$ 维单形)的体积为 V_{12},则不难证明

$$V=\frac{n-1}{n}\frac{V_1V_2}{V_{12}}\sin\theta_{12}.\tag{2.14}$$

对于单形 $\mathfrak{S}$,这样的等式共有 $\frac{1}{2}n(n+1)$个,将这些不等式相乘,得

$$V^{\frac{1}{2}n(n+1)}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{2}n(n+1)}\frac{\left(\prod_{i=1}^{n+1}V_i\right)^n}{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}V_{ij}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\sin\theta_{ij}.$$

由不等式(2.3)故有

$$V^{\frac{1}{2}n(n+1)}\leqslant\left[\frac{(n-1)^3(n+1)}{n^4}\right]^{\frac{1}{4}n(n+1)}\frac{\left(\prod_{i=1}^{n+1}V_i\right)^n}{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}V_{ij}}.\tag{2.15}$$

由归纳法假定知

$$V_j\leqslant\sqrt{n}\left[\frac{(n-2)!^2}{(n-1)^{3n-5}}\right]^{\frac{1}{2(n-2)}}\left(\prod_{i=1}^{n+1}V_{ij}\right)^{\frac{n-1}{n(n-2)}},\tag{2.16}$$

其中 V_j 为某 f_j($n-1$ 维单形)的体积,$V_{ij}(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,n=1,i\neq j)$为 f_j 的 n 个侧面面积.

对于单形 $\mathfrak{S}$,类似于不等式(2.16)的不等式共有 $n+1$ 个,将这些不等式相乘,得

$$\prod_{i=1}^{n+1}V_i\leqslant n^{\frac{n+1}{2}}\left[\frac{(n-2)!^2}{(n-1)^{3n-5}}\right]^{\frac{n+1}{2(n-2)}}\left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}V_{ij}\right)^{\frac{2(n-1)}{n(n-2)}},$$

从而

$$\left(\prod_{i=1}^{n+1}V_i\right)^{\frac{2(n-1)}{n(n-2)}}\leqslant n^{\frac{n(n+1)(n-2)}{4(n-1)}}\left[\frac{(n-2)!^2}{(n-1)^{3n-5}}\right]^{\frac{n(n+1)}{4(n-1)}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}V_{ij}.\tag{2.17}$$

由(2.15),(2.17)即可得到(2.13),且易知其中的等号当且仅当 $\mathfrak{S}$ 为正则单形时成立.

因此不等式(2.13)对任意不小于 2 的自然数 n 都成立.

推论 4 对于 H^n 中的单形 Ω 成立不等式

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}\sin^2\varphi_{ij}<\frac{n-1}{2n}(n+1)^2, \tag{2.18}$$

$$\prod_{1\le i<j\le n+1}\sin^2\varphi_{ij}<\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{\frac{1}{4}n(n+1)}. \tag{2.19}$$

证明 在不等式(1.7)中令 $p_1=p_2=\cdots=p_{n+1}=1$，即可得到(2.18)，再利用算术-几何平均不等式及(2.18)即可得到(2.19)。

参 考 文 献

[1] 蒋星耀，关于高维单形顶点角的不等式，数学年刊，8(A)(1987)，6：668—670.

[2] 刘根洪，E^n 中的正弦定理及应用，数学研究与评论，9(1989)，1：45—52.

[3] P. Bortoš, Časopis Pěst Mat., 93(1986), 273—277.

[4] 哈代等著，越民义译，不等式，科学出版社，1965 年.

[5] 杨路、张景中，非欧双曲几何的若干度量问题 I 等角嵌入和度量方程，中国科学技术大学学报，13(1983)，数学专辑，123—134.

[6] 杨路、张景中，预给二面角的单形嵌入 E^n 的充分必要条件，数学学报，26(1983)，2：250—256.

[7] M. S. Klamkin, *On a triangle inequality*, Crux Mathematicorum, 10(1984), 5: 139—140.

[8] 张景中、杨路，关于质点组的一类几何不等式，中国科学技术大学学报，11(1981)，2：1—8.

Trianglar Inequalities on Simplex

Su Huaming

(Hefei Polytechnic University)

Abstract

Theorem 1 *We show that let S be a simplex in E^n, its vertex angles being α_i and interior dihedral angles formed by arbitrary two side faces f_i, f_j of S being Q_{ij}, if m_i are positive numbers $(i,j=1,2,\ldots,n+1, i\neq j)$, then*

$$\sum_{i=1}^{n+1}\Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} m_j^2\Big)\sin^2\alpha_i \le \Big[\frac{2}{n(n-1)}\Big]^{n/2}\Big[\sum_{1\le i<j\le n+1}(m_i m_j\sin Q_{ij})^2\Big]^{n/2} \le \frac{1}{n^n}\Big(\sum_{i=1}^{n+1} m_i^2\Big)^n.$$

Theorem 2 *Let Ω be a simplex in H^n, its interior dihedral angles formed by arbitrary two side faces F_i, F_j of Ω being φ_{ij}, if p_i be positive numbers $(i,j=1,2,\ldots,n+1, i\neq j)$, then*

$$\sum_{1\le i<j\le n+1}(p_i p_j\sin^2\varphi_{ij})^2<\frac{n-1}{2n}\Big(\sum_{i=1}^{n+1}p_i^2\Big)^2.$$