第26卷第1期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol.26, No.1
2006年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb., 2006

**文章编号**: 1000-341X(2006)01-0161-10　　　**文献标识码**: **A**

# 三 I 表达式取最小值时的最优解

覃 锋 [1,2]

(1. 陕西师范大学数学与信息科学学院，陕西　西安 710062;
2. 江西师范大学数学与信息科学学院，江西　南昌 330027)
(E-mail: qinfeng923@163.com)

**摘　要**: 在本文中，针对蕴涵算子 $R_0$, 我们给出了当 $A \to B$ 与 $A^*(B^*)$ 给定时，求使三 I 表达式 $(A \to B) \to (A^* \to B^*)$ 取最小值的全体 $B^*(A^*)$ 之集的上确界 (下确界) 算法. 并将上确界算法推广到多维多重的模糊推理中. 从三 I 表达式取最值时求最优的 $B^*(A^*)$ 的角度来看，本文是三 I 算法思想的延伸和完善.

**关键词**: $R_0$- 算子; 三 I 表达式; 三 I 算法.
**MSC(2000)**: 03B05, 54E35
**中图分类**: O141.1, O189.2

## 1 引 言

众所周知，在模糊推理中广泛而成功应用的方法是 Zadeh 在 1973 年提出的 CRI 方法. 若无特殊说明，我们总约定： $A, A^*$ 是 $X$ 上的模糊集； $B, B^*$ 是 $Y$ 上的模糊集； $R$ 是蕴涵算子. 当推理模式是

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A \to B \\ \text{且给定} & A^* \\ \hline \text{求} & B^* \end{array} \tag{1}$$

时，用 CRI 方法求出的

$$B^*(y) = \sup_{x \in X} A^*(x) \wedge R(A(x), B(y)), \quad y \in Y;$$

当推理模式是

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A \to B \\ \text{且给定} & B^* \\ \hline \text{求} & A^* \end{array} \tag{2}$$

时，用 CRI 方法求出的

$$A^*(x) = \inf_{y \in Y} B^*(y) \vee R(A(x), B(y)), \quad x \in X,$$

由于这一方法缺乏严格的逻辑基础而常常受到人们的怀疑 [1−14]. 例如， 1993 年发生在美国第十一届人工智能年会中关于 “模糊逻辑似是而非的成功” 的争论就足以说明这一事实. 同时，这

**收稿日期**: 2003-09-08
**基金项目**: 国家自然科学基金 (10471083), 江西省自然科学基金 (0411025)

场争论在国内也受到许多学者的关注 [1,7−14]. 为了给模糊推理奠定严格的逻辑基础, [6] 中针对蕴涵算子 $R_0$ 提出了三 I 算法. 在推理模式 (1) 中, 三 I 算法的思想是: 认为待求的 $B^*$ 就是在已知 $A\to B$ 与 $A^*$ 的条件下满足 $(A\to B)\to(A^*\to B^*)=1$ 的最小 $B^*$, 且

$$B^*(y)=\sup_{x\in E_y}A^*(x)\wedge R_0(A(x),B(y)),\quad y\in Y.$$

其中 $E_y=\{x\in X|R_0(A(x),B(y))+A^*(x)>1\}$; $R_0:\ [0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, $R_0(a,b)=\begin{cases}1, & a\le b;\\ a'\vee b, & a>b.\end{cases}$ $a'=1-a,\ a,b\in[0,1]$. 在以后, 若无特别说明, 我们总假定 $R_0(a,b)=a\to b$. 在推理模式 (2) 中, 三 I 算法的思想是: 认为待求的 $A^*$ 就是在已知 $A\to B$ 与 $B^*$ 的条件下满足 $(A\to B)\to(A^*\to B^*)=1$ 的最大 $A^*$, 且

$$A^*(x)=\inf_{y\in E_x}B^*(x)\vee(R_0(A(x),B(y)))',\quad x\in X.$$

其中 $E_x=\{y\in Y|R_0(A(x),B(y))>B^*(x)\}$. 我们称用三 I 方法求解推理模式 (1) (推理模式 (2)) 中 $B^*(A^*)$ 的过程为三 I-FMP(三 I-FMT) 求解过程.

我们称

$$(A\to B)\to(A^*\to B^*)\tag{3}$$

为三 I 表达式.

首先我们分析三 I-FMP 的求解过程. 事实上, 在表达式 (3) 中, 令 $B^*(y)\equiv 1$, 则表达式 (3) 有最大值 1. 换而言之, 三 I-FMP 求解的过程是在已知 $A\to B$ 和 $A^*$ 时求使表达式 (3) 取最大值时的最小 $B^*$. 类似地, 我们可以发现三 I-FMT 本质上是当 (3) 取最大值 1 时, 求最小的 $A^*$.

那么我们为什么要考虑三 I 公式呢？因为对 (2) 的解释是类似的, 在这里我们仅针对推理模式 (1) 作出解释. 事实上, 应该注意到在推理模式 (1) 中待求的 $B^*$ 可以看成先由 $A^*$ 为前件推 $B^*$, 然后再以 $A\to B$ 为前件推 $A^*\to B^*$. 用符号可表示为 $(A\to B)\to(A^*\to B^*)$. 当然 $B^*$ 也可以看成先以 $A\to B$ 为前件推理, 再由 $A^*$ 推 $(A\to B)\to B^*$, 用符号可表示为 $A^*\to((A\to B)\to B^*)$. 另外, 我们也可以视 $B^*$ 同时由 $(A\to B)$ 和 $A^*$ 所推出的, 用符号可表示为 $(A\to B)\otimes A^*\to B^*$. 但是在逻辑系统 $\mathcal{L}^*$ 中我们容易证明 $(A\to B)\to(A^*\to B^*)\approx A^*\to((A\to B)\to B^*)\approx(A\to B)\otimes A^*\to B^*$, 在这里, $\approx$ 表示可证等价, $\otimes$ 表示合取.

基于上面的分析, 我们自然要考虑

**问题 1** 已知 $A\to B$ 和 $A^*$ 时, 使表达式 (3) 取最小值时最大的 $B^*$ 是怎样的呢？

类似地, 我们有

**问题 2** 已知 $A\to B$ 和 $B^*$ 时, 使表达式 (3) 取最小值时最小的 $A^*$ 是怎样的呢？

在本文的第二部分回答问题 1; 第三部分回答问题 2; 第四部分将第二部分提出的上确界算法推广到多维多重的模糊推中; 第五部分是一个简单的结束语.

## 2 问题 1 的回答

我们容易观察到在已知 $A\to B$ 和 $A^*$ 的条件下, 当 $B^*\equiv 0$ 时, 表达式 (3) 取最小值且为

$$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x))'$$

$$= \begin{cases} 1, & R_0(A(x),B(y)) \le (A^*(x))'; \\ (A^*(x))', & R_0(A(x),B(y)) > (A^*(x))',\ R_0(A(x),B(y)) > A^*(x); \\ (R_0(A(x),B(y)))', & R_0(A(x),B(y)) > (A^*(x))',\ R_0(A(x),B(y)) \le A^*(x). \end{cases} \tag{4}$$

从 (4) 可以看出，当 $R_0(A(x),B(y)) \le (A^*(x))'$ 时， (3) 的最小值是 1, 又 (3) 的最大值也是 1, 因此，问题 1 中寻求的 $B^*(y) \equiv 1$. 此外，当 $R_0(A(x),B(y)) \equiv 0$ 时， (3) 的最小值也是 1, 因此在这种情况下，问题 1 中寻求的 $B^*(y) \equiv 1$. 下面我们假设以上两中情形不成立时，寻求问题 1 中待求的 $B^*(y)$.

**定理 1** (上确界算法 I) 设 $X$, $Y$ 是非空集， $A$, $A^* \in \mathcal{F}(X)$, $B$, $B^* \in \mathcal{F}(Y)$. 对任意 $y \in Y$, 若 $x \in E_y$, 则在 $\mathcal{F}(Y)$ 中使 (3) 取最小值的全体 $B^*(y)$ 之集的上确界为

$$C^*(y) = \inf_{x \in E_y}((A^*(x) \wedge (A^*(x))'), \quad y \in Y, \tag{5}$$

在这里， $E_y = \{x \in X | R_0(A(x),B(y)) > (A^*(x))' \vee A^*(x)\}$, $\mathcal{F}(X)$ 和 $\mathcal{F}(Y)$ 分别是论域 $X$ 和 $Y$ 上的全体模糊集.

**证明** 令 $C(y) \in \mathcal{F}(Y)$. 对任意 $y \in Y$, 若 $C(y) < C^*(y)$, 那么对任意 $x \in E_y$, 有 $C(y) < A^*(x) \wedge (A^*(x))'$ 成立. 这样我们可以推出

$$A^*(x) \to C(y) = (A^*(x))' \vee C(y) \tag{6}$$

和

$$C(y) < R_0(A(x),B(y)). \tag{7}$$

进一步，由 (6), (7) 和 $x \in E_y$, 我们可以获得

$$\begin{aligned}(A(x) \to B(y)) &\to (A^*(x) \to C(y)) = R_0(A(x),B(y)) \to (A^*(x))' \vee C(y) \\ &= (R_0(A(x),B(y)))' \vee (A^*(x))' \vee C(y) = (A^*(x))'.\end{aligned}$$

另一方面，取 $D(y) \in \mathcal{F}(Y)$. 若存在 $y_0 \in Y$ 使得 $D(y_0) > C^*(y_0) = \inf_{x \in E_{y_0}}((A^*(x) \wedge (A^*(x))')$, 那么容易获得存在 $x_0 \in E_{y_0}$ 使得 $D(y_0) > A^*(x_0) \wedge (A^*(x_0))'$. 若 $A^*(x_0) \le (A^*(x_0))'$, 则 $D(y_0) > A^*(x_0)$, 从而有 $A^*(x_0) \to D(y_0) = 1$. 因此 $(A(x_0) \to B(y_0)) \to (A^*(x_0) \to D(y_0)) = 1 > (A^*(x_0))'$. 若 $A^*(x_0) > (A^*(x_0))'$, 那么 $D(y_0) > (A^*(x_0))'$. 又因为 $A^*(x_0) \to D(y_0) \ge (A^*(x_0))' \vee D(y_0)$ 成立，这样有

$$\begin{aligned}(A(x_0) \to B(y_0)) &\to (A^*(x_0) \to D(y_0)) \ge R_0(A(x_0),B(y_0)) \to (A^*(x_0))' \vee D(y_0) \\ &\ge (R_0(A(x_0),B(y_0)))' \vee (A^*(x_0))' \vee D(y_0) = D(y_0) > (A^*(x_0))'.\end{aligned}$$

这样我们就完成了定理的证明.

**注 1** 当 $x \in E_y$ 时， (5) 仅说明在已知 $A \to B$ 和 $A^*$ 的条件下，使得 (3) 取最小值的全体 $B^*$ 之集的上确界是 $C^*$. 此时， $C^*$ 不一定能使 (3) 取最小值.

**例 1** 令 $X = Y = [0,1]$, $A(x) \equiv 0.4$, $B(y) \equiv 0.3$, $A^*(x) \equiv 0.5$, 则由 (4) 知此时 (3) 的最小值是 0.5. 不难验证，对任意的 $B^*(y) \in \mathcal{F}(Y)$ 且满足 $B^*(y) < C^*(y) \equiv 0.5$ 都有 $(0.4 \to 0.3) \to (0.5 \to B^*(y)) \equiv 0.5$ 成立. 但若将 $B^*(y)$ 用 0.5 代换，则有

$$(0.4 \to 0.3) \to (0.5 \to 0.5) \equiv 1 > 0.5.$$

从而说明此时 $C^*(y)$ 不能使 (3) 取最小值.

**定理 2** (上确界算法 II) 设 $X,\ Y$ 是非空集, $A,\ A^*\in\mathcal{F}(X),\ B,\ B^*\in\mathcal{F}(Y)$. 对任意 $y\in Y$, 如果 $x\in K_y$, 则在 $\mathcal{F}(Y)$ 中使 (3) 取最小值的全体 $B^*(y)$ 之集的上确界为

$$C^*(y)=\inf_{x\in K_y}(R_0(A(x),B(y))\wedge(R_0(A(x),B(y)))'),\ y\in Y. \tag{8}$$

在这里 $K_y=\{x\in X|R_0(A(x),B(y))>(A^*(x))',\ R_0(A(x),B(y))\le A^*(x)\}$.

**证明** 令 $C(y)\in\mathcal{F}(Y)$. 对任意 $y\in Y$, 若 $C(y)<C^*(y)=\inf_{x\in K_y}(R_0(A(x),B(y))\wedge(R_0(A(x),B(y)))')$, 那么对任意 $x\in E_y$, 有 $C(y)<R_0(A(x),B(y))\wedge(R_0(A(x),B(y)))'$, 从而我们可以推出

$$C(y)<A^*(x). \tag{9}$$

由 (9) 可知

$$A^*(x)\to C(y)=(A^*(x))'\vee C(y). \tag{10}$$

因此根据 (10) 和 $x\in K_y$ 有

$$\begin{aligned}&(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to C(y))=R_0(A(x),B(y))\to(A^*(x))'\vee C(y)\\&=(R_0(A(x),B(y)))'\vee(A^*(x))'\vee C(y)=(R_0(A(x),B(y)))'.\end{aligned}$$

另一方面, 令 $D(y)\in\mathcal{F}(Y)$, 且假设存在 $y_0\in Y$, 使 $D(y_0)>C^*(y_0)=\inf_{x\in K_{y_0}}(R_0(A(x),B(y_0))\wedge(R_0(A(x),B(y_0)))')$ 成立, 那么存在 $x_0\in K_{y_0}$, 使得 $D(y_0)>R_0(A(x_0),B(y_0))\wedge(R_0(A(x_0),B(y_0)))'$. 若 $R_0(A(x_0),B(y_0))\le(R_0(A(x_0),B(y_0)))'$, 则有 $D(y_0)>R_0(A(x_0),B(y_0))$. 从而我们可得：存在 $x_0\in K_{y_0}$, 使得

$$D(y_0)>(A^*(x_0))'>(R_0(A(x_0),B(y_0)))'. \tag{11}$$

又，容易证明

$$A^*(x_0)\to D(y_0)\ge(A^*(x_0))'\vee D(y_0). \tag{12}$$

因此根据 (12), $x_0\in K_{y_0}$ 和 (11) 有

$$\begin{aligned}&(A(x_0)\to B(y_0))\to(A^*(x_0)\to D(y_0))\ge R_0(A(x_0),B(y_0))\to(A^*(x_0))'\vee D(y_0)\\&\ge(R_0(A(x_0),B(y_0)))'\vee(A^*(x_0))'\vee D(y_0)=D(y_0)>(R_0(A(x_0),B(y_0)))'.\end{aligned}$$

若 $R_0(A(x),B(y_0))>(R_0(A(x),B(y_0)))'$, 那么有 $D(y_0)>(R_0(A(x),B(y_0)))'$. 因此由 (12) 知

$$\begin{aligned}&(A(x_0)\to B(y_0))\to(A^*(x_0)\to D(y_0))\ge R_0(A(x_0),B(y_0))\to(A^*(x_0))'\vee D(y_0)\\&\ge(R_0(A(x_0),B(y_0)))'\vee(A^*(x_0))'\vee D(y_0)\ge D(y_0)>(R_0(A(x_0),B(y_0)))'.\end{aligned}$$

这样我们就完成了证明.

**注 2** 当 $x\in K_y$ 时, (8) 仅说明在已知 $A\to B$ 和 $A^*$ 的条件下, 使 (3) 取最小值的全体 $B^*$ 之集的上确界是 $C^*$. 此时, $C^*$ 不一定能使 (3) 取最小值.

**例 2** 令 $X=Y=[0,1],\ A(x)\equiv0.6,\ B(y)\equiv0.5,\ A^*(x)\equiv0.6$, 则由 (4) 知此时 (3) 的最小值是 0.5. 不难验证, 对任意的 $B^*(y)\in\mathcal{F}(Y)$ 且满足 $B^*(y)<C^*(y)\equiv0.5$ 都有 $(0.6\to0.5)\to(0.6\to B^*(y))\equiv0.5$ 成立. 但若将 $B^*(y)$ 用 0.5 代换, 则有

$$(0.6\to0.5)\to(0.6\to0.5)\equiv1>0.5$$

从而说明此时 $C^*(y)$ 不能使 (3) 取最小值.

由定理 1 和定理 2, 我们有

**定理 3** 若 $X$ 和 $Y$ 是两非空集, $A,\ A^* \in \mathcal{F}(X),\ B,\ B^* \in \mathcal{F}(Y)$. 则在 $\mathcal{F}(Y)$ 中使 (3) 取最小值的全体 $B^*(y)$ 之集的上确界为

$$C^*(y) = (\inf_{x\in E_y}((A^*(x)\wedge(A^*(x))')) \wedge (\inf_{x\in K_y}(R_0(A(x),B(y))\wedge(R_0(A(x),B(y)))')),\ y\in Y,$$

在这里，我们规定当 $E_y$ 和 $K_y$(参见定理 1,2) 都是空集时， $C^*(y)=1$.

## 3 问题 2 的回答

我们容易看到在已知 $A\to B$ 和 $B^*$ 的条件下，当 $A^*\equiv 1$ 时，表达式 (3) 取最小值且为

$$\begin{aligned}&(A(x)\to B(y))\to B^*(y)\\ &=\begin{cases} B^*(y), & R_0(A(x),B(y)) > B^*(y), (R_0(A(x),B(y)))' \le B^*(y);\\ (R_0(A(x),B(y)))', & R_0(A(x),B(y))\wedge(R_0(A(x),B(y)))' > B^*(y);\\ 1, & R_0(A(x),B(y)) \le B^*(y).\end{cases}\end{aligned} \tag{13}$$

从 (13) 可以看出，当 $R_0(A(x),B(y)) \le (B^*(y)$ 时， (3) 的最小值是 1, 又 (3) 的最大值也是 1, 因此，问题 2 中寻求的 $A^*(x)\equiv 0$. 此外，当 $R_0(A(x),B(y))\equiv 0$ 时， (3) 的最小值也是 1, 因此，问题 2 中寻求的 $A^*(x)\equiv 0$. 下面我们假设以上两中情形不成立时，寻求问题 2 中待求的 $A^*(x)$.

**定理 4** (下确界算法 I) 设 $X,\ Y$ 是非空集， $A,\ A^*\in\mathcal{F}(X),\ B,\ B^*\in\mathcal{F}(Y)$. 对任意 $x\in X$, 如果 $y\in E_x$, 则在 $\mathcal{F}(X)$ 中使 (3) 取最小值的全体 $A^*(x)$ 之集的下确界为

$$D^*(x) = \sup_{y\in E_x}((R_0(A(x),B(y)))' \vee R_0(A(x),B(y))),\ x\in X, \tag{14}$$

其中 $E_x = \{y\in Y | R_0(A(x),B(y))\wedge(R_0(A(x),B(y)))' > B^*(y)\}$.

**证明** 令 $C(x)\in\mathcal{F}(X)$, 对任意 $x\in X$, 若 $C(x) > D^*(x) = \sup_{y\in E_x}((R_0(A(x),B(y)))' \vee R_0(A(x),B(y)))$, 那么对任意 $y\in E_x$ 有 $C(x) > ((R_0(A(x),B(y)))' \vee R_0(A(x),B(y))$. 因此我们可以获得：对任意 $y\in E_x$, 有

$$C(x) > B^*(y). \tag{15}$$

从而有

$$C(x)\to B^*(y) = (C(x))' \vee B^*(y). \tag{16}$$

又 $C(x) > ((R_0(A(x),B(y)))'$. 因此有

$$(C(x))' < R_0(A(x),B(y)). \tag{17}$$

这样根据 (16), (17) 和 $y\in E_x$ 可知

$$\begin{aligned}&(A(x)\to B(y))\to(C(x)\to B^*(y)) = R_0(A(x),B(y))\to(C(x))'\vee B^*(y)\\ &=(R_0(A(x),B(y)))' \vee (C(x))' \vee B^*(y) = (R_0(A(x),B(y)))'.\end{aligned}$$

另一方面, 令 $D(x)\in\mathcal{F}(X)$, 若存在 $x_0\in X$ 使 $D(x_0)<D^*(x_0)=\sup_{y\in E_{x_0}}((R_0(A(x_0),B(y)))'\vee R_0(A(x_0),B(y)))$ 成立，那么存在 $y_0\in E_{x_0}$ 使得

$$D(x_0)<(R_0(A(x_0),B(y_0)))'\vee R_0(A(x_0),B(y_0))$$

成立. 若 $(R_0(A(x_0),B(y_0)))'\leq R_0(A(x_0),B(y_0))$, 那么 $D(x_0)<R_0(A(x_0),B(y_0))$, 进而有 $(D(x_0))'>(R_0(A(x_0),B(y_0)))'$. 又 $D(x_0)\to B^*(y_0)\geq(D(x_0))'\vee B^*(y_0)$. 因此有

$$\begin{aligned}&(A(x_0)\to B(y_0))\to(D(x_0)\to B^*(y_0))\geq R_0(A(x_0),B(y_0))\to(D(x_0))'\vee B^*(y_0)\\&\quad\geq(R_0(A(x_0),B(y_0)))'\vee(D(x_0))'\vee B^*(y_0)=(D(x_0))'>(R_0(A(x_0),B(y_0)))'.\end{aligned}$$

若 $(R_0(A(x_0),B(y_0)))'>R_0(A(x_0),B(y_0))$, 那么 $D(x_0)<(R_0(A(x_0),B(y_0)))'$, 这样我们可知存在 $y_0\in E_{x_0}$ 使得 $(D(x_0))'>R_0(A(x_0),B(y_0))>B^*(y_0)$ 成立. 又 $D(x_0)\to B^*(y_0)\geq(D(x_0))'\vee B^*(y_0)$. 因此我们有

$$\begin{aligned}&(A(x_0)\to B(y_0))\to(D(x_0)\to B^*(y_0))\geq R_0(A(x_0),B(y_0))\to(D(x_0))'\vee B^*(y_0)\\&\quad=1>(R_0(A(x_0),B(y_0)))'.\end{aligned}$$

这样我们就完成定理的证明.

**注 3** 当 $y\in E_x$ 时, (14) 仅说明在已知 $A\to B$ 和 $B^*$ 的条件下，使 (3) 取最小值的全体 $A^*$ 之集的上确界是 $D^*$. 此时, $D^*$ 不一定能使 (3) 取最小值.

**例 3** 令 $X=Y=[0,1]$, $A(x)\equiv 0.5$, $B(y)\equiv 0.2$, $B^*(y)\equiv 0.4$, 则由 (14) 知此时 (3) 的最小值是 0.5. 不难验证，对任意 $A^*(x)\in\mathcal{F}(X)$ 且满足 $A^*(x)>D^*(x)\equiv 0.5$ 都有 $(0.5\to 0.2)\to(A^*(x)\to 0.4)\equiv 0.5$ 成立. 但若将 $A^*(x)$ 用 0.5 代换，则有

$$(0.5\to 0.2)\to(0.5\to 0.4)\equiv 1>0.5$$

从而说明此时 $D^*(x)$ 不能使 (3) 取最小值.

**定理 5** (下确界算法 II) 设 $X$, $Y$ 是非空集, $A$, $A^*\in\mathcal{F}(X), B$, $B^*\in\mathcal{F}(Y)$. 对任意 $x\in X$, 如果 $y\in K_x$, 则 $\mathcal{F}(X)$ 中使 (3) 取最小值的全体 $A^*(x)$ 之集的下确界为

$$D^*(x)=\sup_{y\in K_x}((B^*(y))'\vee B^*(y)),\quad x\in X, \tag{18}$$

其中 $K_x=\{y\in Y|R_0(A(x),B(y))>B^*(y),(R_0(A(x),B(y)))'\leq B^*(y)\}$.

**证明** 令 $C(x)\in\mathcal{F}(X)$. 对任意 $x\in X$, 若 $C(x)>D^*(x)$, 那么对任意 $y\in E_x$ 都有 $C(x)>(B^*(y))'\vee B^*(y)$. 进而有 $C(x)>B^*(y)$. 因此有

$$C(x)\to B^*(y)=(C(x))'\vee B^*(y). \tag{19}$$

由 $y\in K_x$ 可知

$$(R_0(A(x),B(y)))'<(B^*(y))'. \tag{20}$$

由 (20) 和 $C(x)>(B^*(y))'$ 可知 $(R_0(A(x),B(y)))'<C(x)$. 因此有

$$R_0(A(x),B(y))>(C(x))'. \tag{21}$$

这样根据 (19),(21) 和 $y \in K_x$ 可知

$$\begin{aligned}&(A(x) \to B(y)) \to (C(x) \to B^*(y)) = R_0(A(x), B(y)) \to (C(x))' \vee B^*(y)\\&\quad = (R_0(A(x), B(y)))' \vee (C(x))' \vee B^*(y) = B^*(y).\end{aligned}$$

另一方面，令 $D(x) \in \mathcal{F}(X)$, 若存在 $x_0 \in X$ 使 $D(x_0) < D^*(x_0) = \sup_{y \in K_{x_0}}((B^*(y))' \vee B^*(y))$, 则存在 $y_0 \in E_{x_0}$ 使得 $D(x_0) < (B^*(y_0))' \vee B^*(y_0)$. 若 $(B^*(y_0))' \leq B^*(y_0)$, 则 $D(x_0) < B^*(y_0))$, 进而有 $D(x_0) \to B^*(y_0) = 1$. 因此有

$$(A(x_0) \to B(y_0)) \to (D(x_0) \to B^*(y_0)) = 1 > B^*(y_0).$$

若 $(B^*(y_0))' > B^*(y_0)$, 则 $D(x_0) < (B^*(y_0))'$, 进而有 $(D(x_0))' > B^*(y_0) > (R_0(A(x_0), B(y_0)))'$. 注意到 $D(x_0) \to B^*(y_0) \geq (D(x_0))' \vee B^*(y_0)$. 因此有

$$\begin{aligned}&(A(x_0) \to B(y_0)) \to (D(x_0) \to B^*(y_0)) \geq R_0(A(x_0), B(y_0)) \to (D(x_0))' \vee B^*(y_0)\\&\quad \geq (R_0(A(x_0), B(y_0)))' \vee (D(x_0))' \vee B^*(y_0) = (D(x_0))' > B^*(y_0).\end{aligned}$$

这样我们就完成了定理的证明.

**注 4** 当 $y \in K_x$ 时，(18) 仅说明在已知 $A \to B$ 和 $B^*$ 的条件下，使 (3) 取最小值的全体 $A^*$ 之集的上确界是 $D^*$. 此时，$D^*$ 不一定能使 (3) 取最小值.

**例 4** 令 $X = Y = [0,1]$, $A(x) \equiv 0.6$, $B(y) \equiv 0.2$, $B^*(y) \equiv 0.5$, 则由 (13) 知此时 (3) 的最小值是 0.5. 不难验证，对任意的 $A^*(x) \in \mathcal{F}(X)$ 且满足 $A^*(x) > D^*(x) \equiv 0.5$ 都有 $(0.6 \to 0.2) \to (A^*(x) \to 0.5) \equiv 0.5$ 成立. 但若将 $A^*(x)$ 用 0.5 代换，则有

$$(0.6 \to 0.2) \to (0.5 \to 0.5) = 1 > 0.5$$

从而说明此时 $D^*(x)$ 不能使 (3) 取最小值.

由定理 4 和定理 5 有

**定理 6** 设 $X$, $Y$ 是非空集，$A$, $A^* \in \mathcal{F}(X), B$, $B^* \in \mathcal{F}(Y)$. 则 $\mathcal{F}(X)$ 中使 (3) 取最小值的全体 $A^*(x)$ 之集的下确界为

$$D^*(x) = (\sup_{y \in E_x}((R_0(A(x), B(y)))' \vee R_0(A(x), B(y)))) \vee (\sup_{y \in K_x}((B^*(y))' \vee B^*(y))), \quad x \in X.$$

在这里我们规定：当 $E_x$ 和 $K_x$ 都空时，$D^*(x) = 0$.

## 4 多维多重模糊推理

在实际应用中，我们常碰到如下的推理模式：

$$\begin{array}{ll}\text{规则 1:} & A_{11}\text{且}A_{12}\text{且}\cdots\text{且}A_{1n} \to B_1\\ \text{规则 2:} & A_{21}\text{且}A_{22}\text{且}\cdots\text{且}A_{2n} \to B_2\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \text{规则 } m: & A_{m1}\text{且}A_{m2}\text{且}\cdots\text{且}A_{mn} \to B_m\\ \text{且给定:} & A_1^* \text{ 且 } A_2^*\text{且 } \cdots\text{且 } A_n^*\\ \hline \text{求:} & \qquad\qquad\qquad\qquad B^*\end{array}$$

其中 $A_{ij}$ 与 $A_j^*$ 分别是 $X_j$ 上的模糊集， $B_j$ 与 $B^*$ 是 $Y$ 上的模糊集， $j=1,2,\cdots,n; i=1,2,\cdots,m$. 为书写的方便，本节仅讨论 $m=n=2$ 的情形．即如下推理模式：

$$\begin{array}{ll} \text{规则 1:} & A_{11}\text{且}A_{12}\to B_1 \\ \text{规则 2:} & A_{21}\text{且}A_{22}\to B_2 \\ \text{且给定:} & A_1^*\text{且 } A_2^* \\ \hline \text{求:} & \qquad\qquad B^* \end{array} \tag{22}$$

在 [14] 中，作者分析了各种模糊推理存在信息损失的现象之后，提出了一个新方法，即认为推理模式 (22) 中所求的 $B^*$ 是满足方程

$$\begin{aligned}&((A_{11}(x_1)\otimes A_{12}(x_2))\to B_1(y))\to[((A_{21}(x_1)\otimes A_{22}(x_2))\to B_2(y))\to\\&\quad((A_1^*(x_1)\otimes A_2^*(x_2))\to B^*(y))]=1\end{aligned}\tag{23}$$

的最小解，且

$$B^*(y)=\sup\{A_1^*(x_1)\otimes A_2^*(x_2)\bigotimes_{i=1}^{2}((A_{i1}(x_1)\otimes A_{i2}(x_2))\to B_i(y))|x_1\in X_1,x_2\in X_2\}.$$

其中， $\otimes:[0,1]\times[0,1]\to[0,1], a\otimes b=\begin{cases}0, & a+b\le 1;\\ a\wedge b, & a+b>1.\end{cases}$

为讨论的方便, 我们约定 $R_i(x_1,x_2;y)=(A_{i1}(x_1)\otimes A_{i2}(x_2))\to B_i(y), i=1,2;\ A^*(x_1,x_2)=A_1^*(x_1)\otimes A_2^*(x_2)$. 则 (23) 可以改写为

$$R_1(x_1,x_2;y)\to[R_2(x_1,x_2;y)\to(A^*(x_1,x_2)\to B^*(y))]=1.$$

由文献 [14] 知 $a\to(b\to c)=a\otimes b\to c$, 其中 $a,b,c\in[0,1]$. 则 (23) 可进一步改写为

$$R_1(x_1,x_2;y)\otimes R_2(x_1,x_2;y)\to(A^*(x_1,x_2)\to B^*(y))=1.$$

令 $B^*(y)\equiv 1$, 那么我们容易看到

$$R_1(x_1,x_2;y)\otimes R_2(x_1,x_2;y)\to(A^*(x_1,x_2)\to B^*(y))\tag{24}$$

能取最大值 1. 与前面的分析类似, 我们可以认为用文 [14] 中所提出的求 $B^*$ 方法, 从本质上讲, 就是在给定 $A_{11},A_{12},A_{21},A_{22},A_1^*,A_2^*,B_1,B_2$ 之后，即给定 $R_1(x_1,x_2;y),R_2(x_1,x_2;y),A^*(x_1,x_2)$ 之后，寻求使 (24) 取最大值的最小 $B^*$. 不难看出，当 $B^*(y)\equiv 0$ 时， (24) 取最小值

$$R_1\otimes R_2\to(A^*)'=\begin{cases}1, & (R_1\otimes R_2)\le(A^*)';\\ (R_1\otimes R_2)', & (R_1\otimes R_2)>(A^*)',\ R_1\otimes R_2\le A^*;\\ (A^*)', & (R_1\otimes R_2)>(A^*)',\ R_1\otimes R_2>A^*.\end{cases}\tag{25}$$

这样我们自然提出

**问题 3** 已知 $R_1,R_2$ 和 $A^*$ 时，使表达式 (24) 取最小值时最大的 $B^*$ 是怎样的呢？

类似与问题 1 的处理, 由 (25) 不难看出, 当 $(R_1\otimes R_2)\le(A^*)'$ 时, 问题 3 中寻求的 $B^*\equiv 1$, 下面我们总假设以上情形不成立.

**定理 7** (上确界算法 I) 设 $X_i$, $Y$ 是非空集, $A_{ij}$, $A_j^* \in \mathcal{F}(X_j)$, $B_i \in \mathcal{F}(Y)$, $i,j=1,2$. 对任意 $y \in Y$, 如果 $(x_1,x_2) \in E_y$, 则 $\mathcal{F}(Y)$ 中使 (24) 取最小值的全体 $B^*(y)$ 之集的上确界为

$$C^*(y) = \inf_{(x_1,x_2)\in E_y} ((A_1^*(x_1) \otimes A_2^*(x_2)) \wedge (A_1^*(x_1) \otimes A_2^*(x_2))'), \quad y \in Y,$$

其中, $E_y = \{(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2 | ((A_{11}(x_1) \otimes A_{12}(x_2)) \to B_1(y)) \otimes ((A_{21}(x_1) \otimes A_{22}(x_2)) \to B_2(y)) > (A_1^*(x_1) \otimes A_2^*(x_2)) \vee (A_1^*(x_1) \otimes A_2^*(x_2))'\}$.

**证明** 可以类似于定理 1 进行证明.

**定理 8** (上确界算法 II) 设 $X_i$, $Y$ 是非空集, $A_{ij}$, $A_j^* \in \mathcal{F}(X_j)$, $B_i \in \mathcal{F}(Y)$, $i,j=1,2$. 对任意 $y \in Y$, 如果 $(x_1,x_2) \in K_y$, 则 $\mathcal{F}(Y)$ 中使 (24) 取最小值的全体 $B^*(y)$ 之集的上确界为

$$\begin{aligned}C^*(y) = \inf_{(x_1,x_2)\in K_y} &((((A_{11}(x_1) \otimes A_{12}(x_2)) \to B_1(y))\otimes \\ &((A_{21}(x_1) \otimes A_{22}(x_2)) \to B_2(y))) \wedge (((A_{11}(x_1) \otimes A_{12}(x_2)) \to B_1(y))\otimes \\ &((A_{21}(x_1) \otimes A_{22}(x_2)) \to B_2(y)))'), \quad y \in Y,\end{aligned}$$

其中, $K_y = \{(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2 | ((A_{11}(x_1) \otimes A_{12}(x_2)) \to B_1(y)) \otimes ((A_{21}(x_1) \otimes A_{22}(x_2)) \to B_2(y)) > (A_1^*(x_1) \otimes A_2^*(x_2))'$, $((A_{11}(x_1) \otimes A_{12}(x_2)) \to B_1(y)) \otimes ((A_{21}(x_1) \otimes A_{22}(x_2)) \to B_2(y)) \leq A_1^*(x_1) \otimes A_2^*(x_2)\}$.

**证明** 可以类似于定理 2 进行证明.

由定理 7 和定理 8, 我们有

**定理 9** (上确界算法 II) 设 $X_i$, $Y$ 是非空集, $A_{ij}$, $A_j^* \in \mathcal{F}(X_j)$, $B_i \in \mathcal{F}(Y)$, $i,j=1,2$. 则在 $\mathcal{F}(Y)$ 中使 (24) 取最小值的全体 $B^*(y)$ 之集的上确界为

$$\begin{aligned}C^*(y) =& (\inf_{(x_1,x_2)\in E_y} ((A_1^*(x_1) \otimes A_2^*(x_2)) \wedge (A_1^*(x_1) \otimes A_2^*(x_2))'))\wedge \\ &(\inf_{(x_1,x_2)\in K_y} ((((A_{11}(x_1) \otimes A_{12}(x_2)) \to B_1(y))\otimes \\ &((A_{21}(x_1) \otimes A_{22}(x_2)) \to B_2(y))) \wedge (((A_{11}(x_1) \otimes A_{12}(x_2)) \to B_1(y))\otimes \\ &((A_{21}(x_1) \otimes A_{22}(x_2)) \to B_2(y)))')), \quad y \in Y.\end{aligned}$$

## 5 结束语

在本文中我们不仅回答了问题 1 和问题 2, 而且将单维单重上确界算法推广到多维多重的模糊推理中. 从三 I 表达式取最值时求最优的 $B^*(A^*)$ 的角度来看, 本文是三 I 算法思想的延伸和完善. 另一方面, 从结论与结论的证明来看, 本文不是 [6] 和 [14] 中的算法简单对偶. 本文中的结论及结论的证明要比 [6] 和 [14] 的结论及结论的证明复杂.

## 参考文献:

[1] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理 [M]. 北京：科学出版社， 2000.
WANG Guo-jun. *Non-classical Mathematical Logic and Approximate Reasoning* [M]. Beijing: Science Press, 2000. (in Chinese)

[2] DUBOIS D, PRADE H. *Fuzzy sets approximate reasoning, I* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, **40**: 143–202.
[3] DUBOIS D, PRADE H. *Fuzzy sets approximate reasoning, II* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, **40**: 203–244.
[4] TURKSEN I B, TIAN Y. *Combination of rules or their consequences in fuzzy expert systems* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1993, **58**: 3-40.
[5] GORZALCZANY M B . *A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets* [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1987, **21**: 1–17.
[6] 王国俊. 模糊推理全蕴涵的三 I 算法 [J]. 中国科学 (E 辑), 1999, **29**: 45–53.
WANG Guo-jun. *The full implication triple I method for fuzzy reasoning* [J]. Science in China, Ser. E, 1999, **29**: 45–53. (in Chinese)
[7] WANG Guo-jun. *On the logic founding of fuzzy reasoning* [J]. Information Science, 1999, **117**: 47–88.
[8] WANG Guo-jun. *Triple method and interval valued fuzzy reasoning* [J]. Science in China, Ser.E, 2000, **43**: 242–253.
[9] YING Ming-sheng. *A logic for approximate reasoning* [J]. J. Symb. Logic, 1994, **59**: 830–837.
[10] 李洪兴. 从模糊控制的本质看模糊逻辑的成功 [J]. 模糊系统与数学, 1995, **4**: 1–14.
LI Hong-xing. *Look the success of fuzzy logic through the mathematical essence of fuzzy control* [J]. Mohu Xitong yu Shuxue , 1995, **4**: 1–14. (in Chinese)
[11] 吴望名. 关于模糊逻辑的一场争论 [J]. 模糊系统与数学, 1995, **2**: 1–9.
WU Wang-ming. *A disputation about fuzzy mathematics* [J]. Mohu Xitong yu Shuxue, 1995, **2**: 1–9. (in Chinese)
[12] XU Yang, QIN Ke-yun, LIU Jun, et al. *L-valued propositional logic* $L_{vpl}$ [J]. Inform. Sci., 1999, **114**: 205–235.
[13] 宋士吉, 吴澄. 模糊推理的反向三 I 算法 [J]. 中国科学 (E 辑), 2002, **32**: 230–246.
SONG Shi-ji, WU Cheng. *The reverse triple I method in fuzzy reasoning* [J]. Science in China, Ser. E, 2002, **32**: 230–246.(in Chinese)
[14] WANG Guo-jun. *Formalized theory of general fuzzy reasoning* [J]. Inform. Sci., 2004, **160**: 251–266.

# The Optimal Solutions as Triple I Formula Taking the Minimal Value

*QIN Feng*[1,2]
(1. Dept. of Math., Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China;
2. Dept. of Math., Jiangxi Normal University, Nanchang 330027, China )

**Abstract**: In this paper, for implication operator $R_0$, a method which calculates the supremum (infimum) of set of $B^*(A^*)$ such that triple I formula $(A \to B) \to (A^* \to B^*)$ takes minimal value is given. Moreover, this method is generalized into the general form of FMP. As far as finding the optimal solution $B^*(A^*)$ such that triple I formula takes the maximal value or the minimal value is concerned, this paper extends and perfects the idea of triple I method.

**Key words**: implication operator $R_0$; triple I formula; triple I method.