第12卷第4期
1992年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 12 No. 4
Nov. 1992

关于张量最小长度的一些结果*

朱忠南
(江苏教育学院,南京 210013)

摘 要

本文根据不同重数张量空间之间的关系,采用对张量空间分划的方法,得到了张量空间中张量达到最小长度的一个充分条件和一个必要条件.此外,本文还讨论了最小长度的上界 k_{max},得到了如下估计:对 n 维向量空间上的 m 阶张量空间,$n^{[\frac{m}{2}]}\leqslant k_{max}\leqslant n^{m-1}$.

设 V_i 是特征为 0 的域 R 上的 n_i 维向量空间,$i=1,\cdots,m$. $P=\langle I_m\otimes\rangle=\bigotimes_{i=1}^{m}V_i$,称为 $V_1,\cdots,V_m$ 的张量积空间,其中$\otimes$是 $V_1\times\cdots\times V_m$ 到 P 的张映射,张映射$\otimes$的值$\otimes(v_1,\cdots,v_m)$称为可合张量或可合元素,记作$\otimes(v_1,\cdots,v_m)=v_1\otimes\cdots\otimes v_m$. 张量空间 $V_1\otimes\cdots\otimes V_m=\langle I_m\otimes\rangle$一般不等于可合张量的集合 $I_m\otimes=\{v_1\otimes\cdots\otimes v_m\mid v_i\in V_i,\ i=1,\cdots,m\}$. 称属于$\langle I_m\otimes\rangle$而不属于 $I_m\otimes$的张量为不可合张量.

以 α、β 等表示前 n 个正整数为分量的序列,记

$$\Gamma_{m,n}=\{\alpha\mid\alpha=(\alpha(1),\cdots,\alpha(m)),\ 1\leqslant\alpha(i)\leqslant n,\ i=1,\cdots,m.\}$$

$$Q_{m,n}=\{\alpha\mid\alpha\in\Gamma_{m,n},\ \alpha(1)<\alpha(2)<\cdots<\alpha(m)\}.$$

设 $\{e_{i1},\cdots,e_{in_i}\}$ 为 V_i 的一组基,$\{f_{i1},\cdots,f_{in_i}\}$ 为 V_i 的对偶空间 V_i^* 的对偶基,$i=1,\cdots,m$. 则 $\{e_\gamma^\otimes\mid\gamma\in\Gamma_{m,n}\}$是$\bigotimes_1^m V_i$ 的一组基,$\{f_\gamma^\otimes\mid\gamma\in\Gamma_{m,n}\}$是$(\bigotimes_1^m V_i)^*=\bigotimes_1^m V_i^*$ 的一组对偶基,其中 $e_\gamma^\otimes=e_{1\gamma(1)}\otimes\cdots\otimes e_{m\gamma(m)}$, $f_\gamma^\otimes=f_{1\gamma(1)}\otimes\cdots\otimes e_{m\gamma(m)}$. 这样,对任意 $Z\in\bigotimes_1^m V_i$,Z 总可以表示为 $Z=\sum_{\gamma\in\Gamma_{m,n}}a(\gamma)e_\gamma^\otimes$, $a(\gamma)\in R$. 称 $a(\gamma)$,$\gamma\in\Gamma_{m,n}$ 为 Z 在基$\{e_\gamma^\otimes\mid\gamma\in\Gamma_{m,n}\}$下的坐标.

容易知道,对于任意 $Z\in\bigotimes_1^m V_i$,Z 总可以表示为若干个可合张量的和,但表示法一般不唯一. 然而在所有的表示中,必有所含可合张量个数最小的表示法,称这种表示中的可合张量的个数为张量 Z 的最小长度,也称为张量 Z 的秩.

显然,当张量 Z 的最小长度为 1 时,Z 是可合张量,而当 Z 的最小长度大于 1 时,Z 是不可合张量. 因此,张量最小长度的研究,也是判断可合或不可合张量的一种途径.

设 $\beta\in Q_{l,m}$, $\beta'\in Q_{m-l,m}$, $1\leqslant l\leqslant m-1$. 且 β,β'的分量恰好组成前 m 个正整数,这时称 β,β' 为互补的,也称为前 m 个正整数的一个 l 分划.

先给出最小长度的一个充分条件.

* 1990年12月17日收到.

定理 1 设 $Z=\sum_{i=1}^{k}v_{1i}\otimes\cdots\otimes v_{mi}\in V_1\otimes\cdots\otimes V_m$，若存在前 m 个正整数的一个 l 分划：$\beta\in Q_{l,m},\beta'\in Q_{m-l,m},1\leqslant l\leqslant m-1$，使 $\{v_{\beta(1)1}\otimes\cdots\otimes v_{\beta(l)1},\cdots,v_{\beta(1)k}\otimes\cdots\otimes v_{\beta(l)k}$ 和 $\{v_{\beta'(1)1}\otimes\cdots\otimes v_{\beta'(m-l)1},\cdots,v_{\beta'(1)k}\otimes\cdots\otimes V_{\beta'(m-l)k}\}$ 分别线性无关，则 Z 的最小长度为 k.

证明 由于 $V_1\otimes\cdots\otimes V_m$ 与 $V_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes V_{\sigma(m)}$ 自然同构，其中 $\sigma\in S_m$. 所以只需要对分划 $\beta=(1,\cdots,l),\beta'=(l+1,\cdots,m)$ 的情形证明就可以了. 设张量 Z 还有另一表示法：$Z=\sum_{j=1}^{r}u_{1j}\otimes\cdots\otimes u_{mj}$，我们来证明一定有 $k\leqslant r$.

因为 $\{v_{l+1\,1}\otimes\cdots\otimes v_{m1},\cdots,v_{l+1\,k}\otimes\cdots\otimes v_{mk}\}$ 线性无关，所以存在 $g\in\bigotimes_{l+1}^{m}V_i^*$，使 $g(v_{l+1\,i}\otimes\cdots\otimes v_{mi})=1,\ 1\leqslant i\leqslant k, g(v_{l+1\,s}\otimes\cdots\otimes v_{ms})=0,\ s\neq i$. 设 $f\in\bigotimes_{1}^{l}V_j^*$ 是任意的 l 重线性函数，则 $\varphi=fg$ 是 m 重线性的. 由于

$$\sum_{i=1}^{k}u_{1i}\otimes\cdots\otimes u_{mi}=\sum_{i=1}^{r}u_{1j}\otimes\cdots\otimes u_{mj},$$

因此

$$\sum_{i=1}^{k}\varphi(u_{1i}\otimes\cdots\otimes u_{mi})=\sum_{i=1}^{r}\varphi(u_{1j}\otimes\cdots\otimes u_{mj}),$$

即

$$\sum_{i=1}^{k}f(u_{1i}\otimes\cdots\otimes u_{li})g(u_{1+1\,i}\otimes\cdots\otimes u_{mi})=\sum_{j=1}^{r}f(u_{1j}\otimes\cdots\otimes u_{lj})g(u_{1+1\,j}\otimes\cdots\otimes u_{mj}),$$

于是，有

$$f(u_{1i}\otimes\cdots\otimes u_{li})=f[\sum_{j=1}^{r}g(u_{l+1\,j}\otimes\cdots\otimes u_{mj})u_{1j}\otimes\cdots\otimes u_{lj}],\ 1\leqslant i\leqslant k.$$

由于 f 的任意性，故

$$u_{1i}\otimes\cdots\otimes u_{li}=\sum_{j=1}^{r}g(u_{l+1\,j}\otimes\cdots\otimes u_{mj})U_{1j}\otimes\cdots\otimes u_{lj},\ 1\leqslant i\leqslant k.$$

因此，对 $1\leqslant i\leqslant k$，都有

$$U_{1i}\otimes\cdots\otimes U_{li}\in<u_{11}\otimes\cdots\otimes u_{l1},\cdots u_{1r}\otimes\cdots\otimes u_{lr}>.$$

由条件，$U_{11}\otimes\cdots\otimes U_{l1},\cdots,U_{1k}\otimes\cdots\otimes U_{lk}$ 线性无关，因此 $k\leqslant r$，即 Z 的最小长度为 k. □.

这里需要指出，定理 1 的条件并不是必要的. 例如，设 $\{e_1,e_2\}$ 为 V 的一组基，$Z=e_1\otimes e_1\otimes e_1+e_1\otimes e_2\otimes e_2+e_2\otimes e_1\otimes e_2\in V\otimes V\otimes V$，则 Z 的最小长度等于 3，因为首先 Z 不是可合的，即 Z 的最小长度不等于 1，其次，设有 $V_i=a_{i1}e_1+a_{i2}e_2,\ u_i=b_{i1}e_1+b_{i2}e_2,\ i=1,2,3$. 使 $Z=U_1\otimes U_2\otimes U_3+u_1\otimes u_2\otimes u_3$，则通过计算不难发现这样的 $a_{i1},a_{i2},b_{i1},b_{i2},\ i=1,2,3$ 不存在，即 Z 的最小长度也不等于 2，因此 Z 的最小长度等于 3.

但对于任意分划 $\beta=(1),\beta'=(2,3)$ 或 $\beta=(2),\beta'=(1,3)$ 或 $\beta=(3),\beta'=(1,2)$，总有 $\{e_1,e_1,e_2\}$ 或 $\{e_1,e_2,e_1\}$ 或 $\{e_1,e_2,e_2\}$ 是线性相关的，也即定理 1 的条件不是必要的.

下面给出最小长度的一个必要条件.

定理 2 设 $Z=\sum_{i=1}^{k}U_{1i}\otimes\cdots\otimes U_{mi}$ 的最小长度为 k，则对于任意分划 $\beta(\beta(1),\cdots,\beta(m-1)),\beta'=(\beta'(1))$，都有 $U_{\beta m1}\otimes\cdots\otimes U_{\beta(m-1)},\cdots,U_{\beta(1)k}\otimes\cdots\otimes U_{\beta(m-1)k}$ 是线性无关的.

证明 与定理 1 同样，只要对 $\beta=(1,\cdots,m-1)$ 的情形证明就可以了. 用反证法，若 $U_{11}\otimes\cdots\otimes U_{m-1\,1},\cdots,U_{1k}\otimes\cdots\otimes U_{m-1\,k}$ 线性相关，不妨设

$$U_{1k}\otimes\cdots\otimes U_{(m-1)k}=\sum_{i=1}^{k-1}a_i(U_{1i}\otimes\cdots\otimes U_{m-1\,i}),\ a_i\in R.$$

于是

$$\begin{aligned}Z&=\sum_{i=1}^{k}U_{1i}\otimes\cdots\otimes U_{mi}=\sum_{i=1}^{k-1}U_{1i}\otimes\cdots\otimes U_{m-1\,i}\otimes U_{mi}+U_{1k}\otimes\cdots\otimes U_{m-1\,k}\otimes U_{mk}\\&=\sum_{i=1}^{k-1}U_{1i}\otimes\cdots\otimes U_{m-1\,i}\otimes U_{mi}+\sum_{i=1}^{k-1}(a_iU_{1i}\otimes\cdots\otimes U_{m-1\,i})\otimes U_{mk}\\&=\sum_{i=1}^{k-1}U_{1i}\otimes\cdots\otimes U_{m-1\,i}\otimes(U_{mi}+a_iU_{mk})=\sum_{i=1}^{k-1}U_{1i}\otimes\cdots\otimes U_{m-1\,i}\otimes U_{mi}\end{aligned}$$

其中 $U_{mi}=U_{mi}+a_iU_{mk}$, $i=1,\cdots,k-1$. 因此 Z 的最小长度小于 k，矛盾. 这就是说，$U_{11}\otimes\cdots\otimes U_{m-1\,1},\cdots,U_{1k}\otimes\cdots\otimes U_{m-1\,k}$ 是线性无关的. □.

同样地，定理 2 的条件也不是充分的. 例如，$Z=e_1\otimes e_1\otimes e_1+e_1\otimes e_2\otimes e_2+e_2\otimes e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_2\otimes e_1$，其中 $\{e_1,e_2\}$ 是 V 的一组基. 对于分划 $\beta=(1,2)$，$\beta'=(3)$ 或 $\beta=(1,3)$，$\beta'=(2)$ 或 $\beta=(2,3)$，$\beta'=(1)$，相应地，$\{e_1\otimes e_1,e_1\otimes e_2,e_2\otimes e_1,e_2\otimes e_2\}$ 或 $\{e_1\otimes e_1,e_1\otimes e_2,e_2\otimes e_2,e_2\otimes e_1\}$ 或 $\{e_1\otimes e_1,e_2\otimes e_2,e_1\otimes e_2,e_2\otimes e_1\}$ 都是线性无关的，但 Z 的最小长度并不等于 4，这是因为 Z 可以写成

$$Z=U_1\otimes U_2\otimes U_3+u_1\otimes u_2\otimes u_3$$

其中 $U_1=\frac{1}{2}(e_1+e_2)$，$U_2=e_1+e_2$，$u=\frac{1}{2}(e_1-e_2)$，$u_2=e_1-e_2$，$u_3=e_1-e_2$. 实际上，Z 的最小长度等于 2，因为 Z 显然是不连通的[3]，故 Z 是不可合的，即 Z 的最小长度不等于 1.

根据定理 1，在 m 阶张量空间 $\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V$ 中有如下结果.

推论 1 设 V 为 n 维向量空间，则在 m 阶张量空间 $\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V$ 中，存在张量 Z，它的最小长度 $k=n^{[\frac{m}{2}]}$，其中 $[\frac{m}{2}]$ 为 $\frac{m}{2}$ 的整数部分.

证明 不妨设 $m=2l$，令 $\beta=(1,\cdots,l)$，$\beta'=(l+1,\cdots,m)$ 为前 m 个正整数的一个分划. 设 $\{e_\gamma^{\otimes}\mid\gamma\in\Gamma_{l,n}\}$ 是 $\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V$ 的一组基，因而是线性无关的. 于是设

$$Z=\sum_{\gamma\in\Gamma_{l,n}}e_\gamma^{\otimes}\otimes e_\gamma^{\otimes}\in\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V$$

则 Z 的最小长度 $k=|\Gamma_{l,n}|=n^l=n^{[\frac{m}{2}]}$， □

同样，根据定理 2，在 $\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V$ 中有如下结果，(证明是显然的).

推论 2 设 V 是 n 维向量空间，$Z\in\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V$，若 Z 的最小长度为 k，则 $k\leqslant n^{m-1}$.

如果记 $k_{\max}=\max\{Z$ 的最小长度 $|Z\in\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V\}$，则由推论 1 和推论 2，可得

推论 3 设 V 为 n 维向量空间，$\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V$ 为 m 阶张量空间，则有 $n^{[\frac{m}{2}]}\leqslant k_{\max}\leqslant n^{m-1}$.

参 考 文 献

[1] 王伯莫，多重线性代数基础. 北京师范大学出版社，1985.

[2] Marcus, M., *Finite Dimensional Multilinear Algebra*. Part I, Marcel Dekker. Inc. 1975.

[3] 朱忠南，张量空间中可合元素的一些性质，南京大学学报数学半年刊，1989，6(2)：88－95.

Some Results on the Smallest Length of the Tensor

Zhu Zhongnan

(Jiangsu Education Institute, Nanjing)

Abstract

From the relations between tensor spaces of different orders, we obtain a sufficient condition and a necessary condition for the smallest length of the tensor by partitioning the tensor space moreover. Bounds for the smllest length of the tensor are given as: $n^{[\frac{m}{2}]} \leq K_{\max} \leq n^{m-1}$.