第4卷 第2期
1984年4月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.2
April 1984

概率度量空间中一个新的不动点定理*

李明珠

（南京航空学院）

概率度量空间中压缩型映象不动点定理的研究开始于1972年 Schgal-Bharucha-Reid 的工作〔3〕。以后不少人对概率度量空间中映象的不动点定理进一步讨论，特别是 Istratescu 的工作〔4〕把〔3〕中的结果作了重要的推广。最近张石生〔2〕对〔3〕、〔4〕中的结果作了进一步的推广，〔2〕中的结果包含了〔3〕、〔4〕的主要结果。

在此基础上，本文给出概率度量空间中压缩型映象的一个新的不动点定理。文中涉及的概念及引用的基本定理均见〔1〕。

定理 设（E，$\mathscr{F}$，Δ）是一$\mathscr{T}$完备的 Menger 空间，Δ是一连续的 t 范数；T是（E，$\mathscr{F}$，Δ）的自映象；对每一 $p\in E$，轨道 $O_T(p;\ 0,\ \infty)$ 概率有界；对每一 $p\in E$，存在正整数 $n(p)$，使对一切 $q\in E$ 和一切 $t\geqslant 0$ 有

$$F_{T^{n(p)}p,\,T^{n(p)}q}(t)\geqslant\min\left\{F_{p,q}\left(\frac{t}{c}\right),\ F_{T^{n(p)}p,\,p}\left(\frac{t}{c}\right)\right\},$$

其中 $c\in(0,1)$，

则 T 在 E 中存在唯一不动点 p^*，而且对任一 $p_0\in E$，迭代序列 $\{T^n p_0\}$ $\mathscr{T}$ 收敛于 p^*。

证明 任取 $p_0\in E$，令 $p_1=T^{n(p_0)}p_0,\cdots$，$p_{m+1}=T^{n(p_m)}p_m,\cdots$，记 $n(p_m)=n_m$。

第一步 证 $\{p_m\}$ 为 Cauchy 列。

$$F_{p_m,p_{m+i}}(t)=F_{T^{n_{m-1}}p_{m-1},\,T^{n_{m+i-1}+\cdots\cdots+n_m+n_{m-1}}p_{m-1}}(t)$$

$$\geqslant\min\left\{F_{p_{m-1},\,T^{n_{m+i-1}+\cdots\cdots+n_m}p_{m-1}}\left(\frac{t}{c}\right),\ F_{p_{m-1},\,T^{n_{m-1}}p_{m-1}}\left(\frac{t}{c}\right)\right\}$$

$$\geqslant\min\left\{F_{p_{m-2},\,T^{n_{m+i-1}+\cdots\cdots+n_m}p_{m-2}}\left(\frac{t}{c^2}\right)\ F_{p_{m-2},\,T^{n_{m-2}}p_{m-2}}\left(\frac{t}{c^2}\right),\right.$$

$$\left.F_{p_{m-2},\ T^{n_{m-1}}p_{m-2}}\left(\frac{t}{c^2}\right),\ F_{p_{m-2},\ T^{n_{m-2}}p_{m-2}}\left(\frac{t}{c^2}\right)\right\}$$

$$\geqslant\cdots\geqslant\min\left\{F_{p_0,\,T^{n_{m+i-1}+\cdots\cdots+n_m}p_0}\left(\frac{t}{c^m}\right),\ F_{p_0,\,T^{n_{m-1}}p_0}\left(\frac{t}{c^m}\right),\ \cdots,\ F_{p_0,\,T^{n_0}p_0}\left(\frac{t}{c^m}\right)\right\}$$

---

*1982年12月1日收到。

$$\geqslant \inf_{q\in\{T^n p_0\}_0^\infty} F_{p_0,q}\left(\frac{t}{c^m}\right) \geqslant \sup_{x<\frac{t}{c^m}} \inf_{q\in\{T^n p_0\}_0^\infty} F_{p_0,q}(x) \xrightarrow[m\to\infty]{} H(t),$$

因而 $\{p_m\}$ 为Cauchy 列，因而 $p_m \xrightarrow{\mathcal{T}} p_* \in E$。

第二步 证 p_* 是 T^{n*} 的不动点。

$$c\in(0,1),\ \delta=1-c>0,\ 记\ \lambda=\frac{c+\frac{\delta}{2}}{c}>1.$$

$$(1)\ F_{p_*,T^{n*}p_*}(t)\geqslant \Delta\left\{F_{T^{n*}p_*,T^{n*}p_i}\left(\left(c+\frac{\delta}{2}\right)t\right),\quad F_{T^{n*}p_i,p_*}\left(\frac{\delta}{2}t\right)\right\},$$

$$(2)\ F_{T^{n*}p_i,p_*}\left(\frac{\delta}{2}t\right)\geqslant \Delta\left\{F_{T^{n*}p_i,p_i}\left(\frac{\delta}{4}t\right),\ F_{p_i,p_*}\left(\frac{\delta}{4}t\right)\right\}$$

i）因为 $p_i \xrightarrow[i\to\infty]{\mathcal{T}} p_*$。 所以 $F_{p_i,p_*}\left(\frac{\delta}{4}t\right)\xrightarrow[i\to\infty]{} H(t)$。

$$\text{ii})\ F_{T^{n*}p_i,p_i}(t)\geqslant \min\left\{F_{p_{i-1},T^{n*}p_{i-1}}\left(\frac{t}{c}\right),\ F_{p_{i-1},T^{n_{i-1}}p_{i-1}}\left(\frac{t}{c}\right)\right\}$$

$$\geqslant \min\left\{F_{p_{i-2},T^{n*}p_{i-2}}\left(\frac{t}{c^2}\right),\ F_{p_{i-2},T^{n_{i-2}}p_{i-2}}\left(\frac{t}{c^2}\right),\right.$$

$$\left.F_{p_{i-2},T^{n_{i-1}}p_{i-2}}\left(\frac{t}{c^2}\right),\ F_{p_{i-2},T^{n_{i-2}}p_{i-2}}\left(\frac{t}{c^2}\right)\right\}\geqslant\cdots$$

$$\geqslant \min\left\{F_{p_0,T^{n*}p_0}\left(\frac{t}{c^i}\right),\ F_{p_0,T^{n_{i-1}}p_0}\left(\frac{t}{c^i}\right),\ \cdots F_{p_0,T^{n_0}p_0}\left(\frac{t}{c^i}\right)\right\}$$

$$\geqslant \inf_{q\in\{T^n p_0\}_0^\infty} F_{p_0,q}\left(\frac{t}{c^i}\right)\geqslant \sup_{x<\frac{t}{c^i}} \inf_{q\in\{T^n p_0\}_0^\infty} F_{p_0,q}(t)\xrightarrow[i\to\infty]{} H(t),$$

因而
$$F_{T^{n*}p_i,p_i}\left(\frac{\delta}{4}t\right)\xrightarrow[i\to\infty]{} H(t).$$

$$\text{iii})\ F_{T^{n*}p_*,T^{n*}p_i}(\lambda ct)\geqslant \min\{F_{p_*,p_i}(\lambda t),\ F_{T^{n*}p_*,p_*}(\lambda t)\},$$

而
$$F_{p_*,p_i}(\lambda t)\xrightarrow[i\to\infty]{} H(t).$$

综上i）—iii)，再利用Δ的连续性，令 $i\to\infty$，由（1）、（2）可得

$$F_{p_*,T^{n*}p_*}(t)\geqslant F_{p_*,T^{n*}p_*}(\lambda t).$$

因而
$$F_{p_*,T^{n*}p_*}(t)\geqslant F_{p_*,T^{n*}p_*}(\lambda^k t)\xrightarrow[k\to\infty]{} H(t),$$

$$p_*=T^{n*}p_*.$$

第三步 证 p_* 是 T^{n*} 的唯一不动点。

设若 $\tilde{p}=T^{n*}\tilde{p}$

则有
$$F_{\tilde{p},p_*}(t)=F_{T^{n_*}\tilde{p},T^{n_*}p_*}(t)$$
$$\geqslant\min\left\{F_{\tilde{p},p_*}\left(\frac{t}{c}\right),\ F_{p_*,T^{n_*}p_*}\left(\frac{t}{c}\right)\right\}=F_{\tilde{p},p_*}\left(\frac{t}{c}\right).$$
因而
$$F_{\tilde{p},p_*}(t)\geqslant F_{\tilde{p},p_*}\left(\frac{t}{c^k}\right)\xrightarrow[k\to\infty]{}H(t),$$
$$F_{\tilde{p},p_*}(t)=H(t),\qquad 即\quad \tilde{p}=p_*.$$
再证 p_* 是 T 的不动点。从
$$Tp_*=TT^{n_*}p_*=T^{n_*}Tp_*,$$
知 Tp_* 是 T^{n_*} 的不动点，再由唯一性可知
$$Tp_*=p_*.$$
因而 p_* 是 T 的唯一的不动点。

第四步 $\forall p_0\in E$，证 $T^np_0\xrightarrow{\mathscr{T}}p_*$.

对任意的正整数 $n>n_*$，有 $n=mn_*+s$，其中 $0\leqslant s<n_*$.
$$F_{T^n p_0,p_*}(t)=F_{T^{n_*m+s}p_0,T^{n_*}p_*}(t)$$
$$\geqslant\min\left\{F_{T^{n_*(m-1)+s}p_0,p_*}\left(\frac{t}{c}\right),\ F_{p_*,T^{n_*}p_*}\left(\frac{t}{c}\right)\right\}$$
$$=F_{T^{n_*(m-1)+s}p_0,p_*}\left(\frac{t}{c}\right)\geqslant\cdots\geqslant F_{T^sp_0,p_*}\left(\frac{t}{c^m}\right)$$
$$\geqslant\inf_{q\in\{T^sp_0\}_0^\infty}F_{p_*,q}\left(\frac{t}{c^m}\right)\xrightarrow[\text{从而}m\to\infty]{n\to\infty}H(t)$$
因而
$$T^np_0\xrightarrow{\mathscr{T}}p_*.$$
证毕。

参 考 文 献

[1] 张石生，概率度量空间的理论和应用，第三次全国泛函分析空间理论和泛函分析应用学术会议论文，1982.

[2] 张石生，关于 Sehgal—Bharucha—Reid—Istratescu 不动点定理的推广，成都科技大学学报，1982.

[3] Sehgal, V. M., Bharucha, A. T.—Reid, Fixed points of contraction mappings on probabilistic metric spaces, *Math. Systems Theory*, V. 6, (1972), No2, pp 97—102.

[4] Istratescu, I., A fixed point theorem for mappings with a probabilistic contractive iterate, Revue Roum. *Math. Pures et Appl.*, Tom. 26 (1981) No3, pp 431—435.