第11卷 第2期
1991年5月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.2
May, 1991

算子的最佳非负逼近和ω-非负逼近*

吴 福 朝

(安庆师范学院数学系，安庆)

摘 要

本文中所沿用的概念和符号除特别说明外，其意义与[4,5]相同. 本文主要给出了集 $P_\delta(A)$ 的结构以及正规算子 A 有唯一最佳 ω- 非负逼近的特征.

§1 集 $P_\delta(A)$ 的结构

$\mathbf{P}_\delta(A)$ 表示算子 A 所有的最佳非负逼近构成的集合. 关于集 $\mathbf{P}_\delta(A)$ 的结构我们有:

1.1 定理 下面陈述相互等价

(i) 非负算子 $P\in\mathbf{P}_\delta(A)$;

(ii) $P_0-2D_0\le P\le P_0$ 且存在 $\lambda\in\sigma(A-P)$, $\mathrm{Re}\lambda\le 0$ 使 $|\lambda|=\|A-P\|$;

(iii) $P_0-2D_0\le P\le P_0$ 且 $A-P$ 是正规型算子.

对算子 $A=B+iC$, 我们记

$$\mathbf{F}(A)=\left\{\mathbf{F}:\begin{array}{l}F=F^*\ge -B\text{ 且 }|B|\le D_0\\ \text{且 }-F+iC\text{是正规型算子}\end{array}\right\}$$

显然，对任意算子 A 必有 $D_0\in\mathbf{F}(A)$.

Halmos[1] 证明了 $P_0\in\mathbf{P}_\delta(A)$. 因此下面定理刻划了算子有唯一最佳非负逼近的特征. 从而解决了Halmos在[1]中提出的唯一性问题.

1.2 定理 $\mathbf{P}_\delta(A)=\{P_0\}$ 当且仅当 $\mathbf{F}(A)=\{D_0\}$.

§2 正规算子最佳ω-非负逼近的唯一性

关于算子的最佳 ω-非负逼近的概念见[5]. $\mathbf{P}_\xi(A)$ 表示算子 A 的所有最佳 ω-非负逼近构成的集合. 文[5]已证明: 对正规算子 $A=B+iC$, $B^+\in\mathbf{P}_\xi(A)$. 本节我们主要刻划正规算子有唯一最佳 ω-非负逼近的特征.

2.1 引理 若 $H=H_1\oplus H_2$ 且 A 是 H 上的算子

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$$

其中 A_{ij} 为从 H_j 到 H_i 的算子，则 A 为非负算子的充要条件是

$$A_{11}\ge 0,\ A_{22}\ge 0,\ A_{21}=A_{12}^*$$

* 1989年7月31日收到.

且存在压缩算子$\dot{U}$：$\overline{A_{22}H_2} \to \overline{A_{11}H_1}$使

$$A_{12} = A_{11}^{\frac{1}{2}} \cup A_{22}^{\frac{1}{2}}$$

2.2 引理 $\xi(A) = \delta(A)$的充要条件为$\mathbf{P}_\delta(A) \subset \mathbf{P}_\xi(A)$.

2.3 推论 若A是正规算子，则

$$\mathbf{P}_\xi(A) \subset \mathbf{P}_\xi(A).$$

利用引理2.1和推论2.3可证明

2.4 引理 若$A = B + iC$是正规算子且$B > 0$，则A有唯一最佳ω-非负逼近的充要条件为$C = BI$且$|\beta| = \xi(A)$. 其中β是实数.

2.5 引理 若$A = B + iC$是正规算子且$B \leq 0$，则A有唯一最佳ω-非负逼近的充要条件为A是酉算子的标量积.

根据引理2.1，2.4和2.5，可证明本节的主要结果：

2.6 定理 若$A = B + iC$是正规算子，则A有唯一最佳ω-非负逼近的充要条件为$-B^- + iC$是酉算子的标量积且$C|_{H_B^+} = \beta I_{H_B^+}$. 其中$\beta$是实数，$H_B^+ = E((0, +\infty))H$，$B^- = BE((-\infty, 0])$，$E(\cdot)$是$B$的谱测度.

§ 3 $\xi(A) = \|A\|$的充要条件

本节主要讨论$\xi(A) = \|A\|$的情形，对此我们有

3.1 定理 $\xi(A) = \|A\|$的充要条件是存在$\lambda \in \sigma(A)$，$\mathrm{Re}\lambda \leq 0$使$|\lambda| = \|A\|$.

由此定理和§ 2 引理2.2，可证明：

3.2 推论 若$A = B + iC$是正规型算子，则$\mathbf{P}_\xi(A) = \{0\}$即0为$A$的唯一最佳$\omega$-非负逼近的充要条件为$A = B + iC$是酉算子的标量积且$B \leq 0$.

3.3 推论 设$A = B + iC$. 若$\delta(A) = \xi(A)$ 则$\xi(A) = \|-B^- + iC\|$的充要条件为$-B^- + iC$是正规型算子.

参 考 文 献

[1] P. R. Halmos, Indiana Univ. Math. J. 21(1972).
[2] R. H. Bouldin, Trans. Amer. Math. Soc. 177 (1973).
[3] Ando, T., Sekiquchi, T., Kuzuki, T., Math. Z. Bd3 (1973).
[4] 李浩，数学学报 Vol. 23, No.6 (1980).
[5] 魏国强，胡善文，数学学报 Vol. 27, No.4 (1984).

Best Approximation and ω-Approximation of Operator by Positive Operators

Wu Fuchao

(Anqing Teacher's College)

In this paper, We determine constraction of set $\mathbf{P}_\delta(A)$ and we characterize normal operators with a unique ω-positive approximation.