第23卷第2期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 2
2003年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 2003

四元数体上矩阵方程的自共轭解*

曹 文 胜[1,2]

(1. 湖南科技大学数学与软件研究所，湖南 湘潭 411201；
2. 湖南大学数学与计量经济学院，湖南 长沙 410082)

摘 要：利用矩阵的M-P逆和矩阵分块，给出了四元数体上矩阵方程 $XB=D$ 在子空间上有自共轭解的充要条件以及解的一般形式，并由此给出了矩阵方程 $AXB=D$ 有自共轭解的充要条件和解的一般形式.

关键词：M-P逆；自共轭阵；子空间.

分类号：AMS(2000) 15A24/CLC number：O151.21

文献标识码：A 　　**文章编号**：1000-341X(2003)02-0343-06

1 引 言

设 R 代表实数域，H 代表实四元数体. H 中元素 $q=a_1+a_2i+a_3j+a_4k$，其中 $a_i\in R$ 且 $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$. 记 q 的共轭 $\bar{q}=a_1-a_2i-a_3j-a_4k$. $H^{m\times n}$ 为 H 上 $m\times n$ 矩阵的集合. 对 $A=(a_{ij})\in H^{n\times n}$，$A^*=(\bar{a}_{ji})$ 表示 A 的共轭转置. 若 $A=A^*$，则称 A 是自共轭阵，并以 $SH^{n\times n}$ 表示所有的 $n\times n$ 自共轭矩阵. 如文[1]，设 H^n 为 H 上 n 维列向量构成的右向量空间，其中定义内积

$$(x,y)=x^*y \quad (x,y\in H^n).$$

定义 1.1 设 S 是 H^n 的子空间，对 $A\in H^{n\times n}$，若 $(Ax,y)=(x,Ay)$，$\forall\, x,y\in S$，则称 A 是 S 上的自共轭阵.

以 $SH(S)$ 表示所有 S 上的自共轭阵的集合. 设 S 的维数 $\dim S=r$，则由[1]，不妨设 $e_1,\cdots,e_r$ 是 S 的一组标准正交基，扩基使得 $e_1,\cdots,e_r,e_{r+1},\cdots,e_n$ 为 H^n 的标准正交基，并记

$$U_1=(e_1,\cdots,e_r),U_2=(e_{r+1},\cdots,e_n),U=(U_1,U_2).$$

记 A_r 是由 A 的前 r 行和前 r 列构成的顺序子矩阵，

$$SH_r^{n\times n}=\{A\in H^{n\times n}\mid A_r\in SH^{r\times r}\}.$$

则仿[2,3]证明可得

* 收稿日期：2000-11-22
基金项目：湖南省教委青年基金资助项目(02C448)
作者简介：曹文胜(1973-)，男，博士.

引理 1.1 $A \in SH(S) \Leftrightarrow U_1^* A U_1 \in SH^{r\times r} \Leftrightarrow UGU^*$，其中 $G \in SH_r^{n\times n}$.

如果 $X \in H^{m\times n}$ 使得 $AXA = A, XAX = X, (AX)^* = AX, (XA)^* = XA$，则称 X 为 A 的 Moore-Penrose 广义逆，记作 A^+. 由复表示矩阵[4]，复矩阵的有关M-P逆的性质对于四元数矩阵也成立. 例如：$A^* = A^+ AA^* = A^* AA^+, (A^*)^+ = (A^+)^*, A = (A^+)^+$ 等. 记 $E_A = I - AA^+, F_A = I - A^+ A$，其中 I 为单位阵.

关于线性矩阵方程

$$XB = D \tag{1}$$

和

$$AXB = D, \tag{2}$$

在实数域和复数域上有自共轭解的情况，已有不少的研究[5-8]. 本文利用矩阵的M-P逆和矩阵分块，得到了矩阵方程 $XB = D$ 在 $SH_r^{n\times n}$ 中有解的充要条件和解的一般形式，并由此得到了矩阵方程 $AXB = D$ 有自共轭解的充要条件和解的一般形式，与以往相关结果比较，本文结论形式紧凑，内容有所推广.

2 几则引理

引理 2.1[9] $A \in H^{m\times n}, B \in H^{p\times q}, D \in H^{m\times q}$，则矩阵方程(2)有解的充要条件是

$$AA^+ DB^+ B = D. \tag{3}$$

当(3)满足时，一般解为

$$X = A^+ DB^+ + W - A^+ AWBB^+. \tag{4}$$

引理 2.2 矩阵方程

$$A^* X^* - XA = D \tag{5}$$

有解的充要条件是

$$D + D^* = 0,\ F_A D F_A = 0. \tag{6}$$

当(6)满足时，矩阵方程(5)的一般解为

$$X = V^* E_A + \frac{1}{2} A^+ AV^* AA^+ + \frac{1}{2} A^* VA^+ - DA^+ + \frac{1}{2} A^+ ADA^+, \tag{7}$$

其中 V 为任意矩阵.

证明 如果方程(5)有解 X_0，即 $A^* X_0^* - X_0 A = D$. 因为 $F_A A^* = 0, AF_A = 0$，所以

$$F_A D F_A = F_A (A^* X_0^* - X_0 A) F_A = F_A A^* X_0^* F_A - F_A X_0 A F_A = 0,$$

显然

$$D + D^* = 0,$$

故(6)成立. 必要性得证.

下证充分性. 设 X 如(7)所表示，注意到(6)，故有

$$\begin{aligned} A^* X^* - XA = & A^* (A^*)^+ D - \frac{1}{2} A^* (A^*)^+ DA^+ A + \frac{1}{2} A^* AA^+ VA^+ A + \\ & \frac{1}{2} A^* (A^*)^+ V^* A + DA^+ A - \frac{1}{2} A^+ ADA^+ A - \frac{1}{2} A^+ AV^* A - \frac{1}{2} A^* VA^+ A \\ = & DA^+ A - A^+ ADA^+ A + A^+ AD = D. \end{aligned}$$

若 X_0 满足 $A^* X_0^* - X_0 A = D$,则

$$X_0 E_A + \frac{1}{2} A^+ A X_0 A A^+ + \frac{1}{2} A^* X_0^* A^+ - D A^+ + \frac{1}{2} A^+ A D A^+$$

$$= X_0 - X_0 A A^+ + \frac{1}{2} A^+ A X_0 A A^+ + \frac{1}{2}(D + X_0 A) A^+ - D A^+ + \frac{1}{2} A^+ A D A^+$$

$$= X_0 - \frac{1}{2} F_A (D + X_0 A) A^+ = X_0 - \frac{1}{2} F_A A^* X_0^* A^+ = X_0,$$

所以(5)的任一解 X_0 可由公式(7)表示.

注 2.1 引理 2.2 是[7,8]相应结果的推广.

3 矩阵方程 $XB=D$

现考虑如下问题:给定 $B \in H^{n \times m}, D \in H^{n \times m}$,矩阵方程

$$XB=D$$

是否有解 $X \in SH(S)$?

因为 $XB=D$ 等价于 $U^* XUU^* B = U^* D$,由引理 1.1 上述问题等价于

问题 I 给定 $B \in H^{n \times m}, D \in H^{n \times m}$,矩阵方程

$$XB=D$$

是否有解 $X \in SH_r^{n \times n}$? 对 E_A, DB^+ 分块如下:

$$E_B = (E_1, E_2), DB^+ = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } E_1 \in H^{n \times r}, K_1 \in H^{r \times r}. \tag{8}$$

定理 3.1 问题 I 有解的充要条件是

$$DB^+ B = D, F_{E_1}(K_1 - K_1^*) F_{E_1} = 0, \tag{9}$$

其中 E_1, K_1 如(8)所示.当(9)满足时,一般解为

$$X = DB^+ + \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} E_B, \tag{10}$$

其中

$$Z_1 = V^* E_{E_1} + \frac{1}{2} E_1^+ E_1 V^* E_1 E_1^+ + \frac{1}{2} E_1^* V E_1^+ - (K_1 - K_1^*) E_1^+ + \frac{1}{2} E_1^+ E_1 (K_1 - K_1^*) E_1^+$$

$$(V, Z_2 \text{ 是任意矩阵}). \tag{11}$$

证明 由引理 2.1,当(9)满足时,方程(1)的一般解为

$$X = DB^+ + \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} E_B,$$

由(8)得

$$X = \begin{pmatrix} K_1 + Z_1 E_1 & K_2 + Z_1 E_2 \\ K_3 + Z_2 E_1 & K_4 + Z_2 E_2 \end{pmatrix},$$

要求 $X \in SH_r^{n \times n}$,即要求 $K_1 + Z_1 E_1 \in SH^{r \times r}$,也即

$$E_1^* Z_1^* - Z_1 E_1 = K_1 - K_1^*. \tag{12}$$

由(9)和引理 2.2,方程(12)有解且一般解如(11)所示. 故问题 I 的一般解为(10),充分性得证. 必要性显然.

注 3.1 定理 3.1 是文[8]的推广.

推论 3.1 矩阵方程

$$XB = D, X = X^{*} \tag{13}$$

有解的充要条件是

$$DB^{+}B = D, B^{*}D = D^{*}B. \tag{14}$$

当(14)成立时,一般解为

$$X = DB^{+} + (DB^{+})^{*}E_{B} + E_{B}ME_{B}, \tag{15}$$

其中 M 为任意的自共轭矩阵.

证明 在定理 3.1 中,$E_1 = E_B, K_1 = DB^{+}$,故(13)有解的充要条件是

$$DB^{+}B = D, F_{E_B}(DB^{+} - (DB^{+})^{*})F_{E_B} = 0.$$

此式即为式(14). 由式(10),一般解为

$$X = DB^{+} + (DB^{+})^{*}E_{B} + \frac{1}{2}E_{B}(V^{*} + V)E_{B},$$

上式即为(15).

注 3.2 推论 3.1 是[5]的主要结果在四元数体上的推广.

4 矩阵方程 $AXB=D$

我们提出如下问题:

问题 I 给定 $A \in H^{l\times n}, B \in H^{n\times m}, D \in H^{l\times m}$,矩阵方程组

$$AXB = D, X = X^{*} \tag{16}$$

是否有解?

定理 4.1 问题 I 有解的充要条件是

$$AA^{+}DB^{+}B = D, (I - (F_AB)^{+}F_AB)(D^{*}(A^{+})^{*}B - B^{*}A^{+}D)(I - (F_AB)^{+}F_AB) = 0. \tag{17}$$

当式(17)满足时,一般解为

$$X = A^{+}DB^{+} + (B^{+})^{*}D^{*}(A^{+})^{*}E_{B} + F_{A}WB^{+} + (B^{+})^{*}W^{*}F_{A}E_{B} + E_{B}ME_{B}, \tag{18}$$

其中 M 是任意的自共轭阵,

$$\begin{aligned} W = {} & (I - F_AB(F_AB)^{+})V + \frac{1}{2}F_AB(F_AB)^{+}V(F_AB)^{+}F_AB + \frac{1}{2}(B^{*}F_A)^{+}V^{*}F_AB + \\ & (B^{*}F_A)^{+}(D^{*}(A^{+})^{*}B - B^{*}A^{+}D) - \\ & \frac{1}{2}(B^{*}F_A)^{+}(D^{*}(A^{+})^{*}B - B^{*}A^{+}D)(F_AB)^{+}F_AB. \end{aligned} \tag{19}$$

证明 在条件 $AA^{+}DB^{+}B = D$ 下,令 $XB = Y$,则 $AXB = D$ 等价于方程组

$$\begin{cases} XB = Y \\ AY = D \end{cases}. \tag{20}$$

方程组(20)中第二个方程的一般解为

$$Y = A^{+} D + F_{A}W. \tag{21}$$

由推论 3.1,方程组(20)中第一个方程有自共轭解的充要条件是

$$B^{*}Y = Y^{*}B. \tag{22}$$

于是方程(16)有解等价于下述方程关于 W 有解

$$B^{*}F_{A}W - W^{*}F_{A}B = D^{*}(A^{+})^{*}B - B^{*}A^{+}D. \tag{23}$$

由引理 2.2,矩阵方程(23)有解的充要条件即为(17),且当(17)满足时,解 W 的一般形式如(19)所示.由推论 3.1 得一般解 X 由式(18)表示.

注 4.1 定理 4.1 是文[7]的推广,且当 $A=I$ 时,(18)即(15).

5 算 例

本节给出定理 3.1 的一个算例.

例 $r=2, B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}3-j & -2j\\ j-1 & 1-j\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.

经计算得 $F_{E_1}(K_1-K_1^{*})F_{E_1}=0$,由定理 3.1 得它的一般解为

$$X=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}+x & -\frac{1}{3}+x-j & \frac{4}{3}-x\\ j-\frac{1}{3}+x & \frac{2}{3}+x & -\frac{2}{3}-x\\ y+1 & y & 1-y\end{pmatrix}, \quad \text{其中 } x\in R, y\in H.$$

参考文献:

[1] 黄礼平. 自共轭四元数矩阵特征值的极值原理 [J]. 数学研究与评论, 1997, **17**(1): 101—104.
HUANG Li-ping. *Extremun principles of eigenvalues for self-conjugate quaternoin matrix* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1997, **17**(1): 101—104. (in Chinese)

[2] 曹文胜,郭忠. 子空间自共轭阵及反问题 $Ax=b$ [J]. 湖南大学学报, 1998, **25**(5): 14—16.
CAO Wen-sheng, GUO Zhong. *Self-conjugate matrix over subspace and inverse problem $Ax=b$* [J]. J. Hunan Univ., 1998, **25**(5): 14—16. (in Chinese)

[3] WANG Xian-tao, GUO Zhong, CAO Wen-sheng. *The inverse problem of matrix equation $AX=B$ on self-conjugate matrices over subspace* [J]. Hunan Annals of Math., 1998, **18**(3): 35—38.

[4] HUANG Li-ping. *Transformation theorems of quaternion matrics and their applications* [J]. Northeastern Math., 1993, **9**(1): 69—80.

[5] DON F J H. *On the symmetric solutions of linear matrix equation* [J]. Linear Algebra Appl., 1987, **93**: 1—7.

[6] CHU K W E. *Symmetric solutions of linear matrix equations by matrix decompositions* [J]. Linear Algebra Appl., 1989, **119**: 35—50.

[7] 袁永新. 关于一类线性矩阵方程的对称解 [J]. 工程数学学报, 1998, **15**(1): 25—29.
YUAN Yong-xin. *On the symmetric solutions of a class of linear matrix equation* [J]. J. of Eng.

Math., 1998, **15**(1): 25—29. (in Chinese)
[8] CRONE L. *Second order adjoint matrix equations* [J]. Linear Algebra Appl., 1981, **39**: 61—72.
[9] 黄礼平. 环上矩阵方程 $AXB+CYD=E$ 的可解性 [J]. 数学进展, 1997, **26**(3): 269—275.
HUANG Li-ping. *The solvability of matrix equation $AXB+CYD=E$ over a ring* [J]. Adv. in Math., 1997, **26**(3): 269—275. (in Chinese)

The Self-Conjugate Solutions of Quaternion Matrix Equation

CAO Wen-sheng[1,2]

(1. Inst. of Math. & Software, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China;
2. College of Math. & Econometrics, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: By using of Moore-Penrose inverse and Matrix Decomposition, the necessary and sufficient conditions for the existence of the Self-conjugate matrix solutions over subspace for quaternion matrix equation $XB=D$ are obtained together with the general forms of such solutions, and more, the necessary and sufficient conditions are obtained for matrix equation $AXB=D$ to have Self-conjugate matrix solutions, along with the expression for general common solutions.

Key words: the Moore-Penrose inverse; self-conjugate matrix; subspace.