关于Rotkiewicz的一个问题*

曹 珍 富

(哈尔滨工业大学)

在文〔1〕中，Rotkiewicz在文末提出了三个问题，其中第一个是：

问题　设$p>3, \neq 9$，是一个给定的奇数，问是否存在奇数q使得

$$\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\lambda} \tag{1}$$

和

$$\frac{p}{q}=c_1+\frac{1|}{|c_2}+\cdots+\frac{1|}{|c_\lambda},\quad c_\lambda>1? \tag{2}$$

这里$\left(\frac{q}{p}\right)$表Jocabi符号，$\frac{p}{q}=c_1+\frac{1|}{|c_2}+\cdots+\frac{1|}{|c_\lambda}=c_1+\cfrac{1}{c_2+\ddots+\cfrac{1}{c_\lambda}}$是把$\frac{p}{q}$展成简单连分数的一种记法．

在这篇短文中，我们完全解决了Rotkiewicz提出的这个问题，证明了下面的结果：

定理　设$p>3, \neq 9$，是一个给定的奇数，则存在奇数q使得（1）和（2）成立．

现在我们将这个定理分成两个引理来证明．

引理1　设$p>3, \neq 2^{2^{n+1}}+1$（$n=1,2,\cdots$）是一个给定的奇数，则存在奇数q使得（1）和（2）成立．

证　如果$p\equiv 5,7 \pmod 8$，则有奇数$q=p-2$使得$\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{p-2}{p}\right)=\left(\frac{-2}{p}\right)=-1$，以及$\frac{p}{q}=1+\frac{1|}{\left|\frac{p-3}{2}\right.}+\frac{1|}{|2}$，故在$p\equiv 5,7 \pmod 8$时，只要取$q=p-2$就有$c_1=1$，$c_2=\frac{p-3}{2}$，$c_3=2>1$，$\lambda=3$，使得（1）和（2）成立．

如果$p\equiv 3 \pmod 8$，则有奇数$q=\frac{p-1}{2}$使得

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{\frac{p-1}{2}}{p}\right)=\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{2\cdot\frac{p-1}{2}}{p}\right)=(-1)\cdot(-1)=1\text{和}\frac{p}{q}=2+\frac{1|}{|q}.$$

由于$p>3$，故$q=\frac{p-1}{2}>1$，因此在$p\equiv 3 \pmod 8$，$p>3$时，我们有奇数$q\left(=\frac{p-1}{2}\right)$使得（1）和（2）成立（$\lambda=2, c_1=2, c_2=q>1$）．

现在分三种情形来考虑$p\equiv 1 \pmod 8$．

1）$p\equiv 1 \pmod 8$且$p\equiv 1 \pmod 3$．此时令$q=\frac{p-3}{2}$，显然$q\equiv 1 \pmod 2$，$q\equiv 2 \pmod 3$．而且

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{\frac{p-3}{2}}{p}\right)=\left(\frac{-3}{p}\right)=\left(\frac{p}{3}\right)=1\text{和}\frac{p}{q}=2+\frac{1|}{\left|\frac{q-2}{3}\right.}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|2},$$

* 1985年9月19日收到．

故存在奇数$q\left(=\frac{p-3}{2}\right)$使得（1）和（2）成立（$\lambda=4$、$c_1=2$、$c_2=\frac{q-2}{3}$、$c_3=1$、$c_4=2^{n-1}$）。

2）$p\equiv1(\bmod 8)$且$p\equiv2(\bmod 3)$。令$q=\frac{p-3}{2}$，则$q\equiv1(\bmod 2)$，$q\equiv1(\bmod 3)$。而且

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{\frac{p-3}{2}}{p}\right)=\left(\frac{-3}{p}\right)=\left(\frac{p}{3}\right)=-1 \text{和} \frac{p}{q}=2+\frac{1|}{|\frac{q-1}{3}}+\frac{1|}{|3}.$$

仍有（1）和（2）成立。

3）$p\equiv1(\bmod 8)$且$p\equiv0(\bmod 3)$。由$p\equiv1(\bmod 8)$，$p\equiv0(\bmod 3)$推出$p\equiv9(\bmod 24)$。设

$$p=24k+9,\quad a_1=9. \tag{3}$$

下面考虑$k>0$。如果$2|k$，则存在奇数$q=\frac{p-1}{8}=3k+1$满足

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{\frac{p-1}{8}}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)=1 \text{和} \frac{p}{q}=8+\frac{1|}{|q}.$$

在$k>0$时显然$q=3k+1>1$。故此时有奇数q满足（1）和（2）。

如果$2\nmid k$，先设$k\equiv3(\bmod 4)$。令$k=2k_1+1$，$2\nmid k_1$，此时$p=48k_1+33$。令$q=\frac{p-1}{16}=3k_1+2$，显然$2\nmid q$，并且

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)=1 \text{和} \frac{p}{q}=16+\frac{1|}{|q}.$$

由于$q=3k_1+2>1$，故（1）和（2）成立。

对于$k\equiv1(\bmod 4)$，令$k=4k_2+1$，则（3）式成为

$$p=24\cdot4k_2+24+9,\ \text{记}a_2=a_1+4^0\cdot24, \tag{4}$$

设$k_2>0$。如果$2|k_2$，令$q=\frac{p-1}{32}=3k_2+1$，则有

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{\frac{p-1}{32}}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)=1 \text{和} \frac{p}{q}=32+\frac{1|}{|q},$$

由于$k_2>0$，$q=3k_2+1>1$，因此（1）和（2）成立。

如果$2\nmid k_2$，仿上面作法可证$k_2\equiv3(\bmod 4)$时（1）和（2）成立。而$k_2\equiv1(\bmod 4)$时，重复前面作法，于是知，除开

$$a_1=9,\ a_2=a_1+4^0\cdot24,\ \cdots,\ a_{n+1}=a_n+4^{n-1}\cdot24,\ \cdots$$

以外，所有给定奇数$p>3$均有奇数q存在使得（1）和（2）成立。而上述递推关系$a_{n+1}=a_n+4^{n-1}\cdot24$，$a_1=9$给出$a_n=2^{2n+1}+1$（$n=1,2,\cdots$），因此在奇数$p>3$，$p\neq2^{2n+1}+1$（$n=1,2,\cdots$）时，均有奇数$q$存在使得（1）和（2）成立。证完。

引理2　设$p=2^{2n+1}+1$（$n\geq2$）是一个给定的奇数，则存在奇数q使得（1）和（2）成立。

证　在$2\nmid n$时，取$q=2^n-1$，则

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{2^n-1}{2^{2n+1}+1}\right)=\left(\frac{2^{2n+1}+1}{2^n-1}\right)=\left(\frac{3}{2^n-1}\right)=-\left(\frac{2^n-1}{3}\right)=-1$$

和

$$\frac{p}{q}=2(2^n+1)+\frac{1|}{|\frac{2^n-2}{3}}+\frac{1|}{|3},$$

（转318页）

合于条件$x_0 \in h(L_1^{n_0})$．断言成立．

在开展证明前，我们指出一个要用到的事实，即伪弧是齐性的．

（Ⅰ）⇒（Ⅱ）的证明．设M为齐弧形连续体．只要证M遗传不可分解．若有子连续体M_1可表为两个真子连续体H_1与H_2的并，取$p \in H_1 \cap H_2$．由M的齐性以及引理2，M的每一点均为端点，p亦为端点．故存在M的一串$\frac{1}{n}$—链复盖$D_n=\{L_1^n, L_2^n, \cdots, L_{k_n}^n\}$，使得$p \in L_1^n$（$n=1,2,3,\cdots$）．因$H_i$连通，故有子链

$$L_1^n,\ L_2^n, \cdots, L_{j_{n,i}}^n,\quad j_{n,i} \leq k_n,\quad n=1,2,3,\cdots, i=1,2,$$

复盖H_i，且每一节均与H_i相交．不失一般性，可设$j_{n,1} \leq j_{n,2}$或$j_{n,2} \leq j_{n,1}$对一切的n成立．故得$H_1 \subset H_2$，或$H_2 \subset H_1$至少有一成立．这与H_1，H_2均为M_1的真子连续体相矛盾．M_1不可分解，进而M遗传不可分解．得证．

（Ⅰ）⇒（Ⅲ）的证明，已含在（Ⅰ）⇒（Ⅱ）的证明中．

参 考 文 献

〔1〕E.G.Effros, Transformation groups and C—algebras, Ann.of Math., 2(1965), 38—55.

〔2〕J.T.Rogers, Jr., Decompositions of homogeneous continua, Pacific J.Math., 1(1982), 137—144.

〔3〕R.H.Bing, Concerning heredifarily indecomposable continua, Pacific J.Math., 1(1951), 43—51.

〔4〕R.H.Bing, Each homogeneous nondegenerate chainable continuum is a pseudo-arc, Proc.Amer. Math.Soc., 10(1959), 345—346.

〔5〕R.H.Bing, Snake-like continua, Dube Math.J. 18(1951), 653—663.

（接320页）

因此（1）和（2）成立．

在$2 \mid n$时，取$q=2^{2n}+3$，则$q \equiv 4 \pmod 5$，而且

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{2^{2n}+3}{2^{2n+1}+1}\right)=\left(\frac{-5}{2^{2n}+3}\right)=-\left(\frac{2^{2n}+3}{5}\right)=-\left(\frac{4}{5}\right)=-1,$$

和

$$\frac{p}{q}=1+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{\left|\frac{2^{2n}-6}{5}\right.}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|4},$$

因此仍有（1）和（2）成立．证完．

由引理1、2合起来即得定理．

最后，作者衷心感谢孙琦先生的帮助，他对本文仔细地进行了审阅，谨致谢忱！

参 考 文 献

〔1〕Rotkiewicz, A., Applications of Jacobi's symbol to Lehmer's numbers, Aeta Arith., XLII(1983), 163—187.