第19卷 增刊 数学研究与评论 Vol.19 Supp
1999年4月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Apr. 1999

算子的算子点谱的判定*

袁国常
(湖北省宜昌市林业学校, 宜昌443100)

摘 要: 本文讨论了算子$A \in B(H)_N$ 为算子 $T \in B(H)$的算子点谱的判定条件, 特别得到: 当T 为亚正常算子时, A 为 T 的算子点谱的判定条件, 另外还得到 $\ker\tau^n_{T,A} = \ker\tau_{T,A}$ 成立的充分条件.

关键词: 亚正常算子, 算子点谱
分类号: AMS(1991) 47A/CLC O177
文献标识码: A **文章编号**: 1000-341X(1999)增刊-0233-05

D. W. Hadwin 在[4]中给出了关于算子的算子谱的定义, 李绍宽在[1]中对算子谱的定义作了适当的修改, 使之能与通常的谱分析联系起来. 本文在[1]的第一种算子谱定义中将 C^n 换为可析复Hilbert 空间后, 对算子点谱展开一些讨论, 得出相应的结果.

设H 为可析复Hilbert 空间, $B(H)$ 为H 上有界线性算子全体. $B(H)_N$ 为$B(H)$ 中正常算子全体. $B(H)_{H-S}$ 表示$B(H)$ 中Hilbert-Schmidt 算子全体, 它在Hilbert-Schmidt 范数$\|\cdot\|_2$ 下构成Hilbert 空间. 又根据[5]知, $B(H)$ 中全体有限秩算子在$B(H)_{H-S}$ 中稠, 从而$B(H)_{H-S}$ 为复可析Hilbert 空间.

用 $\tau_{T,A}$ 表示广义导算子: $X \to TX - XA$, 根据[1]中§3的说明, 引入下面的定义.

定义1[1] 称 $\tilde{\Lambda}(T)$为 $T \in B(H)$的算子谱集, $\tilde{\Lambda}(T) = \{A \in B(H)_N \mid 0 \in \sigma(\tau_{T,A})\}$.

定义2 称 $\tilde{\Lambda}_p(T)$为 $T \in B(H)$的算子点谱集,

$$\tilde{\Lambda}_p(T) = \{A \in B(H)_N \mid \exists X \in B(H), X \neq 0, TX - XA = 0\}.$$

参照[1], 还可以定义 T 的算子本质谱集 $\tilde{\Lambda}_e(T)$, 算子近似点谱集 $\tilde{\Lambda}_a(T)$等.

定理1 $\tilde{\Lambda}(T) = \{A \mid A \in B(H)_N, \sigma(A) \cap \sigma(T) \neq \varnothing\}$,

$$\tilde{\Lambda}_e(T) = \{A \mid A \in B(H)_N, \sigma(A) \cap \sigma_e(T) \neq \varnothing\}.$$

证明 由[1]的定理1及其§3的说明即知.

定理2 设$A \in B(H)_N$, 如果A 在其某一特征子空间上的约化与 T 的某一非零维约化部分酉等价, 则$A \in \tilde{\Lambda}_p(T)$, 并且 $\sigma_p(T) \cap \sigma_p(A) \neq \varnothing$.

证明 先证明以下事实: 设 $q \in \sigma_p(T)$, 则必有$X \neq 0, X \in B(H)_{H-S}$, 使得$(T - q)X = 0$. 由于$B(H)_{H-S}$ 等距同构于张量积空间$H \otimes \bar{H}$, 其中$\bar{H}$ 表示H 的共轭空间, 且算子 $\delta_{A,B}: X \to AXB$ $(x \in B(H)_{H-S})$ 酉等价于张量积算子$A \otimes B^*$ (见[6], [7], [8]). 考虑$H \otimes \bar{H}$ 上的算子 $T \otimes I$, $qI \otimes I$ 和$B(H)_{H-S}$ 上的算子 $\delta_{T,I}: X \to TXI$ 和 $\delta_{qI,I}: X \to qIXI$, 如果 $q \in \sigma_p(T)$, 则

* **收稿日期**: 1996-12-17

存在 $x \in H, x \neq 0$, 使得 $(T - qI)x = 0$. 在 $H \otimes \overline{H}$ 上取向量 $x \otimes x^*, x^* \in \overline{H}$, 就有

$$Tx \otimes Ix^* - qIx \otimes Ix^* = ((T - qI)x) \otimes Ix^* = 0.$$

所以存在 $X \in B(H)_{H-S}, X \neq 0$, 使得 $(T - qI)XI = 0$, 从而 $TX - qX = 0$. 反之, 若有 $X \in B(H)_{H-S}, X \neq 0$, 使得 $(T - qI)X = 0$. 由上述理由, 存在 $x \in H, x \neq 0$, 使得 $(T - qI)x = 0$, 进而 $q \in \sigma_p(T)$.

由条件可知 $\sigma_p(A) \neq \varnothing$, 不失一般性, 设 $q \in \sigma_p(A)$, $q \neq 0$, A 相应于 q 的特征子空间为 E_q. 由于 A 为正常算子, 所以 E_q 约化 A. 设 M 为 T 的某一非零维约化子空间, 仿[1]的定理4的证明, 可设 X_0 为 E_q 到 M 的酉算子, 使得 $T|_M X_0 = X_0 A|_{E_q}$. 作 H 的分解:

$$H = M \oplus M^{\perp}, H = E_q \oplus E_q^{\perp},$$

对应地有

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

作算子

$$X = \begin{pmatrix} X_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 $T_1X_0 = X_0A_1$, 于是有 $TX = XA$, 即 $A \in \widetilde{\Lambda}_p(T)$.

由于 $TX = XA$, 那么对 $\forall \lambda \in C$, 有 $(T - \lambda I)X = X(A - \lambda I)$ 成立. 特别当 $\lambda = q$ 时, 在子空间 E_q 上有 $(T_1 - qI)X_0 = X_0(A_1 - qI) = 0$, 从而

$$(T - q)X = 0. \tag{1}$$

当 $X \in B(H)_{H-S}$ 时, 已证得 $q \in \sigma_p(T)$, 即 $q \in \sigma_p(T) \cap \sigma_p(A)$;

当 $X \in B(H) \setminus B(H)_{H-S}$ 时, 由(1)有

$$X^*(T^* - \overline{q}I)(T - qI)X = 0,$$

即对 $\forall x \in H$, $((T - qI)Xx, (T - qI)Xx) = 0$. 又由(1),

$$X^*(T - qI)X = 0,$$

对 $\forall x \in H$, $((T - q)Xx, Xx) = 0$. 这样, $T - qI$ 在 $R(X)$ 上等于零, 而 $Xx \in H$, 且 $X \neq 0$, 故至少有 $y = Xx \in H$, 使得 $(T - qI)y = 0$, $y \neq 0$, 即 $q \in \sigma_p(T)$, 从而 $q \in \sigma_p(T) \cap \sigma_p(A)$.

综合以上两种情况, 定理的结论成立. □

定理3 设 $A \in B(H)_N$, T 为亚正常算子, $\sigma_p(T) \neq \varnothing$, A 与 T 及 T^* 可换, 则 $A \in \widetilde{\Lambda}_p(T)$, 并且 $\sigma_p(T) \cap \sigma(A) \neq \varnothing$.

证明 设 $K = \ker(T - qI)$, $q \in \sigma_p(T)$. 由 T 的亚正常性, K 约化 T 是显然的. 对 $\forall y \in K$, 由 $Ty = qy$ 得 $T^*Ty = qT^*y$, K 又为 T^* 的不变子空间, 故 $TT^*y = qT^*y$. 这样在 K 上成立 $TT^* = T^*T$, 即 K 约化 T 为正常算子.

由 A 与 $T - qI$ 的可换性知 K 为 A 的不变子空间. A 与 $T^* - \overline{q}$ 的可换性说明 $\overline{\mathbf{R}(T^* - \overline{q}I)}$ 为 A 的不变子空间. 这里 $\mathbf{R}(Y)$ 表示 Y 的值域. 但 $K^{\perp} = \overline{\mathbf{R}(T^* - \overline{q}I)}$, 于是 K 约化 A. 在 $H = K \oplus K^{\perp}$ 的分解下, 设

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

其中T_1和A_1均为K上的正常算子. 考虑算子(在$K\oplus K$上)

$$Q=\begin{pmatrix}T_1 & 0\\ 0 & A_1\end{pmatrix},$$

Q自然与其自身相似. 于是根据[2]的注2并令其中的$C=0$, 存在K上的算子$X_1\neq 0$, 使得$T_1X_1=X_1A_1$, 令

$$X=\begin{pmatrix}X_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

于是有$TX-XA=0$, 即$A\in\widetilde{\Lambda}_p(T)$.

由于在K上成立$T_1X_1-X_1A_1=0$, 所以有

$$(T-qI)X-X(A-qI)=0,$$

但在$H=K\oplus K^{\perp}$的分解下, $(T-qI)X=0$, 这样, $X(A-qI)=0$, 从而

$$(A^*-\bar{q}I)X^*=0.$$

与定理2中关于T的相关讨论一样, 可得$\bar{q}\in\sigma(A^*)$. 所以, $q\in\sigma_p(T)\cap\sigma(A)$. □

定理4 (i) 若$A\in\widetilde{\Lambda}(T)$, 则$A^n\in\widetilde{\Lambda}(T^n)$;

(ii) 若$A\in\widetilde{\Lambda}_p(T)$, 则$A^n\in\widetilde{\Lambda}_p(T^n)$, 且$\ker\tau_{T,A}\subset\ker\tau_{T^2,A^2}\subset\cdots\subset\ker\tau_{T^n,A^n}$;

(iii) 若T为亚正常算子, $A\in\widetilde{\Lambda}_a(T^*)$, 且为$T^*$的非算子点谱, 则$A^n\in\widetilde{\Lambda}_a(T^{*n})$, 且亦为$T^{*n}$的非算子点谱. 以上$n=2,3,\cdots$.

证明 (i) 因$A\in\widetilde{\Lambda}(T)$, 则$\sigma(T)\cap\sigma(A)\neq\varnothing$. 由谱映照定理知$\sigma(T^n)\cap\sigma(A^n)\neq\varnothing$. 故$A^n\in\widetilde{\Lambda}(T^n)$.

(ii) 当$n=2$时, $\|\tau^2_{T,A}(X)\|=\|\tau_{T,A}(TX-XA)\|\leq\|\tau_{T,A}\|\|TX-XA\|$. 但

$$\tau^2_{T,A}(X)=T^2X-XA^2-2(TX-XA)A,$$

若$TX-XA=0$, 则$T^2X-XA^2=0$, 即$A^2\in\widetilde{\Lambda}_p(T^2)$.

设对于$n-1\geq 2$, 有$A^{n-1}\in\widetilde{\Lambda}_p(T^{n-1})$. 由于

$$\|\tau_{T,A}(T^{n-1}X-XA^{n-1})\|\leq\|\tau_{T,A}\|\|T^{n-1}X-XA^{n-1}\|=0,$$

而

$$\tau_{T,A}(T^{n-1}X-XA^{n-1})=T^nX-XA^n-(TX-XA)A^{n-1}-(T^{n-1}X-XA^{n-1})A,$$

由假设知$T^nX-XA^n=0$, 即$A^n\in\widetilde{\Lambda}_p(T^n)$. 后面的结论从以上证明过程中显而易见.

(iii) 因T为亚正常算子, 由

$$T^{*2}T^2\geq T^*TT^*T\geq TT^*TT^*\geq T^2T^{*2}$$

知T^2为亚正常算子, 从而对$n=1,2,\cdots$, T^n为亚正常算子. 根据[1]的定理3及§3的说明知, $\widetilde{\Lambda}(T)=\widetilde{\Lambda}_a(T^*)^*$, $\widetilde{\Lambda}(T^n)=\widetilde{\Lambda}_a(T^{*n})^*$. 当$A\in\widetilde{\Lambda}_a(T^*)$时, 就有$A^n\in\widetilde{\Lambda}_a(T^{*n})$.

其次, 若对某个$n-1\geq 2$, $\exists X\neq 0$, 使得$T^{*n-1}X-XA^{n-1}=0$, 则A^{n-1}为T^{*n-1}的算子点谱. 由(ii)知$A^n\in\widetilde{\Lambda}_p(T^{*n})$. 但

$$\|\tau_{T^*,A}(T^{*n-1}X-XA^{n-1})\|\leq\|\tau_{T^*,A}\|\|T^{*n-1}X-XA^{n-1}\|=0,$$

因此有

$$T^{*n}X-XA^n-(T^*X-XA)A^{n-1}-(T^{*n-1}X-XA^{n-1})A=0.$$

于是$(T^*X-XA)A^{n-1}=0$, 此即$T^*(XA^{n-1})-(XA^{n-1})A=0$. 由假设$XA^{n-1}\neq 0$, 这与$A$为

T^* 的非算子点谱矛盾. 故不存在 $X \neq 0$, 使 $T^{*n-1}X - XA^{n-1} = 0$. □

下面利用算子谱来讨论 $\ker\tau^n_{T,A}$ 与 $\ker\tau_{T,A}$ 之间的关系.

定理 5 设 $T \in B(H)$ 为亚正常算子, $A \in B(H)_N$ 且与 T 及 T^* 可换, 当 $\sigma_p(T) \neq \varnothing$ 时,

$$\ker\tau^n_{T,A} = \ker\tau_{T,A}.$$

证明 当 $\sigma_p(T) \neq \varnothing$ 时, 由定理 3 知 $A \in \widetilde{\Lambda}_p(T)$, 进而由定理 4, $A^n \in \widetilde{\Lambda}_p(T^n)$, 并且

$$\ker\tau_{T,A} \subset \ker\tau_{T^2,A^2} \subset \cdots \subset \ker\tau_{T^n,A^n}.$$

以下事实是显然的:

$$\ker\tau_{T,A} \subset \ker\tau^2_{T,A} \subset \cdots \subset \ker\tau^n_{T,A}. \tag{2}$$

由于所设的 T 和 A 均为非零算子, 由[3]知 T 和 A 均为非广义幂零算子. 下面仅对 $n=2$ 的情形进行证明.

设 $X \in \ker\tau^2_{T,A}$, 即

$$\tau^2_{T,A}(X) = T(TX - XA) - (TX - XA)A = T^2X - XA^2 - 2(TX - XA)A = 0. \tag{3}$$

如果 $TX - XA \neq 0$, 则 $TX - XA \in \ker\tau_{T,A}$. 由(3)式有

$$T^2X - XA^2 = 2(TX - XA)A. \tag{4}$$

当 $n=3$ 时,

$$\tau^3_{T,A}(X) = T^3X - XA^3 - TXA^2 - T^2XA + 2XA^3 - 2[T(TX - XA) - (TX - XA)A]A,$$

由(2), (3), (4)得

$$T^3X - XA^3 = 3(TX - XA)A^2.$$

设 $n = m-1$ 时

$$T^{m-1}X - XA^{m-1} = (m-1)(TX - XA)A^{m-2} \tag{5}$$

成立, 当 $n=m$ 时,

$$\tau^m_{T,A}(X) = T^mX - TXA^{m-1} - T^{m-1}XA + XA^m - (m-1)(T(TX - XA) - (TX - XA)A)A^{m-2}.$$

由(2), (3), (5)得

$$T^mX - XA^m = m(TX - XA)A^{m-1}.$$

所以对任意 n, 成立

$$T^nX - XA^n = n(TX - XA)A^{n-1} \tag{6}$$

这样,

$$\|(TX - XA)A^{n-1}\| = \frac{1}{n}\|T^nX - XA^n\|. \tag{7}$$

当 $n\to\infty$ 时, $\|(TX - XA)A^{n-1}\| \to 0$. 但 $\sigma_p(T) \neq \varnothing$, $A \in \widetilde{\Lambda}_p(T)$, 并且 $\ker\tau_{T,A}$ 为闭的, 故存在 N, 当 $n \geq N$ 时, 一直有 $T(XA^{n-1}) - (XA^{n-1})A = 0$. 又由(7),

$$T^nX - XA^n = 0, \quad n \geq N \tag{8}$$

因为 $TX - XA \in \ker\tau_{T,A}$, 由定理4的(ii), $T^n(TX - XA) - (TX - XA)A^n = 0$, 即

$$T^{n+1}X - T^nXA - TXA^n + XA^{n+1} = 0. \tag{9}$$

令(8)中的 n 为 $n+1$, (8)±(9), 得

$$T^n(TX - XA) + T(T^nX - XA^n) = 0, \quad (T^nX - XA^n)A + (TX - XA)A^n = 0$$

由(8)有

$$T^n(TX - XA) = 0, \tag{10}$$

$$(TX - XA)A^n = 0, \tag{11}$$

(10) - (11), 又有 $T^n(TX - XA) - (TX - XA)A^n = 0$. 在定理4的证明中已证得 T^n 仍为亚正常的, A^n 的正常性显然. 从而由亚正常算子的 Putnam-Fuglede 定理知

$$T^{*n}(TX - XA) - (TX - XA)A^{*n} = 0,$$

并且 $\overline{\mathbf{R}(TX - XA)}$ 约化 T^n. 由(10)知 T^n 在 $\overline{\mathbf{R}(TX - XA)}$ 及其正交补上均为零. 但所设的 T 不为零, 故必有 $TX - XA = 0$, 从而 $X \in \ker\tau_{T,A}$. □

参 考 文 献

[1] 李绍宽. 关于算子谱的定义 [J]. 数学年刊A 辑, 1991, **12**(5): 530- 536.

[2] 童裕孙. 关于算子方程 $AXB - X = C$ [J]. 数学年刊A 辑, 1986, **7**(3): 325- 337.

[3] Halmos P R. *A Hilbert Space Problem Book* [M]. Van Nostrand, New York, 1967.

[4] Hadwin D W. *Completely positive maps and approximate equivalence* [J]. Indiana Univ. Math. Journ., 1987, **36**: 211- 227.

[5] 李炳仁. 算子代数 [M]. 北京: 科学出版社, 1986.

[6] Magajna B. *On subnormality of generalized derivation and tensor products* [J]. Bull. Austral. Mathe. Soc., 1985, **31**: 235- 243.

[7] 侯晋川. 关于算子的张量积 [J]. 科学通报, 1990, **36**(20): 1533- 1535.

[8] Hou Jinchuan. *On the tensor products opeerators* [J]. Acta Math. Sinica, New Ser., 1993, **9**: 195- 202.

On the Judgement for Operator Point Spectrum of Operator

Yuan Guochang

(Hubei Yichang Forestry Technical School, Yichang 443100)

Abstract

In this paper, we discuss the judgement conditions that $A \in B(H)_N$ is the operator point spectrum of $T \in B(H)$. In particular, a condition is given for $A \in \widetilde{\Lambda}_p(T)$ when T is a hyponormal operator and A is commutable for T and T^*. Additionally, we obtain the judgement condition for $\ker\tau^n_{T,A} = \ker\tau_{T,A}$.

Keywords hyponormal operator, operator point spectrum.