第11卷　第2期
1991年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.11 No.2
May, 1991

二阶Volterra系统对平稳正态激励的统计响应的表示定理的数学证明*

陶宗英　范伟民　许重光　朱丽苹
（上海交通大学应用数学系）

摘　要

1974年，Neal[1]根据Kac和Siegert[2]的思想，给出了一个在电子工程、海洋工程、建筑工程、航空工程、自动控制的随机振动中有重要应用的二阶Volterra非线性系统对平稳正态输入的统计响应的表示定理．1984年，Naess[3]对此定理又给出了一个数学证明．经过研究后发现，他们对定理条件的叙述都是模糊的，而且其数学证明都是有问题的．

本文重新讨论了这个表示定理，给出了明确的定理条件及严格的数学证明，为它的广泛应用奠定了理论基础．

一、定义及数学模型

设
$$y(t)=\int_0^T\int_0^T h(\tau_1,\tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2, \tag{1}$$
其中$x(t)$是输入，h是二阶Volterra系统的脉冲响应函数，$y(t)$是系统对输入的统计响应．

根据工程的实际，一般都假设[1][3]：

① $x(t)$是均值为零的均方连续的实平稳正态过程；

② h是对称的实连续函数，它的定义域是$[0,T;0,T]$；此时容易验证，(1)式右端的均方积分是存在的，并且$y(t)$也是平稳过程[4]；

为了得到Neal表示定理，我们必须进一步假设：

③ $x(t)$是特殊的正则过程，即设它有下述典型表示式[5]：
$$x(t)=\int_0^T q(\tau)\,\mathrm{d}\xi(t-\tau),\qquad(-\infty<t<\infty) \tag{2}$$
其中$\{\xi(\tau),-\infty<\tau<\infty\}$是标准Wiener过程，实函数$q(\tau)\in L^2(-\infty,\infty)$，且满足：
$$q(\tau)=0,\quad 当\tau\geq T时，或\tau\leq 0时，$$

在条件①和③下，容易证明[5] $x(t)$的协方差函数
$$R(t)=E[x(t+\tau)x(t)]=\int_0^T q(u)q(u+\tau)\,\mathrm{d}u\ ; \tag{3}$$

为了以后讨论的方便，我们再引进一些定义及记号．

* 1989年7月6日收到，1990年7月14日修改稿．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

设 $$K(\alpha,\beta)=\int_0^T\int_0^T h(\tau_1,\tau_2)q(\alpha-\tau_1)q(\beta-\tau_2)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2,\quad (0\leq\alpha,\beta\leq 2T)\tag{4}$$

则易知$K(\alpha,\beta)$是〔$0,2T;0,2T$〕上实对称的连续函数.

设$\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$、$\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$分别是下列积分方程的非零实特征值与相应的实的连续的标准正交的特征函数系列:

$$\int_0^{2T}K(\alpha,\beta)\phi_j(\beta)\mathrm{d}\beta=\lambda_j\phi_j(\alpha),\quad 0\leq\alpha\leq 2T,\tag{5}$$

记 $$w_j(t)=\int_0^{2T}\phi_j(\tau)\,\mathrm{d}\xi(t-\tau),\quad -\infty<t<\infty,\tag{6}$$

则易知$\{w_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$是一列两两独立的标准正态过程，且满足:

$$E[w_i(t)]=0,\quad (i=1,2,\cdots,-\infty<t<\infty),\tag{7}$$

$$E[w_i(t)w_j(t)]=\delta_{ij},\quad (i,j=1,2,\cdots,-\infty<t<\infty),\tag{8}$$

显然，每个$\{w_i(t)\}$也是平稳正态过程.

二、引　理

引理 在①—③的条件下，则有:

（1） 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n$绝对收敛;

（2） $$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=\int_0^{2T}K(\alpha,\alpha)\mathrm{d}\alpha;\tag{9}$$

证明 ① 在（4）式中，由于h是〔$0,T;0,T$〕上的实对称的连续函数，因此有:

$$h(\tau_1,\tau_2)=\sum_n\mu_n\Phi_n(\tau_1)\Phi_n(\tau_2),\tag{10}$$

其中$\{\mu_n\}_1^{\infty}$，$\{\Phi_n(\tau)\}_1^{\infty}$分别是下列积分方程:

$$\int_0^T h(\tau_1,\tau_2)\Phi_n(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2=\mu_n\Phi_n(\tau_1),\ (n=1,2,\cdots,\quad 0\leq\tau_1\leq T)\tag{11}$$

的非零实特征值和相应的标准正交的实特征函数，记

$$h_1(\tau_1,\tau_2)=\sum_n\mu_n^+\Phi_n^+(\tau_1)\Phi_n^+(\tau_2),\tag{12}$$

$$h_2(\tau_1,\tau_2)=\sum_n\mu_n^-\Phi_n^-(\tau_1)\Phi_n^-(\tau_2),\tag{13}$$

其中 $$\mu_n^+=\frac{1}{2}(|\mu_n|+\mu_n),\tag{14}$$

$$\mu_n^-=\frac{1}{2}(|\mu_n|-\mu_n),\tag{15}$$

而$\Phi_n^+(\tau)$，$\Phi_n^-(\tau)$分别是对应于非零的μ_n^+和μ_n^-的特征函数.

显然，$h_i(\tau_1,\tau_2)(i=1,2)$是〔$0,T;0,T$〕上实对称的非负定的平方可积函数，且有:

$$h(\tau_1,\tau_2)=h_1(\tau_1,\tau_2)-h_2(\tau_1,\tau_2),\tag{16}$$

记 $$K_i(\alpha,\beta)=\int_0^T\int_0^T h_i(\tau_1,\tau_2)q(\alpha-\tau_1)q(\beta-\tau_2)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2,\ (i=1,2;0\leq\alpha,\beta\leq 2T)\tag{17}$$

易知，$K_i(\alpha,\beta)$是实对称的非负定的连续函数.

由（4）、(16)、(17)式，立即可得,

$$K(\alpha,\beta)=K_1(\alpha,\beta)-K_2(\alpha,\beta),\quad (0\leq\alpha,\beta\leq 2T)\tag{18}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

由著名的Mercer定理[6]，必有

$$K_i(\alpha,\beta)=\sum_k a_k^{(i)}\Psi_k^{(i)}(\alpha)\Psi_k^{(i)}(\beta), \tag{19}$$

关于α,β是绝对一致收敛的，其中$\{a_k^{(i)}\}_1^\infty$，$\{\Psi_k^{(i)}\}_1^\infty$分别是核$K_i(\alpha,\beta)$的一列正特征值及相应的实的标准正交的特征函数列($i=1,2$)．

因为

$$\lambda_n=\int_0^{2T}\int_0^{2T}K(\alpha,\beta)\varphi_n(\alpha)\varphi_n(\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

$$=\int_0^{2T}\int_0^{2T}K_1(\alpha,\beta)\varphi_n(\alpha)\varphi_n(\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta-\int_0^{2T}\int_0^{2T}K_2(\alpha,\beta)\varphi_n(\alpha)\varphi_n(\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

$$=\sum_k a_k^{(1)}\left(\int_0^{2T}\Psi_k^{(1)}(\alpha)\varphi_n(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)^2-\sum_k a_k^{(2)}\left(\int_0^{2T}\Psi_k^{(2)}(\alpha)\varphi_n(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right)^2,$$

由此利用Parseval不等式，易得：

$$\sum_n|\lambda_n|\leq\sum_k a_k^{(1)}+\sum_k a_k^{(2)} \tag{20}$$

由于

$$0\leq\sum_k a_k^{(i)}=\sum_k a_k^{(i)}\int_0^{2T}[\Psi_k^{(i)}(\alpha)]^2\mathrm{d}\alpha$$

$$=\int_0^{2T}\left[\sum_k a_k^{(i)}\Psi_k^{(i)^2}(\alpha)\right]\mathrm{d}\alpha=\int_0^{2T}K_i(\alpha,\alpha)\mathrm{d}\alpha<+\infty, \tag{21}$$

所以

$$\sum_n|\lambda_n|<\infty. \tag{22}$$

② 下面往证

$$\int_0^{2T}K(\alpha,\alpha)\mathrm{d}\alpha=\sum_n\lambda_n. \tag{23}$$

由于由核$K(\alpha,\beta)$所产生的在可析Hilbert空间$C[0,2T]$上的积分算子$\hat{K}$是全连续自共轭算子[7]，它所有的特征值为$\{\bar{\lambda}_n\}$(包含零特征值)，相应的完全的标准正交的特征函数列为$\{\bar{\varphi}_n\}$[8]．用类似的证明方法(此时由于$\{\bar{\varphi}_n\}$是完全的，因此前面的Parseval不等式变成了等式)可得：

$$\sum_n\lambda_n=\sum_n\bar{\lambda}_n=\sum_j a_j^{(1)}-\sum_j a_j^{(2)}, \tag{24}$$

另一方面

$$\int_0^{2T}K(\alpha,\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int_0^{2T}K_1(\alpha,\alpha)\mathrm{d}\alpha-\int_0^{2T}K_2(\alpha,\alpha)\mathrm{d}\alpha=\sum_j a_j^{(1)}-\sum_j a_j^{(2)} \tag{25}$$

由(24)式和(25)式，立即得到(23)式． ■

三、基 本 定 理

表示定理(修正的Kac-Siegert-Neal定理[1][2][3]) 在①—③的条件下，则有：

$$\lim_{n\to\infty}E\left[y(t)-\sum_{i=1}^n\lambda_i w_i^2(t)\right]^2=0, \tag{26}$$

且上述收敛关于$-\infty<t<\infty$是一致的．(26)式有时也可写成：

$$y(t)=\sum_{n=1}^\infty\lambda_n w_n^2(t), \quad (\text{q.m.}) \tag{27}$$

根据上述引理，不难推出上述定理．

系 在定理的条件下，则有[3][4]：

$$E[y(t)]=\int_0^\infty H(\omega,-\omega)S_x(\omega)\mathrm{d}\omega=\sum_{n=1}^\infty\lambda_n=\int_0^{2T}K(\alpha,\alpha)\mathrm{d}\alpha, \tag{28}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\mathrm{Var}[y(t)]=\frac{1}{2}\iint_{-\infty}^{\infty}|H(\omega,\omega')|^2 S_x(|\omega|)S_x(|\omega'|)\,d\omega d\omega'$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2=2\int_0^{2T}\int_0^{2T}K^2(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta\ , \tag{29}$$

其中 $$H(\omega_1,\omega_2)=\int_0^T\int_0^T h(\tau_1,\tau_2)e^{-i(\tau_1\omega_1+\tau_2\omega_2)}d\tau_1 d\tau_2\ ,$$

而$S_x(\omega)$是$x(t)$的单边谱密度，即

$$R(\tau)=\int_0^{\infty}\cos\omega\tau S_x(\omega)\,d\omega\ .$$

参 考 文 献

[1] (1974) Neal, E: Second-Order Hydrodynamic Forces Due to Stochastic Excitation. Proc. 10 th ONR Symposium Cambridge, Mass, 1974, pp. 531—537.

[2] (1947) Kac, M. and Siegert, A. J. F.: On the theory of Noise in Radio Receivers with Square Law Detectors. J. Applied Physics, Vol. 18, pp. 383—397.

[3] (1984) Naess, A: Analytical Investigation of the Response Statistics of Nonlinear, Second Order Dynamics Systems, Part Ⅱ, NTNF Research Project, Programme for Marine Structures. Report No 2-3, Norwegian Hydrodynamic Laboratories, Trondheim, Norway. December, 1984.

[4] (1986) 陶宗英，张晓东:"非线性时不变系统在平稳正态随机输入下的响应的二阶矩计算"《高校应用数学学报》Vol.1. No.2, pp.265—272.

[5] (1986) 基赫曼，斯科罗霍德，《随机过程论》第一卷(邓永录等译)，科学出版社，1986.

[6] (1958) 斯米尔诺夫，《高等数学教程》第四卷第一册，高等教育出版社，1958.

[7] (1979) 夏道行等，《实变函数论与泛函分析》下册，人民教育出版社，1979.

[8] (1980) V. Hutson and J. S. Pym: Applications of Functional Analysis and Operator Theory, Academic Press, 1980.

Math. Proof of Representation Theorem of Statistical Response of A Second Order Volterra System Due to A Stationary Gaussian Excitation

Tao Zongying, Fan Weimin, Xu Chongguang, Zhu Lipin

(Dept. of Appl. Math., Shanghai Jiao Tong Univ.)

Abstract

In 1947, Kac and Siegert offered a representation theorem without proof for the response of a second order Volterra system due to a stationary Gaussian excitation. Since then a number of people have used this theorem but nobody has given a correct proof. In this paper, we give a new and rigorous proof of this theorem.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.