第20卷第2期 2000年5月 | 数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION | Vol. 20 No. 2 May 2000

1-树图的邻强边染色*

马德山[1]，刘林忠[2]，张忠辅[3]

(1. 西北民族学院科研处，兰州 730030； 2. 兰州铁道学院管理工程系，730070；
3. 兰州铁道学院应用数学研究所，730070)

摘　要：图 G 的一 k-正常边染色 f 若使得任意 $uv \in E(G)$ 满足 $f[u] \neq f[v]$，其中 $f[u] = \{f(uw) | uw \in E(G)\}$，则称 f 为 G 的一 k-邻强边染色，简称 k-ASEC，并称

$$\chi'_{as}(G) = \min\{k | \text{存在} G \text{的一} k\text{-ASEC}\}$$

为 G 的邻强边色数. 本文提出了邻强边染色猜想：对 2-连通图 $G(V,E)$ ($G(V,E) \neq C_5$)，有 $\Delta(G) \leqslant \chi'_{as}(G) \leqslant \Delta(G) + 2$，并研究了 1-树图的邻强边染色，证明了对 $\Delta(G) \geqslant 4$ 的 1-树图 G 有 $\Delta(G) \leqslant \chi'_{as}(G) \leqslant \Delta(G) + 1$ 且 $\chi'_{as}(G) = \Delta(G) + 1$ 当且仅当 $E(G[V_\Delta]) \neq \varnothing$，其中 $V_\Delta = \{u | u \in V(G), d(u) = \Delta(G)\}$.

关键词：图；邻强边染色；邻强边色数.

分类号：AMS(1991) 05C15/CLC O157.5

文献标识码：A　　**文章编号**：1000-341X(2000)02-0299-07

1　问题的提出

许多实际问题可归结为图的强染色. 对一般的图确定其强色数是困难的. 在文献[1][2]中，对图的强边染色进行了研究. 刘林忠，张忠辅和王建方研究了图的邻强边染色，并确定了路，圈，完全图，完全多部图，轮图，外平面和 Halin 图的邻强边色数，并根据对这些图的研究结果，提出了邻强边染色猜想. 本文研究了 1-树的邻强边色数.

定义 1[3]　图 G 的一 k-正常边染色 f 若使得任意 $uv \in E(G)$ 满足 $f[u] \neq f[v]$，其中 $f[u] = \{f(uw) | uw \in E(G)\}$，则称 f 为 G 的一 k-邻强边染色，简称 k-ASEC，并称

$$\chi'_{as}(G) = \min\{k | \text{存在} G \text{的一} k\text{-ASEC}\}$$

为 G 的邻强边色数.

定义 2　设 G 为平面图. 若存在 $e \in E(G)$，使得 $G \backslash \{e\}$ 为树，则称 G 为单圈图.

定义 3　设 G 为平面图. 若存在 $v \in V(G)$，使得 $G \backslash \{v\}$ 为树，则称 G 为 1-树.

根据一些特殊图的结果，张忠辅，刘林忠和王建方提出了如下猜想[3]：

猜想　对 $|V(G)| \geqslant 3$ 的连通图 $G(V,E)$ ($G(V,E) \neq C_5$)，有

* 收稿日期：1998-04-24
基金项目：国家自然科学基金资助课题(19871036)
作者简介：马德山(1965-)，男，甘肃会宁人，西北民族学院副教授.

$$\Delta(G) \leqslant \chi_{as}(G) \leqslant \Delta(G) + 2.$$

显然，当 $E(G[V_\Delta]) \neq \varnothing$ 时，$\chi_{as}(G) \geqslant \Delta(G) + 1$. 其中 $V_\Delta = \{u \mid d(u) = \Delta(G)\}$, $G[V_\Delta]$ 表示 V_Δ 的导出子图.

对 1-树，张克民等研究了这类图的参数. 本文证明了对 1-树图 $G(V,E)$ ，该猜想成立并确定了其邻强边色数. 文中未定义的符号参考文献[4].

2 主要结果

定理 1 对圈 C_n 有

$$\chi_{as}(C_n) = \begin{cases} 3, & 若\ n \equiv 0 \pmod 3, \\ 4, & 若\ n \not\equiv 0 \pmod 3\ 且\ n \neq 5, \\ 5, & 若\ n = 5. \end{cases}$$

此定理用穷染法即可证明.

下面用 $N_e(v)$ 表示与 v 相关联的边的集合.

定理 2 设 G 为 $\Delta(G) \geqslant 4$ 的非圈单圈图，C_n 为 G 中唯一的圈. 若

$$G - E(C_n) = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k,$$

其中 S_i ($i = 1,2,\cdots,k$)为点不交的星图，则

$$\chi_{as}(G) = \begin{cases} \Delta(G), & 若\ E(G[V_\Delta]) = \varnothing, \\ \Delta(G) + 1, & 若\ E(G[V_\Delta]) \neq \varnothing. \end{cases}$$

证明 不妨设设 $C_n = v_1v_2\cdots v_nv_1$, $C = \{1,2,\cdots,\Delta(G)\}$ (当 $E(G[V_\Delta]) = \varnothing$)或 $C = \{1,2,\cdots,\Delta(G)+1\}$ (当 $E(G[V_\Delta]) \neq \varnothing$)为 $\Delta(G)$ 或 $\Delta(G)+1$ 种色的集合.

情况 1 若 $d(v_1) = d(v_2) = \cdots = d(v_n)$,则 $E(G[V_\Delta]) \neq \varnothing$, $|C| = \Delta(G) + 1 \geqslant 4$. 先对 C_n 上的边进行染色，再进行其它边的染色.

1). 若 $n \equiv 0 \pmod 3$，则用 1,2,3 色交替的染 C_n 上的边. 对任意 i $(i = 1,2,\cdots,k)$,依次染 $N_e(v_i)\backslash\{v_{i-1}v_i, v_iv_{i+1}\}$ 中的 $\Delta(G) - 2$ 条边为 $C\backslash\{1,2,3\}$ 种色即可.

2). 若 $n \equiv 1 \pmod 3$，若 $n = 5$,则用 1,2,3 交替染 C_n 上的边,其它边易染；若 $n \neq 5$,则用 1,2,3 色交替的染 C_n 上的边直到边 v_nv_1 为止，令 $f(v_nv_1) = 4$. 对 $i \neq n$ $(i = 1,2,\cdots,k)$,依次染 $N_e(v_i)\backslash\{v_{i-1}v_i, v_iv_{i+1}\}$ 中的 $\Delta(G) - 2$ 条边为 $C\backslash\{1,2,3\}$, $N_e(v_n)\backslash\{v_{n-1}v_n, v_nv_{n+1}\}$ 为 $C\backslash\{2,3,4\}$, $N_e(v_1)\backslash\{v_nv_1, v_1v_2\}$ 为 $C\backslash\{1,2,4\}$ 中的色即可.

3). 若 $n \equiv 2 \pmod 3$，对 v_i $(i \leqslant n-4)$ ，用 1,2,3 色交替的染 C_n 上的边. 然后令 $f(v_{n-4}v_{n-3}) = 4$, $f(v_{n-3}v_{n-2}) = 1$, $f(v_{n-2}v_{n-1}) = 2$, $f(v_{n-1}v_n) = 3$, $f(v_nv_1) = 4$. 对 $i < n-4$ ，依次染 $N_e(v_i)\backslash\{v_{i-1}v_i, v_iv_{i+1}\}$ 中的 $\Delta(G) - 2$ 条边为 $C\backslash\{1,2,3\}$ ，对 $n-4 \leqslant i \leqslant n$ ，将 $N_e(v_i)\backslash\{v_{i-1}v_i, v_iv_{i+1}\}$ 染为 $C\backslash\{f(v_{i-2}v_{i-1}), f(v_{i-1}v_i), f(v_iv_{i+1})\}$ 中的色即可.

情况 2 若 $V(C_n)$ 中存在度不相同的点，对 $E(C_n)$ 中边，根据 $|E(C_n)|$ ，用与情况 1 中相同的方法染色. 然后选取 $v_k \in V(C_n)$ ，使得 $d(v_k) \neq d(v_{k+1})$ 或 $d(v_k) \neq d(v_{k-1})$ ，不妨设 $d(v_k) \neq d(v_{k-1})$. 从点 v_k 开始，对 $N_e(v_i)\backslash\{v_{i-1}v_i, v_iv_{i+1}\}$ 中的边依次染为 $C\backslash\{f(v_{i-2}v_{i-1}), f(v_{i-1}v_i), f(v_iv_{i+1})\}$ ，即可得到 G 的邻强边染色 f .

引理 1 对非圈的单圈图 G，若 G 不为定理 2 中的图，则至少存在一点其邻点中仅有一个非叶点并至少有一个叶点.

此引理的结论是平凡的.

定理 3 对 $\Delta(G)\geqslant 4$ 的非圈的单圈图 G，有

$$\chi_{as}(G)=\begin{cases}\Delta(G), & \text{当 } E(G[V_\Delta])=\varnothing,\\ \Delta(G)+1, & \text{当 } E(G[V_\Delta])\neq\varnothing.\end{cases}$$

证明 对 $p=|V(G)|$ 用归纳法. 先假设 $E(G[V_\Delta])=\varnothing$.

设 $C_n=v_1v_1\cdots v_nv_1$，$C=\{1,2,\cdots,\Delta(G)\}$ 为 $\Delta(G)$ 种色的集合.

令 $G=T\cup C_n$，其中 T 为森林，C_n 为圈且 $E(T)\cap E(C_n)=\varnothing$.

若 G 为定理 2 中的图，则由定理 2 知结论成立.

若 G 不为定理 2 中的图，这时由引理 1 知存在一点 w，其邻点中仅有一个非叶点且至少有一个叶点. 设 $N(w)=\{u,u_1,u_2,\cdots,u_k\}$，其中 $k\leqslant\Delta(G)-1$，u 为非叶点，$u_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 为叶点. 考虑图

$$G_0=G-\{u_1,u_2,\cdots,u_k\},$$

则 G_0 仍为单圈图，$|V(G_0)|=|V(G_0)|-k$，由归纳假设，G_0 存在一 $|C|$-ASEC f_0，现在 f_0 的基础上构造 G 的 $|C|$-ASEC f.

情况 1 若 $d(w)\neq d(u)$，则用 $C\backslash\{f_0(wu)\}$ 中的色依次对 $wu_1,wu_2,\cdots,wu_k$ 中的边染色，即可得到 G 的一 $\Delta(G)$-ASEC.

情况 2 若 $d(w)=d(u)$，则必有 $d(u)<\Delta(G)$，从而 $|f_0[u]|<\Delta(G)$. 令 $f(wu_1)\in C\backslash f_0[u]$，对 $wu_2,\cdots,wu_k$ 依次用 $C\backslash\{f(wu_1),f_0(wu)\}$ 中的色染，即可得到 G 的一 $\Delta(G)$-ASEC.

综合以上证明可知当 $E(G[V_\Delta])=\varnothing$ 时，结论成立.

当 $E(G[V_\Delta])\neq\varnothing$ 时，用同样的方法可证明结论成立，证明略.

如下引理显然成立.

引理 2 对非星的树 T，存在 $w\in V(G)$，$d(w)\neq 1$，使得 w 的邻点中非 1 度点仅有一个，且这样的 w 至少有两个.

T 中最长路 P 中与 P 的两个端点相邻的两点显然为这样的 w.

对树 T，用 $W(T)=\{w\mid w\in V(T),\ d(w)\neq 1,\ |\{u\mid uw\in E(T),\ d(u)\geqslant 2\}|=1\}$ 表示 T 中所有满足引理 2 的点 w 的集合.

引理 3 设 $G(V,E)$ 为扇形图($|V(G)|\geqslant 5$)，则 $\chi_{as}(G)=\Delta(G)$.

用穷染法即可知此引理结论成立.

引理 4 对树 G 有

$$\chi_{as}(G)=\begin{cases}\Delta(G), & \text{若 } E(G[V_\Delta])=\varnothing,\\ \Delta(G)+1, & \text{若 } E(G[V_\Delta])\neq\varnothing.\end{cases}$$

用归纳法即可证明此结论.

定理 4 对 $\Delta(G)\geqslant 4$ 的 1-树 $G(V,E)$，$v\in V(G)$，$T=G-\{v\}$ 为树，则

$$\chi_{as}(G)=\begin{cases}\Delta(G), & \text{若 } E(G[V_\Delta])=\varnothing,\\ \Delta(G)+1, & \text{若 } E(G[V_\Delta])\neq\varnothing.\end{cases}$$

证明 先证明当 $E(G[V_\Delta])=\varnothing$ 时 $\chi_{as}(G)=\Delta(G)$. 对 $p=|V(G)|$ 用归纳法. C 为 $\Delta(G)$ 种颜色的集合.

当 $d(v)=2$ 时, $G(V,E)$ 为单圈图, 由定理 3 知结论成立. 下面假设 $d(v)\geqslant 3$.

当 $|V(G)|=d(v)+1$ 时, 若 $G(V,E)$ 为扇形, 由引理 3 可知结论成立. 若 $G(V,E)$ 不为扇, 在 $G(V,E)$ 中去掉一个与 $W(T)$ 中点相邻的 2 度点, 结论易证. 下面假设 $|V(G)|>d(v)+1$.

考虑满足 $d_T(w)=\min\{d(u)|u\in W(T)\}$ 的点 $w\in W(T)$. 在下面的证明中 $f_0[x]=\{f_0(xy)|xy\in E(G_0)\}$ 且在构造 f 的过程中未提到的边的色与 f_0 的色相同.

情况 1 若存在 w 使得 $wv\notin E(G)$, $N(w)=\{u,v_i|d(u)\geqslant 2,d(v_i)=1,i=1,2,\cdots,|N(w)|-1\}$. 考虑图

$$G_0=G-\{v_i|i=1,2,\cdots,s\},\text{其中 } s=|N(w)|-1.$$

显然 G_0 仍然为 1-树, 因为 $d_T(w)=\min\{d(u)|u\in W(T)\}$, 所以 $\Delta(G_0)=\Delta(G)$, $|V(G_0)|=|V(G)|-s<|V(G)|$, 由归纳假设, 存在 G_0 的一 $\Delta(G)$-邻强边染色 f_0, 现在 f_0 的基础上构造 $G(V,E)$ 的一 $\Delta(G)$-邻强边染色 f.

情况 1.1 若 $d(u)=\Delta(G)$, 因为 $E(G[V_\Delta])=\varnothing$, 所以 $d(w)<\Delta(G)$, 从而对 $\{wv_i|i=1,2,\cdots,s\}$ 中的边用 $C\backslash\{f_0(uw)\}$ 中的色依次染之即可得到 $G(V,E)$ 的一 $\Delta(G)$-邻强边染色 f.

情况 1.2 若 $d(u)<\Delta(G)$, 令 $f(wv_1)\in C\backslash f_0[u]$, 显然不管 $\{wv_i|i=2,\cdots,s\}$ 中的边染何色, 均有 $f[w]\neq f[u]$. 然后对 $\{wv_i|i=2,\cdots,s\}$ 中的边用 $C\backslash\{f_0(uw),f(wv_1)\}$ 中的色依次染之即可得到 $G(V,E)$ 的一 $\Delta(G)$-邻强边染色 f.

情况 2 若情况 1 中的 w 不出现, 即所有这样的 w 满足 $wv\in E(G)$ 或 存在 $v_k\in\{v_i|i=1,2,\cdots,s\}$ 使得 $d(v_k)=2$.

情况 2.1 若 $wv\in E(G)$.

情况 2.1.1 若 $v_i(i=1,2,\cdots,s)$ 中存在度为 2 的点和度为 1 的点, 不妨设 $d(v_i)=2$ $(i=1,2,\cdots,k-1)$, $d(v_i)=1$ $(i=k,k+1,\cdots,s)$. 考虑图

$$G_0=G-\{v_k,\cdots,v_s\}.$$

显然 G_0 仍然为 1-树, 因为 $d_T(w)=\min\{d(u)|u\in W(T)\}$, 所以 $\Delta(G_0)=\Delta(G)$, $|V(G_0)|=|V(G)|-s+k-1<|V(G)|$, 由归纳假设, 存在 G_0 的一 $\Delta(G)$-邻强边染色 f_0, 现在 f_0 的基础上构造 $G(V,E)$ 的一 $\Delta(G)$-邻强边染色 f.

情况 2.1.1.1 若 $d(w)\neq d(v)$, $d(w)\neq d(u)$, 则对 $\{wv_i|i=k,k+1,\cdots,s\}$ 中的边用 $C\backslash f_0[w]$ 中色依次染之, 显然任意 $xy\in E(G)$ 有 $f[x]\neq f[y]$, 即可得到 $G(V,E)$ 的一 $\Delta(G)$-邻强边染色 f.

情况 2.1.1.2 若 $d(w)\neq d(v)$, $d(w)=d(u)$, 或 $d(w)=d(v)$, $d(w)\neq d(u)$, 不妨设 $d(w)\neq d(v)$, $d(w)=d(u)$.

(a) 若 $f_0[w]\subset f_0[u]$, 令 $f(wv_k)\in C\backslash f_0[u]$, 显然不管 $\{wv_i|i=k+1,\cdots,s\}$ 中的边染何色, 均有 $f[w]\neq f[u]$. 然后对 $\{wv_i|i=k+1,\cdots,s\}$ 中边依次用 $C\backslash(f_0[w]\cup\{f(wv_k)\})$ 中色依次染之, 显然任意 $xy\in E(G)$ 有 $f[x]\neq f[y]$, 即可得到 $G(V,E)$ 的一 $\Delta(G)$-邻强边染色 f.

(b) 若 $f_0[w]\not\subset f_0[u]$，则对 $\{wv_i|i=k,\cdots,s\}$ 中边依次用 $C\setminus f_0[w]$ 中色依次染之，显然有 $f[w]\neq f[u]$. 从而得到 $G(V,E)$ 的一 $\Delta(G)$ -邻强边染色 f.

情况 2.1.1.3 若 $d(w)=d(v)=d(u)$.

情况 2.1.1.3.1 若 $f_0[w]\subset f_0[u]$，$f_0[w]\subset f_0[v]$，令 $f(wv_1)\in C\setminus f_0[v]$，则不管以后与 w 相关联的其它边染何色，均有 $f[w]\neq f[v]$. 若 $(f_0[w]\setminus\{f_0(wv_1)\})\cup\{f(wv_1)\}\not\subset f_0[u]$，对与 w 相关联的其它未染色边依次用在 w 上未出现的色染色即得到 G 的一 $\Delta(G)$ -邻强边染色 f；若 $(f_0[w]\setminus\{f_0(wv_1)\})\cup\{f(wv_1)\}\subset f_0[u]$，则令 $f(wv_k)\in C\setminus f_0[u]$，则不管以后与 w 相关联的其它边染何色，均有 $f[w]\neq f[u]$. 然后对与 w 相关联的其它未染色边依次用在 w 上未出现的色染色即得到 G 的一 $\Delta(G)$ -邻强边染色 f.

情况 2.1.1.3.2 若 $f_0[w]\not\subset f_0[u]$，或 $f_0[w]\not\subset f_0[v]$，此时证明与情况 2.1.1.3.1 类似且比情况 2.1.1.3.1 容易，详证略.

情况 2.1.2 任意 v_i ($i=1,2,\cdots,s$)都有 $d(v_i)=2$，即 $vv_i\in E(G)$ ($i=1,2,\cdots,s$)，

情况 2.1.2.1 若存在 $x\in V(G)$，满足 $d(x)=1$，考虑图

$$G_0=G-\{v_1\}+\{vx\}.$$

显然 G_0 仍然为 1-树，因为 $d_T(w)=\min\{d(u)|u\in W(T)\}$，所以 $\Delta(G_0)=\Delta(G)$，$|V(G_0)|=|V(G)|-1<|V(G)|$，由归纳假设，存在 G_0 的一 $\Delta(G)$ -邻强边染色 f_0，现在 f_0 的基础上构造 $G(V,E)$ 的一 $\Delta(G)$ -邻强边染色 f. 令 $f(vv_1)=f_0(vx)$.

情况 2.1.2.1.1 若 $d(w)\neq d(v)$，$d(w)\neq d(u)$，

(a) 若 $f(vv_1)\in f_0[w]$，令 $f(wv_1)\in C\setminus f_0[w]$，即可得到 $G(V,E)$ 的一 $\Delta(G)$ -邻强边染色 f.

(b) 若 $f(vv_1)\notin f_0[w]$，因为 $f(vv_1)\neq f_0(vv_2)$，可令 $f(wv_2)=f(vv_1)$. 此时必有 $f(vv_1)\in(f_0[w]\setminus\{f_0(wv_2)\})\cup\{f(wv_2)\}$. 然后令 $f(wv_1)\in C\setminus((f_0[w]\setminus\{f_0(wv_2)\})\cup\{f(wv_2)\})$ 即可得到 $G(V,E)$ 的一 $\Delta(G)$ -邻强边染色 f.

情况 2.1.2.1.2 若 $d(w)=d(v)=d(u)$，

情况 2.1.2.1.2.1 若 $d(w)\geqslant 5$，

情况 2.1.2.1.2.1.1 若 $f(vv_1)\in f_0[w]$，

情况 2.1.2.1.2.1.1.1 若 $f_0[w]\not\subset f_0[u]$，$f_0[w]\not\subset f_0[v]\cup\{f(vv_1)\}$，令 $f(wv_1)\in C\setminus f_0[w]$，显然任意 $xy\in E(G)$ 有 $f[x]\neq f[y]$，从而可得到 $G(V,E)$ 的一 $\Delta(G)$ -邻强边染色 f.

情况 2.1.2.1.2.1.1.2 若 $f_0[w]\not\subset f_0[u]$，$f_0[w]\subset f_0[v]\cup\{f(vv_1)\}$，或 $f_0[w]\subset f_0[u]$，$f_0[w]\not\subset f_0[v]\cup\{f(vv_1)\}$，不妨设 $f_0[w]\subset f_0[u]$，$f_0[w]\not\subset f_0[v]\cup\{f(vv_1)\}$，令 $f(wv_1)\in C\setminus f_0[u]$，显然任意 $xy\in E(G)$ 有 $f[x]\neq f[y]$，可得到 $G(V,E)$ 的一 $\Delta(G)$ -邻强边染色 f.

情况 2.1.2.1.2.1.1.3 若 $f_0[w]\subset f_0[u]$，$f_0[w]\subset f_0[v]\cup\{f(vv_1)\}$，不妨设 $f_0(wv_2)\neq f(vv_1)$，令 $f(wv_2)=f(vv_1)$，

1). 若 $f_0[u]=f_0[v]\cup\{f(vv_1)\}$，令 $f(wv_1)\in C\setminus f_0[u]$ 即可得到 $G(V,E)$ 的一 $\Delta(G)$ -邻强边染色 f.

2). 若 $f_0[u]\neq f_0[v]\cup\{f(vv_1)\}$，令 $f(wv_2)\in C\setminus(f_0[v]\cup\{f(vv_1)\})$，则不管以后对

与 w 相关联的染何色，均有 $f[w] \neq f[v]$，且有

$$(f_0[v] \cup \{f(vv_1)\}) \neq (f_0[w] \backslash \{f_0(wv_2),\ f_0(wv_3)\}) \cup \{f(wv_2), f(wv_3)\}.$$

若 $f(wv_2) \in f_0[u]$，则令 $f(wv_1) \in C \backslash f_0[u]$ 即可得到 $G(V,E)$ 的一 $\Delta(G)$ -邻强边染色 f.

若 $f(wv_2) \notin f_0[u]$，则令

$$f(wv_1) \in C \backslash (f_0[w] \backslash \{f_0(wv_2),\ f_0(wv_3)\}) \cup \{f(wv_2), f(wv_3)\},$$

即可得到 $G(V,E)$ 的一 $\Delta(G)$ -邻强边染色 f.

情况 2.1.2.1.2.1.2　若 $f(vv_1) \notin f_0[w]$，因为 $f(vv_1) \neq f_0(vv_2)$，可令 $f(wv_2) = f(vv_1)$，可转化为前面的情况 2.1.2.1.2.1.1.1.

情况 2.1.2.1.2.2　若 $d(w) \leqslant 4$，则只有一种情况，易染.

情况 2.1.2.1.3　若 $d(w) = d(u)$，$d(w) \neq d(v)$ 或 $d(w) \neq d(u)$，$d(w) = d(v)$，此时染色与情况 2.1.2.1.2 类似且证明较易，详证略.

情况 2.1.2.2　若任意 $x \in V(G)$，满足 $d(x) \geqslant 2$，则显然 v 为最大度点，且任意 $u \in V(G) \backslash \{v\}$ 都有 $d(u) < d(v)$. 若存在 $w \in W(T)$（不一定满足 $d_T(w) = \min\{d(u) | u \in W(T)\}$），使 $wv \notin E(G)$，设 $N(w) = \{u, v_1, \cdots, s\}$，考虑图

$$G_0 = G - \{v_1\} + \{wv\}.$$

显然 G_0 仍然为 1-树且 $\Delta(G_0) = \Delta(G)$，$|V(G_0)| = |V(G)| - 1 < |V(G)|$，由归纳假设，存在 G_0 的一 $\Delta(G)$ -邻强边染色 f_0，现在 f_0 的基础上构造 $G(V,E)$ 的一 $\Delta(G)$ -邻强边染色 f. 令 $f(vv_1) \in C \backslash f_0[v]$，因为 $d(v) > d(w)$，所以对与 w 相关联的边染色时可不考虑与 v 点相关联的边的色，则可转化为情况 2.1.2.1 中的情况处理，详证略.

若所有 $w \in W(T)$ 都有 $wv \in E(G)$，设 $T = G - \{v\}$，若 T 为星图，穷染即可得 G 的邻强边染色 f；若 T 不为星图，设 y, z 为 T 中度最大的两个点，则易证 T 中 1 度点个数大于等于 $d(x) + d(y) - 2$，由引理 2 知 $|W(T)| \geqslant 2$，从而 $\Delta(G) \geqslant d(x) + d(y) - 2 + 2 = d(x) + d(y)$，因任意 $u \in V(G) \backslash \{v\}$ 都有 $d(u) < d(v)$，所以对 T 中的边染色时可不考虑点 v 上出现的色的集合，先对与 v 相关联的边染色，由引理 4 知，T 中的边极易用 $\Delta(G)$ 种色进行染色，详细证明略.

情况 2.1.3　若所有 v_i $(i = 1, 2, \cdots, s)$ 都有 $d(v_i) = 1$，考虑图

$$G_0 = G - \{v_1, \cdots, v_s\}.$$

此时与情况 2.1.1 类似，极易在 G_0 的邻强边染色 f_0 的基础上构造 G 的邻强边染色 f，详证略.

情况 2.2　若 $wv \notin E(G)$，证明方法与情况 2.1 类似，详证略. 综合以上证明可知当 $E(G[V_\Delta]) = \varnothing$ 时，$\chi'_{as}(G) = \Delta(G)$.

下面证明当 $E(G[V_\Delta]) \neq \varnothing$ 时，$\chi'_{as}(G) = \Delta(G) + 1$. 令 C 为 $\Delta(G) + 1$ 中颜色的集合，同样对 $p = |V(G)|$ 用归纳法.

若出现情况 1 中的各种情况，可用与情况 1 中相类似的方法证明.

对情况 2 中的各种情况，情况 2.1.2.2 当 $E(G[V_\Delta]) \neq \varnothing$ 时不可能出现，其它情况可用与情况 2 中相类似的方法证明，证明略.

综合以上证明，可知定理结论成立.

参考文献：

[1] ODILE F, LI Hao and SCHELP R H. *Strong edge colorings of graphs* [J]. Discrete Mathematics, 1996, **159**: 103—109.

[2] BURNS A C, SCHELP R H. *Vertex-distinguishing proper edge-colorings* [J]. J. of Graph Theory, 1997, **21**: 73—82.

[3] ZHANG Zhong-fu, LIU Lin-zhong, WANG Jian-fang. *On the adjacent strong edge-colorings of graphs*, Submitted.

[4] CHARTRAND G. Linda Lesniak-Foster, Graphs and Digraphs, ind. edition Wadsworth Brooks/Cole, Monterey, CA(1986), 1—100.

On The Adjacent Strong Edge Coloring of 1-Tree

MA De-shan[1], LIU Lin-zhong[2], ZHANG Zhong-fu[3]

(1. Northwestern China College for Nationalities, Lanzhou 730030;

2. Dept. of Management Engineering, Lanzhou Railway Institute, 730070;

3. Inst. of Appl. Math., Lanzhou Railway Insitute, 730070)

Abstract: Let $G(V,E)$ be a graph. A k-proper edge coloring f is called a k-adjacent strong edge coloring of $G(V,E)$ iff every $uv \in E(G)$ satisfies $f[u] \neq f[v]$, where $f[u] = \{f(uw) \mid uw \in E(G)\}$, is called k-ASEC for short, and

$$\chi'_{as}(G) = \min\{k \mid \text{There exists a } k\text{-ASEC of } G\}$$

is called the adjacent strong edge chromatic number of G. In this paper, we present a conjecture that for 2-connected graph $G(V,E)$ ($G(V,E) \neq C_5$), $\Delta(G) \leqslant \chi'_{as}(G) \leqslant \Delta(G)+2$, and prove that for 1-tree graph with $\Delta(G) \geqslant 4$ have $\Delta(G) \leqslant \chi'_{as}(G) \leqslant \Delta(G)+1$ and $\chi'_{as}(G) = \Delta(G)+1$ iff $E(G[V_\Delta]) \neq \emptyset$, where $V_\Delta = \{u \mid u \in V(G), d(u) = \Delta(G)\}$.

Key words: graph; adjacent strong edge coloring; adjacent strong edge chromatic number.