第23卷第1期 数学研究与评论 Vol. 23 No. 1
2003年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 2003

具有时滞的周期Logistic方程的持续性与周期解*

桂占吉[1]， 陈兰荪[2]

(1. 海南师范学院数学系，海南 海口 571158；2. 中国科学院数学研究所，北京 100080)

摘 要：这篇文章的目的是讨论一类具有多个时滞的周期Logistic方程的动力学行为. 证明了在某些条件下系统是持续的，建立了全局吸引周期解的充分条件.

关键词：Logistic方程；时滞；周期性；全局吸引.

分类号：AMS(2000) 34C25,34K15/CLC number：O175.24

文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(2003)01-0109-06

1 引 言

有许多文献对具有时滞的Logistic方程进行了广泛的研究，文献[1,2]在一般情况下各自利用不同的方法讨论了具有多个滞量的周期的时滞Logistic型微分方程模型. 所得的结果包括了许多特殊形式的周期时滞Logistic模型. 我们考虑如下具有时滞的周期Logistic方程.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y(t)\Big[r(t) - a(t)y(t) - \sum_{j=1}^{m} b_j(t)y(t-\sigma_j(t)) - \sum_{j=1}^{m} c_j(t)\int_{-\tau_j}^{0} y(t+s)\mathrm{d}\mu_j(s)\Big], \tag{1.1}$$

其中 $r(t), a(t), b_j(t), c_j(t), \sigma_j(t)$ 是正的连续的 ω 周期函数，τ_j 为正常数. $\mu_j(s)$ 是非减的，且 $\int_{-\tau_j}^{0}\mathrm{d}\mu_j(s)\mathrm{d}s = 1, j = 1,2,\cdots,m$. 考虑初始条件如下：

$$y(s) = \Phi(s) \geqslant 0, \Phi(0) > 0, s \in [-\tau, 0], \Phi \in C[[-\tau,0], R^+), \tag{1.2}$$

这里 $\Phi(s)$ 是定义在 $[-\tau,0]$ 上的非负连续函数，且 $\tau = \max\{\sigma_j(t), \tau_j; t\in R, j=1,2,\cdots,m\}$.

本文证明了系统(1.1)的持续性，周期解的存在性与全局吸引性. 由于 $a(t)\neq 0, c_j(t)\neq 0, j=1,2,\cdots,m$，因此文献[1,2]不能包括本文讨论的系统.

2 持续性

* 收稿日期：2000-09-27

基金项目：海南省自然科学基金(80201)、海南省教育厅高校科研资助项目(Hjkj200108)

作者简介：桂占吉(1962-)，男，教授.

如果 $g(t)$是一个连续的 ω 周期函数，记

$$g^L=\min_{0\leqslant t\leqslant\omega}\{g(t)\},\quad g^M=\max_{0\leqslant t\leqslant\omega}\{g(t)\},$$

并且令

$$h=\frac{a^M+\sum_{j=1}^{m}(b_j^M+c_j^M)}{a^L+\sum_{j=1}^{m}b_j^L\exp\{-r^M\sigma_j^M\}},\quad K^L=\frac{r^L}{a^M+\sum_{j=1}^{m}(b_j^M+c_j^M)},\quad K^M=\frac{r^M}{a^L+\sum_{j=1}^{m}(b_j^L+c_j^L)}.$$

定理 2.1 如果 $y(t)$是满足初值问题(1.1)，(1.2)的一个解，且 $r^Mh<r^L$，则系统(1.1)是一致持续的.

证明 由系统(1.1)，我们有

$$\begin{aligned}y'(t)&\leqslant y(t)\Big[r^M-a^Ly(t)-\sum_{j=1}^{m}b_j^Ly(t-\sigma_j(t))\Big]\\&\leqslant y(t)\Big[r^M-\Big(a^L+\sum_{j=1}^{m}b_j^L\exp\{-r^M\sigma_j^M\}\Big)y(t)\Big].\end{aligned}\tag{2.1}$$

从而有

$$y(t)\leqslant\frac{r^M}{a^L+\sum_{j=1}^{m}b_j^L\exp\{-r^M\sigma_j^M\}}\overset{\text{def}}{=}D.\tag{2.2}$$

另一方面，由系统(1.1)我们还有

$$y'(t)\geqslant y(t)\left[r^L-\frac{r^M\Big(a^M+\sum_{j=1}^{m}c_j^M\Big)}{a^L+\sum_{j=1}^{m}b_j^L\exp\{-r^M\sigma_j^M\}}-\sum_{j=1}^{m}b_j^My(t-\sigma_j(t))\right].\tag{2.3}$$

这里有两种可能的情况，要么 $y(t)$是关于 K^L 振动的解，要么不是振动的. 首先我们考虑 $y(t)$是关于 K^L 振动的情况. 令$\{t_n\}$是一个序列，且$\lim_{n\to\infty}t_n=\infty$，$y(t_n)=K^L$. 假设 $y(t_n^*)$是 $y(t)$在(t_n,t_{n+1})上的局部最小值，则

$$0=y'(t_n^*)\geqslant y(t_n^*)\left[r^L-\frac{r^M\Big(a^M+\sum_{j=1}^{m}c_j^M\Big)}{a^L+\sum_{j=1}^{m}b_j^L\exp\{-r^M\sigma_j^M\}}-\sum_{j=1}^{m}b_j^My(t_n^*-\sigma_j(t_n^*))\right].$$

这蕴涵着存在一个 $j_0\in\{1,2,\cdots,m\}$，使得 $y(t_n^*-\tau_{j_0}(t_n^*))\geqslant K^L$. 这说明存在一点 $\xi\in[t_n^*-\sigma_{j_0}(t_n^*),t_n^*]$，使得 $y(\xi)=K^L$，对(2.3) 式积分，得

$$\begin{aligned}\ln\frac{y(t_n^*)}{y(\xi)}&\geqslant\int_{\xi}^{t_n^*}\left[r^L-\frac{r^M\Big(a^M+\sum_{j=1}^{m}c_j^M\Big)}{a^L+\sum_{j=1}^{m}b_j^L\exp\{-r^M\sigma_j^M\}}-\frac{r^M\sum_{j=1}^{m}b_j^M}{a^L+\sum_{j=1}^{m}b_j^L\exp\{-r^M\sigma_j^M\}}\right]\mathrm{d}t\\&=\left[r^L-r^M\left(\frac{a^M+\sum_{j=1}^{m}(b_j^M+c_j^M)}{a^L+\sum_{j=1}^{m}b_j^L\exp\{-r^M\sigma_j^M\}}\right)\right](t_n^*-\xi).\end{aligned}$$

即 $y(t_n^*)\geqslant K^L\exp\{(r^L-r^Mh)\tau\}\overset{\mathrm{def}}{=}d$. 因此当 $t>t_1+2\tau$ 时，有

$$y(t)\geqslant d. \tag{2.4}$$

下面假设 $y(t)$ 关于 K^L 是非振动的，易知对任意给定的 $\epsilon>0$，总存在一个 $T_1=T_1(\epsilon)$ 使得当 $t_1>T_1$ 时，有

$$y(t)>K^L-\epsilon. \tag{2.5}$$

由(2.2)、(2.4)和(2.5)式，一致持续性的结论得证.

3 延拓定理

定义 3.1 设 X,Y 为实 Banach 空间，线性算子 $L:\mathrm{Dom}L\subset X\to Y$，如果核 $\mathrm{Ker}L=L^{-1}\{0\}$ 是有限维的，值域 $\mathrm{Im}L$ 是闭的，商空间 $Y|\mathrm{Im}L$ 是有限维的，则称 L 为 Fredholm 算子.

定义 3.2 设 L 为 Fredholm 算子，则其 Fredholm 指标为 $\mathrm{Ind}L=\dim(\mathrm{Ker}L)-\dim(Y|\mathrm{Im}L)$. 若 $\mathrm{Ind}L=0$，则称 L 是指标为零的 Fredholm 算子.

做变换 $y(t)=\exp\{x(t)\}$，则系统(1.1)变为

$$x'(t)=r(t)-a(t)\exp\{x(t)\}-\sum_{j=1}^{m}b_j(t)\exp\{x(t-\sigma_j(t)\}-\sum_{j=1}^{m}c_j(t)\int_{-\tau_j}^{0}\exp\{x(t+s)\}\mathrm{d}\mu_j(s). \tag{3.1}$$

令 $Lx=x'$，$Nx=r(t)-a(t)\exp\{x(t)\}-\sum_{j=1}^{m}b_j(t)\exp\{x(t-\sigma_j(t))\}-\sum_{j=1}^{m}c_j(t)\int_{-\tau_j}^{0}\exp\{x(t+s)\}\mathrm{d}\mu_j(s)$，则方程(1.1) 变为 $Lx=Nx$. 引进参数 $\lambda,\lambda\in(0,1]$，得

$$Lx=\lambda Nx. \tag{3.2}$$

取 $X=Y=\{x\in C(R,R):x(t+\omega)=x(t)\}$，记 $\|x\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}|x(t)|$，则 X,Y 在范数 $\|\cdot\|$ 下为 Banach 空间. 按照 L,N 的定义，$\mathrm{Ker}L$ 及商空间 $X|\mathrm{Im}L$ 是常值向量，这里 $L:\mathrm{Dom}L\subset X\to X$ 为线性算子，$N:X\to Y$ 为连续映射. 因此 L 为指标为零的 Fredholm 算子，从而存在投影算子 P,Q 分别为 $P:X\to X,Q:Y\to Y$ 使得 $\mathrm{Im}P=\mathrm{Ker}L,\mathrm{Im}L=\mathrm{Ker}Q=\mathrm{Im}(I-Q)$，且有表达式

$$Px=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}x(t)\mathrm{d}t,x\in X;Qy=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}y(t)\mathrm{d}t,y\in Y.$$

这时 $L|\mathrm{Dom}L\cap\mathrm{Ker}P:\mathrm{Dom}L\cap\mathrm{Ker}P\to\mathrm{Im}L$ 是一一对应的，有连续逆 Kp，这样方程(3.2)等价于

$$\begin{cases}(I-P)x=\lambda Kp(I-Q)Nx,\\ QNx=0.\end{cases} \tag{3.3}$$

即 $x=Px+JQNx+\lambda Kp(I-Q)Nx$，其中 J 是 $X|\mathrm{Im}L\to\mathrm{Ker}L$ 的一个同构(J 可取为恒等算子).

由于 N 是有界连续算子，对任意有界闭集 $\bar{\Omega}\subset X$，由 $(I-Q)N$ 连续有界，而 $Kp:\mathrm{Im}L\to X$ 是紧嵌入，故 $Kp(I-Q)N(\bar{\Omega})$ 相对紧，于是可知 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L 紧的[3].

定理 3.1（延拓定理） 设 L 是指标为零的 Fredholm 算子，N 在 $\bar{\Omega}\subset X$ 上 L 紧，如果

(a) $Lx\neq\lambda Nx$，$\forall\ \lambda\in(0,1)$，$x\in\partial\Omega$;

(b) $QNx\neq 0$，$\forall\ x\in\partial\Omega\cap \mathrm{Ker}L$；

(c) $\deg(QN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0)\neq 0$，

则方程 $Lx=Nx$ 在 $\mathrm{Dom}L\cap\bar{\Omega}$中至少有一解.

4 主要结果

定理 4.1 初值问题(1.1)、(1.2)至少有一个 ω 周期解.

证明 对应方程(3.2),我们有

$$x'(t)=\lambda\Big[r(t)-a(t)\exp\{x(t)\}-\sum_{j=1}^{m}b_j(t)\exp\{x(t-\sigma_j(t))\}-\sum_{j=1}^{m}c_j(t)\int_{-\tau_j}^{0}\exp\{x(t+s)\}\mathrm{d}\mu_j(s)\Big]. \tag{4.1}$$

在$[0,\omega]$上对(4.1)两边积分,可以得出

$$\int_0^{\omega}r(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\omega}\Big[a(t)\exp\{x(t)\}+\sum_{j=1}^{m}b_j(t)\exp\{x(t-\sigma_j(t))\}+\sum_{j=1}^{m}c_j(t)\int_{-\tau_j}^{0}\exp\{x(t+s)\}d\mu_j(s)\Big]\mathrm{d}t. \tag{4.2}$$

由(4.1)和(4.2)式得

$$\int_0^{\omega}|x'(t)|\mathrm{d}t\leqslant\lambda\Big[\int_0^{\omega}r(t)dt+\int_0^{\omega}\Big(a(t)\exp\{x(t)\}+\sum_{j=1}^{m}b_j(t)\exp\{x(t-\sigma_j(t))\}+\sum_{j=1}^{m}c_j(t)\int_{-\tau_j}^{0}\exp\{x(t+s)\}\mathrm{d}\mu_j(s)\Big)\mathrm{d}t\Big]<2\int_0^{\omega}r(t)\mathrm{d}t\overset{\mathrm{def}}{=}2\bar{r}\,\omega,$$

其中 $\bar{r}=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}r(t)\mathrm{d}t$. 因为$x(t)\in X$,所以存在$p,q\in[0,\omega]$,使得$x(p)=\min\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}\{x(t)\}$,$x(q)=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}\{x(t)\}$. 由(4.2),我们有

$$\begin{aligned}r^M\omega&\geqslant\int_0^{\omega}\Big[a(t)\exp\{x(p)\}+\sum_{j=1}^{m}\Big(b_j(t)+c_j(t)\int_{-\tau_j}^{0}d\mu_j(s)\Big)\exp\{x(p)\}\Big]\mathrm{d}t\\&\geqslant\Big[a^L+\sum_{j=1}^{m}(b_j^L+c_j^L)\Big]\omega\exp\{x(p)\}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

由此可得

$$x(p)<\ln\frac{r^M}{a^L+\sum_{j=1}^{m}(b_j^L+c_j^L)}. \tag{4.4}$$

所以

$$x(t)\leqslant x(p)+\int_0^{\omega}|x'(t)|\mathrm{d}t\leqslant 2\bar{r}\,\omega+\ln\frac{r^M}{a^L+\sum_{j=1}^{m}(b_j^L+c_j^L)}\overset{\mathrm{def}}{=}M_1. \tag{4.5}$$

类似上面的讨论,我们可以推出

$$x(q)>\ln\frac{r^L}{a^M+\sum_{j=1}^{m}(b_j^M+c_j^M)}, \tag{4.6}$$

$$x(t) \geqslant x(q) - \int_0^\omega |x'(t)| \mathrm{d}t \geqslant \ln \frac{r^L}{a^M + \sum_{j=1}^{m}(b_j^M + c_j^M)} - 2\bar{r}\,\omega \stackrel{\mathrm{def}}{=} M_2. \tag{4.7}$$

由(4.5)和(4.7),我们有$|x(t)| < \max\{|M_1|, |M_2|\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} M$,显然$M$是与$\lambda$无关的.令$\Omega = \{x \in X: \|x\| < M\}$,则$\Omega$满足定理3.1的条件,因此系统(4.1)至少有一个ω周期解,因而(1.1)也至少有一个ω周期解.

定义4.1 如果$y(t)$是系统(1.1)的任意一个具有正初值的解,$y^*(t)$是定理4.1所描述的ω周期解,且满足$\lim\limits_{t\to\infty}|y(t) - y^*(t)| = 0$,则称$y^*(t)$是全局吸引的(或称全局渐近稳定的).

显然在这种意义下周期解一定是唯一的.我们令

$$\alpha^L = \min\left\{\frac{1}{1 - \sigma_j(t)}: t \in R, j = 1,2,\cdots,m\right\},$$

$$\alpha^M = \max\left\{\frac{1}{1 - \sigma_j(t)}: t \in R, j = 1,2,\cdots,m\right\}.$$

假设$\sigma'(t) < 1$,则α^L和α^M均为正数.定义$\upsilon_j(t) = t - \sigma_j(t)$,则$\upsilon_j(t)$存在反函数$\upsilon_j^{-1}$.

定理4.2 若$a^L > \sum_{j=1}^{m}(\alpha_j^M b_j^M + c_j^M)$,则系统(1.1)的周期解是唯一全局吸引的.

证明 令$y(t) = y^*(t)e^{u(t)}$,则系统(1.1)变为

$$u'(t) = -a(t)y^*(t)(e^{u(t)} - 1) - \sum_{j=1}^{m} b_j(t)y_j^*(t - \sigma_j(t))(e^{u(t-\sigma_j(t))} - 1) - \sum_{j=1}^{m} c_j(t)\int_{-\tau_j}^{0} y^*(t+s)(e^{u(t+s)} - 1)\mathrm{d}\mu_j(s). \tag{4.8}$$

定义Lyapunov函数

$$V(t) = |u(t)| + \sum_{j=1}^{m}\alpha^M\int_{t-\sigma_j(t)}^{t} y^*(s)b_j(\upsilon^{-1}(s))|e^{u(s)} - 1|\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{m} c_j^M\int_{-\tau_j}^{0}\int_{t+s}^{t} y^*(\theta)|e^{u(\theta)} - 1|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\mu_j(s),$$

沿着系统(4.8)计算V的上右导数,我们有

$$\begin{aligned}
D^+V(t) \leqslant &- a(t)y^*(t)|e^{u(t)} - 1| + \sum_{j=1}^{m} b_j(t)y^*(t - \sigma_j(t))|e^{u(t-\sigma_j(t))} - 1| + \\
&\sum_{j=1}^{m} c_j(t)\int_{-\tau_j}^{0} y^*(t+s)|e^{u(t+s)} - 1|\mathrm{d}\mu_j(s) + \\
&\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^M b_j(\upsilon^{-1}(t))y^*(t)|e^{u(t)} - 1| - \\
&\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^M b_j(\upsilon^{-1}(t - \sigma_j(t)))y^*(t - \sigma_{(}t))|e^{u(t-\sigma_j(t))} - 1|(1 - \sigma'_j(t)) + \\
&\sum_{j=1}^{m} c_j^M\int_{-\tau_j}^{0} y^*(t)|e^{u(t)} - 1|\mathrm{d}\mu_j(s) - \sum_{j=1}^{m} c_j^M\int_{-\tau_j}^{0} y^*(t+s)|e^{u(t+s)} - 1|\mathrm{d}\mu_j(s) \\
\leqslant &- \left[a^L - \sum_{j=1}^{m}(\alpha_j^M b_j^M + c_j^M)\right]y^*(t)|e^{u(t)} - 1| \leqslant -\varepsilon\gamma|e^{u(t)} - 1|.
\end{aligned}$$

其中 $\epsilon = a^L - \sum_{j=1}^{m}(a_j^M b_j^M + c_j^M) > 0, 0 < \gamma < y^*(t)$. 由文[4],[5]可知系统(1.1)的周期解是全局吸引的.

参考文献:

[1] 李永昆. 一类时滞微分方程周期正解的存在性和全局吸引性 [J]. 中国科学, 1998, **28**(2): 108—118.
LI Yong-kun. *Existence and global attraction of positive periodic solutions for a delay differential equations* [J]. Science in China, 1998, **28**(2): 108—118. (in Chinese)

[2] 蒋达清,魏俊清. 非自治时滞微分方程周期正解的存在性 [J]. 数学年刊(A辑), 1999, **20**(6): 715—720.
JIANG Da-qing, WEI Jun-qing. *Existence of positive periodic solutions for nonautonomous delay differential equations* [J]. Chinese Ann. Math., Ser. A, 1999, **20**(6): 715—720. (in Chinese)

[3] GAINES R E, MAWHIN J L. *Coincidence Degree, and Non-linear Differential Equations* [M]. New York: Springer-Verlag, 1977.

[4] HALE J K. *Therory of Functional Differential Equations* [M]. New York: Springer-Verlag, 1977.

[5] BARBALAT I. *Systems d'equations differentielles d'oscil-lations non-lineaires* [J]. Rev. Roumaine Math. Pures Appl, 1959, **4**: 267—270.

Persistence and Periodic Solutions of a Periodic Logistic Equation with Time Delays

GUI Zhan-ji[1], CHEN Lan-sun[2]

(1. Dept. of Math., Hainan Teachers' College, Haikou 571158, China;
2. Inst. of Math., Academic Sinica, Beijing 100080, China)

Abstract: The purpose of this paper is to discuss the dynamical behaviour of a periodic Logistic equation with time delays. It is proved that the system can be persistent under some conditions. Furthermore, sufficient conditions are established for the periodic solution to be globally attractive.

Key words: Logistic equation; delay; periodic solution; global attractivity.