第11卷 第2期
1991年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.2
May, 1991

Bochner可积函数空间上线性算子的积分表示*

邱继征

（山西师范大学数学系，临汾）

摘要

在研究Bochner可积函数空间上线性算子的积分表示时，一般总要求函数值域空间X具有Radon-Nikodym性质．本文从线性算子本身出发，在不要求X具有Radon-Nikodym性质的条件下研究线性算子的积分表示，给出一个充要条件．

设$(\Omega,\mathscr{B},\mu)$为一σ-有限测度空间，X为一Banach空间，$E\in\mathscr{B}$，$\mathscr{L}(E;X;\mu)$为E到X的Bochner可积函数作成的线性空间，赋以范数$\|f\|=\int_E\|f(t)\|\mathrm{d}\mu$，则$\mathscr{L}(E;X;\mu)$为Banach空间（我们将仅在一个$\mu$-零测集上不相等的强可测函数看作同一函数）．

设$L(\cdot)$为$\mathscr{L}(E;X;\mu)$到X的有界线性算子．则我们有

定理 对任何$f\in\mathscr{L}(E;X;\mu)$，$L(f)$可用可测空间$(E,E\cap\mathscr{B})$上f的Bochner积分表示，当且仅当存在一个非负集函数γ，使对任何$E_0\in E\cap\mathscr{B}$及$c\in X$

$$L(c\chi_{E_0})=c\gamma(E_0),\tag{1}$$

其中χ_{E_0}为E_0的特征函数．

为证这个定理，我们给出几个引理：

引理1 由(1)给出的γ是$(E,E\cap\mathscr{B})$上的测度．

证明 对任何$c\in X$

$$\theta=L(cO)=L(c\chi_\phi)=c\gamma(\phi),$$

其中θ为X的零元，ϕ为空集，因此$\gamma(\varnothing)=0$．

对任何$E_1,E_2\in E\cap\mathscr{B}$，$E_1\cap E_2=\varnothing$，$c\in X$．

$$\begin{aligned}L(c\chi_{E_1\cup E_2})&=c\gamma(E_1\cup E_2)\\&=L(c\chi_{E_1}+c\chi_{E_2})=L(c\chi_{E_1})+L(c\chi_{E_2})\\&=c\gamma(E_1)+c\gamma(E_2)=c(\gamma(E_1)+\gamma(E_2)),\end{aligned}$$

因此$\gamma(E_1\cup E_2)=\gamma(E_1)+\gamma(E_2)$．

设$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$，$A_n\in E\cap\mathscr{B}$，$n=1,2,,\cdots$，$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$．因为$\mu$为测度，所以$\mu(A_n)=\int_E\chi_{A_n}\mathrm{d}\mu\to0\ (n\to\infty)$，因此

$$\int_E\|c\chi_{A_n}-\theta\|\mathrm{d}\mu=\|c\|\int_E(\chi_{A_n}-0)\mathrm{d}\mu\to0\quad(n\to\infty).\tag{2}$$

* 1989年11月27日收到．

因$L(\cdot)$ 连续，故有

$$L(c\chi_{A_n})\to\theta,\quad n\to\infty,$$

即
$$c\gamma(A_n)\to\theta,\ n\to\infty,$$

从而$\gamma(A_n)\to 0$, $n\to\infty$. γ是$(E, E\cap\mathscr{B})$上的测度．引理1证毕．

引理2 若实值函数$g(t)$ $(t\in E)$关于μ可积，则对任何$c\in X$，$cg(t)$关于μ Bochner 可积且

$$\int_E cg(t)\,\mathrm{d}\mu = c\int_E g(t)\,\mathrm{d}\mu \tag{3}$$

证明 因为$g(t)$ $(t\in E)$关于μ可积，故$|g(t)|$亦然，且

$$\int_E \|cg(t)\|\,\mathrm{d}\mu = \|c\|\int_E |g(t)|\,\mathrm{d}\mu<\infty. \tag{4}$$

由$g(t)$的可积性知$cg(t)$关于μ强可测，又由（4）知$cg(t)$在E上Bochner可积．

下面证明（3）．

首先假定$g(t)\geq 0$ $(t\in E)$，则存在一个简单函数列$0\leq g_1(t)\leq\cdots\leq g_n(t)\leq\cdots$，$g_n(t)\xrightarrow{\cdot} g(t)$ $(n\to\infty)$，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(t)\,\mathrm{d}\mu = \int_E g(t)\,\mathrm{d}\mu \tag{5}$$

因为$cg_n(t)$为E到X的简单函数，由Bochner积分的定义知

$$(B)\int_E cg_n(t)\,\mathrm{d}\mu = c\int_E g_n(t)\,\mathrm{d}\mu$$

由（5）有

$$\int_E \|cg_n(t)-cg(t)\|\,\mathrm{d}\mu = \|c\|\int_E |g_n(t)-g(t)|\,\mathrm{d}\mu\to 0,\quad n\to\infty.$$

故
$$\int_E cg(t)\,\mathrm{d}\mu = s-\lim_{n\to\infty}(B)\int_E cg_n(t)\,\mathrm{d}\mu = s-\lim_{n\to\infty} c\int_E g_n(t)\,\mathrm{d}\mu = c\int_E g(t)\,\mathrm{d}\mu$$

对任何μ-可积实函数$g(t)$，设$g(t)=g^+(t)-g^-(t)$，

则
$$\begin{aligned}\int_E cg(t)\,\mathrm{d}\mu &= \int_E c(g^+(t)-g^-(t))\,\mathrm{d}\mu\\ &= \int_E cg^+(t)\,\mathrm{d}\mu - \int_E cg^-(t)\,\mathrm{d}\mu = c\int_E (g^+(t)-g^-(t))\,\mathrm{d}\mu = c\int_E g(t)\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

引理2证毕．

引理3 若实函数$g(t)$ $(t\in E)$关于μ可积，则$g(t)$关于γ 可积且对任何$c\in X$.

$$L(cg(t)) = c\int_E g(t)\,\mathrm{d}\gamma \tag{6}$$

证明 首先设$g(t)\geq 0$ $(t\in E)$．由引理2的证明有

$$(B)\int_E c\,g_n(t)\,\mathrm{d}\mu = c\int_E g_n(t)\,\mathrm{d}\mu\ , \tag{7}$$

其中$g_n(t)$的定义同引理2的证明．

由（1）及$L(\cdot)$的线性易见

$$L(cg_n(t)) = c\int_E g_n(t)\,\mathrm{d}\gamma \tag{8}$$

由（5）有

$$\int_E \|cg_n(t)-cg(t)\|\,\mathrm{d}\mu = \|c\|\int_E (g(t)-g_n(t))\,\mathrm{d}\mu\to 0,\quad n\to\infty.$$

故由$L(\cdot)$的连续性有

$$L(cg_n(t))\to L(cg(t)),\quad n\to\infty \tag{9}$$

注意$cg(t)\in\mathscr{L}(E;X;\mu)$，上面给出的$L(cg(t))$是有意义的．

由(9)，对任何$c\in X$

$$\|L(cg_n(t))\| = \|c\| \int_E g_n(t)\,\mathrm{d}\nu \tag{10}$$

关于 n 是有界的，故 $\int_E g_n(t)\,\mathrm{d}\nu$ 有界．由Levi 引理知 $g(t)$ 关于 ν 可积且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(t)\,\mathrm{d}\nu = \int_E g(t)\,\mathrm{d}\nu\ ,$$

由此及（8），（9）有

$$L(cg(t)) = c\int_E g(t)\,\mathrm{d}\nu$$

对任何 μ- 可积实函数 $g(t)$，设 $g(t) = g^+(t) - g^-(t)$，我们知(6)成立．

（注：由引理1的证明易知 $\nu \ll \mu$，$g(t)$ 关于 ν 的可积性可由此直接得到，但(6)的证明需要以上步骤）．

引理 4 对任何 μ- 可积实函数列 $\{g_n(x)\}$，若 $\int_E |g_n(t)|\,\mathrm{d}\mu \to 0$，则 $\int_E |g_n(t)|\,\mathrm{d}\nu \to 0$ $(n\to\infty)$．

证明 由 $\nu \ll \mu$ 知这是显然的．

现在给出定理的证明．

必要性． 假定存在（E, $E\cap\mathscr{B}$）上的测度 ν 使

$$L(f) = \int_E f(t)\,\mathrm{d}\nu$$

对任何 $f\in\mathscr{L}(E;X;\mu)$ 成立，则对任何 $E_0\in E\cap\mathscr{B}$ 及 $c\in X$，因为 $c\chi_{E_0}\in\mathscr{L}(E;X;\mu)$，我们有

$$L(c\chi_{E_0}) = \int_E c\chi_{E_0}\,\mathrm{d}\nu = c\nu(E_0)\ ,$$

即（1）成立．

充分性． 假定存在集函数 ν 使对任何 $E_0\in E\cap\mathscr{B}$ 及 $c\in X$，有

$$\nu(E_0) \geq 0$$

及

$$L(c\chi_{E_0}) = c\nu(E_0)\ ,$$

则由引理1知 ν 为（E, $E\cap\mathscr{B}$）上的测度．

对任何 $f\in\mathscr{L}(E;X;\mu)$，由Bochner积分定义，我们知道存在在 E 上几乎处处（关于 μ）强收敛于 f 的简单函数列使

$$\int_E \|f - f_n\|\,\mathrm{d}\mu \to 0,\ n\to\infty, \tag{12}$$

由此及引理4知

$$\int_E \|f_n - f\|\,\mathrm{d}\nu \to 0,\ n\to\infty. \tag{13}$$

由于 $\nu \ll \mu$，故 $\{f_n\}$ 在 E 上关于 ν 几乎处处强收敛于 f，故由(13)知 f 关于 ν Bochner 可积．

因为 f_n 为简单函数，所以由引理3的证明知

$$L(f_n) = \int_E f_n\,\mathrm{d}\nu\ . \tag{14}$$

由(12)及 $L(\cdot)$ 的连续性知(14)的左端当 $n\to\infty$ 时依 X 的范数收敛于 $L(f)$；由(13)及 $\{f_n\}$ 关于 ν 几乎处处强收敛于 f 知(14)右端当 $n\to\infty$ 时依 X 范数收敛于 $\int_E f\,\mathrm{d}\nu$．因此

$$L(f) = \int_E f\,\mathrm{d}\nu\ .$$

定理证毕．

References

[1] J. Diestel and J. J. Uhl, Jr., Vector measures, 1977, American Mathematical Society Providence, Rhode Island.

[2] Sen-Yen Shaw, Approximation of Unbounded Functions and Applications to Representations of Semigroup, Journal of Approximation Theory, 28, 238—259 (1980).

The Representation of the Linear Operator on the Space of Bochner Integrable Functions

Di Jizheng

(Shanxi Teacher's University)

Abstract

In studying representation of linear operator on the space of Bochner integrable functions by integral, authors, usually, demand that the range space X have the Radon-Nikodym property. In this paper, we study such a representation but abandon the Radon-Nikodym property and give a sufficient and necessary condition for the representability of a linear operator by integral.