Ky Fan 极大极小不等式在 H-空间的进一步推广和应用*

杨 静
(贵州大学计算机科学系，贵阳 550025)

摘 要：本文在 H-空间得到一个新的 minimax 不等式，并得到了与其等价的几何形式、极大元存在定理及作为其应用的不动点定理.

关键词：minimax 不等式；极大元；不动点.
分类号：AMS(1991) 26D/CLC O174.1
文献标识码：A **文章编号**：1000-341X(1999)04-0759-04

引理 设 $(X,\{\Gamma_A\})$ 为一 H-空间，$\psi: X\times X\to R\cup\{-\infty,+\infty\}$ 满足：

(Ⅰ) $\psi(x,x)\leqslant 0,\forall x\in X$；

(Ⅱ) $\forall y\in X$，集 $\{x\in X:\psi(x,y)>0\}$ 是一 H-凸集，

则 $\forall A\in\mathscr{F}(X)$ 及 $\forall y\in\Gamma_A$ 有 $\min\limits_{x\in A}\psi(x,y)\leqslant 0$.

证明 假设结论不成立，则存在 $A\in\mathscr{F}(X)$ 及 $y_0\in\Gamma_A$ 使

$$\min_{x\in A}\psi(x,y_0)>0,$$

于是 $A\subset\{x\in X;\psi(x,y_0)>0\}$，$y_0\in\Gamma_A\subset\{x\in X:\psi(x,y_0)>0\}$，故 $\psi(y_0,y_0)>0$. 这与条件(Ⅰ)矛盾.

定理 1 设 $(X,\{\Gamma_A\})$ 是一 H-空间，$\varphi,\psi: X\times X\to R\cup\{-\infty,+\infty\}$.

(a) $\varphi(x,y)\leqslant\psi(x,y),\forall (x,y)\in X\times X$；

(b) 对每一个固定的 $x\in X$，$y\to\psi(x,y)$ 在 X 的每一个非空紧集上是下半连续的，$y\to\varphi(x,y)$ 在 X 上是下半连续的；

(c) $\forall A\in\mathscr{F}(x)$ 及 $\forall y\in\Gamma_A$，$\min\limits_{x\in A}\psi(x,y)\leqslant 0$；

(d) 存在一个 H-紧集 K 及 $x_0\in X$ 使 $\psi(x_0,y)>0,\forall y\in X\backslash K$，

则存在 $y\in K$ 使 $\varphi(x,y)\leqslant 0,\forall x\in X$.

证明 $\forall x\in X$，定义 $k(x)=\{y\in K:\varphi(x,y)\leqslant 0\}$，下证 $\{k(x):x\in X\}$ 具有有限交性质.

对 X 的任一有限子集 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，由于 K 是 H-紧集，故存在紧的弱 H-凸集 D，使 $K\cup A\cup\{x_0\}\subset D$.

定义 $F:D\to 2^D$，$F(x)=\{y\in D:\psi(x,y)\leqslant 0\}$.

下证 F 是 H-空间 $(D,\{\Gamma_{B\cap D}\cap D\})$ 上的 H-KKM 映射. 若不然，则存在 $B\in\mathscr{F}(D)$ 使 Γ_B

---

* 收稿日期：1996-03-06；修订日期：1998-06-08
作者简介：杨 静(1965-)，女，贵州毕节市人，硕士，贵州大学讲师.

$\cap D \not\subset \bigcup_{x\in B} F(x)$. 即存在 $y_0 \in \Gamma_B$ 且 $y_0 \in D$，但 $y_0 \notin F(x), \forall x \in B$.

于是 $\psi(x, y_0) > 0, \forall x \in B. \Rightarrow \min_{x\in B} \psi(x, y_0) > 0$，这与条件(c)矛盾. 故 F 是 H-空间$(D, \{\Gamma_{B\cap D} \cap D\})$上的 H-KKM 映象. 由条件(b)，$F(x)$ 是 D 中闭集，而 D 为紧集，因而 $F(x)$ 是 D 中紧集，由文献[2]知 $\bigcap_{x\in D} F(x) \neq \varnothing$. 故存在 $\bar{y} \in \bigcap_{x\in D} F(x) \subset D$.

① $\bar{y} \in F(x_0) \subset K$，若 $y \notin K$，则由(d)知 $\psi(x_0, y) > 0 \Rightarrow y \notin F(x_0)$.

② $\bar{y} \in F(x), \forall x \in A$. 即 $\psi(x, \bar{y}) \leqslant 0, \forall x \in A. \Rightarrow \varphi(x, \bar{y}) \leqslant 0, \forall x \in A$. 故 $\bar{y} \in k(x), \forall x \in A$.

这说明了$\{k(x): x \in X\}$具有有限交性质. 由(b)和(d)，$k(x)$是闭集，且 $k(x) \subset K \subset$ 某一个紧集中，故

$$\bigcap_{x\in X} k(x) \neq \varnothing.$$

这说明了存在 $y \in K$，使 $\varphi(x, y) \leqslant 0, \forall x \in X$.

下面的三个定理是与定理 1 等价的几何形式及极大元存在定理.

定理 2(几何形式 Ⅰ)　设$(X, \{\Gamma_A\})$是 H-空间，$B, D \subset X \times X$：

(a)　$B \subset D$；

(b)　对每一个固定的 $x \in X$，$\{y \in X: (x, y) \in D\}$紧开，$\{y \in X: (x, y) \in B\}$是开集；

(c)　$\forall A \in \mathscr{F}(X)$及$\forall y \in \Gamma_A$，$\exists x \in A$，使$(x, y) \notin D$；

(d)　存在一个 H-紧集 K 及 $x_0 \in X$ 使

$$(x_0, y) \in D, \quad \forall y \in X/K,$$

则存在 $\bar{y} \in K$，使$\{x \in X: (x, \bar{y}) \in B\} = \varnothing$.

定理 3(几何形式 Ⅱ)　设$(X, \{\Gamma_A\})$是 H-空间，$M, N \subset X \times X$：

(1)　$N \subset M$；

(2)　对每一个固定的 $x \in X$，$\{y \in X: (x, y) \in N\}$紧闭，$\{y \in X: (x, y) \in M\}$是闭集；

(3)　$\forall A \in \mathscr{F}(X)$及$\forall y \in \Gamma_A$，$\exists x \in A$　$(x, y) \in N$；

(4)　存在一个 H-紧集 K 及 $x_0 \in X$ 使

$$(x_0, y) \notin N, \quad \forall y \in X/K,$$

则存在 $\bar{y} \in K$，使 $X \times \{\bar{y}\} \subset M$.

定理 4(极大元存在定理)　设$(X, \{\Gamma_A\})$是一个 H-空间，$P, Q: X \to 2^X$，

(a)　$\forall x \in X$，$P(x) \subset Q(x)$；

(b)　$\forall x \in X$，$P^{-1}(x)$是开集，$Q^{-1}(x)$是紧开集；

(c)　$\forall A \in \mathscr{F}(X)$及$\forall y \in \Gamma_A$，$\exists x \in A$，使 $x \notin Q(y)$；

(d)　存在一个 H-紧集 K 及 $x_0 \in K$ 使 $X/K \subset Q^{-1}(x_0)$，

则存在 $\bar{y} \in K$ 使 $P(\bar{y}) = \varnothing$.

由定理 1 证明几何形式 Ⅰ，只需定义 $\psi, \varphi: X \times X \to \mathbf{R}$ 如下：

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$$

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in B, \\ 0, & (x, y) \notin B. \end{cases}$$

反之，由几何形式Ⅰ证明定理1，只需定义 $B,D\subset X\times X$ 如下即可：

$$B=\{(x,y):\varphi(x,y)>0\},\ D=\{(x,y):\psi(x,y)>0\}.$$

由几何形式Ⅰ证明几何形式Ⅱ，令 $B=X\times X\backslash M$，$D=X\times X\backslash N$ 即可. 由几何形式Ⅱ证明几何形式Ⅰ，令 $M=X\times X\backslash B$，$N=X\times X\backslash D$ 即可.

由几何形式Ⅱ证明极大元存在定理，只需令 $N=\{(x,y):x\notin Q(y)\}$，$M=\{(x,y):x\notin P(y)\}$即可. 而由极大元存在定理证明几何形式Ⅱ，定义 $P,Q:X\to 2^X$：$P(y)=\{x\in X:(x,y)\notin M\}$，$Q(y)=\{x\in X:(x,y)\notin N\}$，即可得证.

用引理的观点，从定理1可得如下定理.

定理 5 设 $(X,\{\Gamma_A\})$ 是一 H-空间，$\varphi,\psi:X\times X\to R\cup\{-\infty,+\infty\}$ 满足

(a) $\varphi(x,y)\leqslant\psi(x,y)$，$\forall\ (x,y)\in X\times X$；$\psi(x,x)\leqslant 0$，$\forall\ x\in X$；

(b) 对每一个固定的 $x\in X$，$y\to\psi(x,y)$ 在 X 的每个非空紧集上是下半连续的；$y\to\varphi(x,y)$ 在 X 上是下半连续的；

(c) $\forall\ y\in X$，集 $\{x\in X:\psi(x,y)>0\}$ 是 H-凸集；

(d) 存在 H-紧集 K 及 $x_0\in X$ 使 $\psi(x_0,y)>0$，$\forall\ y\in X\backslash K$，

则存在 $y\in K$，$\varphi(x,y)\leqslant 0$，$\forall\ x\in X$.

下面的两个不动点定理与定理5是等价的.

定理 6(不动点定理Ⅰ) 设 $(X,\{\Gamma_A\})$ 是一 H-空间，$P,Q:X\to 2^X$

(a) $\forall\ x\in X$，$P(x)\subset Q(x)$；

(b) $\forall\ x\in X$，$P^{-1}(x)$ 是开集，$Q^{-1}(x)$ 是紧开集；

(c) $\forall\ y\in X$，$Q(y)$ 是 H-凸集；

(d) $\forall\ y\in K$，$P(y)\neq\varnothing$；

(e) 存在 H-紧集 K 及 $x_0\in X$，使 $X\backslash K\subset Q^{-1}(x_0)$，则存在 $\bar{y}\in K$，使 $\bar{y}\in Q(\bar{y})$.

定理 7(不动点定理Ⅱ) 设 $(X,\{\Gamma_A\})$ 是 H-空间，$Q:X\to 2^X$ 满足

(1) $\forall\ x\in X$，$Q(x)$ 是 H-凸集；

(2) $\forall\ y\in X$，$Q^{-1}(y)$ 紧开且 $Q^{-1}(y)$ 包含 X 中一个开集 O_y(可能是空集)；

(3) 存在 H-紧集 K 和 $x_0\in X$ 使 $x_0\in Q(y)$，$\forall\ y\in X\backslash K$ 且 $K\subset\bigcup\limits_{y\in X}O_y$，则存在 $\bar{y}\in X$，使 $\bar{y}\in Q(\bar{y})$.

定理5与不动点定理Ⅰ的等价性证明均用反证法，由定理5证明不动点定理Ⅰ只需令 $\varphi,\psi:X\times X\to\mathbf{R}$ 如下：

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}1, & x\in P(y),\\ 0, & x\notin P(y),\end{cases}$$

$$\psi(x,y)=\begin{cases}1, & x\in Q(y),\\ 0, & x\notin Q(y).\end{cases}$$

由不动点定理Ⅰ证明定理5只需定义 $P,Q:X\to 2^X$ 如下：

$$P(y)=\{x\in X:\varphi(x,y)>0\},\quad Q(y)=\{x\in X:\psi(x,y)>0\}.$$

由不动点定理Ⅰ证明不动点定理Ⅱ，定义 $P:X\to 2^X$ 如下：$P(x)=\{y\in X;x\in O_y\}$，而由不动点定理Ⅱ证明不动点定理Ⅰ，只需对 $\forall\ y\in X$，令 $O_y=P^{-1}(y)\subset Q^{-1}(y)$ 即可.

参考文献：

[1] CHANG Shih-sen and ZHANG Ying. *Generalized KKM theorem and variational inequalities* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1991, **158**: 10—25.

[2] CHANG Shih-sen and MA Yi-hai. *Generalized KKM theorem on H-space with applications* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1992, **163**(2): 406—421.

[3] Tan Kok keong and YUAN Xian-zhi. *A minimax inequality with applications on existence of equilibrium points* [J]. Bull. Aust. Math. Soc., 1993, 47.

[4] TARAFDAR E. *Fixed point theorems in H-space and equilibrium points of abstract economies* [J]. J. Austral. Math. Soc. Cseries A, 1992, **153**: 252—260.

[5] TARAFDAR E. *On two theorems concerning sets with convex sections* [J]. Bull. Austral. Math. Soc., 1988, **38**: 397—400.

[6] 俞 建. Ky Fan 不等式的进一步推广(Ⅱ)[J]. 贵州大学学报, 1994, **2**(1): 25—29.

[7] 张石生. 变分不等式和相补问题的理论及应用 [M]. 上海科学文献出版社.

[8] Ky Fan. *A Minimax Inequality and Applications. Inequalities* Ⅲ [M]. Ed. O. Shisha, Academic Press, 1972, 103—113.

[9] 杨 静. Ky Fan 极大极小不等式在H-空间的进一步推广及应用(Ⅰ)[J]. 贵州大学学报, 1995, 1: 30—35.

Further Generalizations of Ky Fan's Minimax Inequality on *H*-Space with Applications

YANG Jing

(Dept. of Comp. Sci., Guizhou University, 550025)

Abstract: In this paper, new minimax inequalities are obtained on *H*-space, and also obtained their equivalent forms, geometric forms and existence theorem of maximal element. As applications of these theorems, we deduce some fixed point theorems.

Key words: minimax inequality; maximal element; fixed point.