第 23 卷第 3 期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 23 No. 3
2003 年 8 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 2003

# 矩阵的正交扩充与多正交小波*

杨守志[1]，　申培萍[2]，　杨建伟[2]

(1. 汕头大学数学系，广东 汕头 515063；2. 西安交通大学理学院，陕西 西安 710049)

**摘　要**：给出一种由 $a$ 尺度紧支撑正交多尺度函数构造短支撑正交多小波的方法. 其过程仅仅应用矩阵的正交扩充和求解方程组. 如果 $r$ 重尺度函数的支撑区间较大，可以将其转化为 $ar$ 重短支撑情形，从而使得本文的方法适用于任意紧支撑正交多小波的构造. 文后给出多小波的构造算例.

**关键词**：紧支撑函数；多尺度函数；正交多小波；两尺度矩阵方程；两尺度矩阵符号；两尺度矩阵序列.

**分类号**：AMS(2000) 42C40,94A12/CLC number：O174.2

**文献标识码**：A　　　　**文章编号**：1000-341X(2003)03-0525-10

## 1　问题的提出

近年来，多小波理论的研究已引起很多人的关注[1-5]. 特别是对 $a$ 尺度小波理论的研究. 在小波的构造过程中，通常要分为两步，第 1 步当然是尺度函数的构造，第 2 步是根据尺度函数构造出相应的小波. 众所周知，2 尺度单一小波已相当成熟，特别是在小波的构造方面，I. Daubechies[6] 得到非常完美的公式：设 $\varphi(x)=\sum_{k\in Z}p_k\varphi(2x-k)$ 是正交的单一尺度函数，则相应的单一正交小波容易写出

$$\psi(x)=\sum_{k\in Z}p_{1-k}\varphi(2x-k).$$

而对于 $a$ 尺度紧支撑多小波的构造到目前为止尚没有一般的构造方法. 也有一些文献试图解决这一问题，如[7]，[8] 应用仿酉矩阵的扩充的方法来构造相应的多小波，但由于被扩充矩阵的元素均为定义在复数域上的罗朗多项式，使得扩充过程相当复杂. 寻找构造多小波的一般方法是小波理论研究与实际应用的需要. 本文给出一种由 $a$ 尺度紧支撑正交多尺度函数构造短支撑正交多小波的方法. 由于在整个过程仅仅需要进行矩阵的正交扩充和求解方程组，它使得 $a$ 尺度多小波的构造变得容易. 如果 $r$ 重尺度函数的支撑区间较大，我们也可以将其转化为 $ar$ 重短支撑情形，从而使得本文的方法适用于任意紧支撑正交多小波的构造. 最后也给出多小

* 收稿日期：2000-11-24
基金项目：河南省自然科学基金(984051900)和河南省教委自然科学基金(98110015)资助项目.
作者简介：杨守志 (1963- )，男，博士，副教授.

波的构造算例.

## 2 预备知识

为了构造多小波,首先必须构造多重尺度函数. 设 $\Phi(x)=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_r)^T,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_r\in L^2(R)$,满足如下的两尺度矩阵方程:

$$\Phi(x)=\sum_{k=0}^{M}P_k\{\Phi\}(ax-k), \tag{1}$$

称 $r\times r$ 矩阵序列 $\{P_k\}_{k\in Z}$ 为两尺度矩阵序列,称 $\Phi(x)$ 是 $a$ 尺度 $r$ 重尺度函数.

对(1)式两边实施 Fourier 变换得:

$$\hat{\Phi}(w)=P(z)\hat{\Phi}(\frac{w}{a}),\quad z=e^{-\frac{iw}{a}}, \tag{2}$$

其中

$$P(z)=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{M}P_k z^k,\quad z=e^{-\frac{iw}{a}} \tag{3}$$

称为两尺度矩阵符号.

定义一个子空间序列 $V_j\subset L^2(R)$ 为

$$V_j=\mathrm{clos}_{L^2(R)}\langle\varphi_{l,j,k}:\ 1\leqslant l\leqslant r,\ k\in Z\rangle,\quad j\in Z \tag{4}$$

对任意 $f_l\in L^2$,这里及本文的其它地方,使用记号 $f_{l,j,k}=a^{j/2}f_l(a^jx-k)$.

称(1)式的 $\Phi(x)$ 生成一个多分辨分析 $\{V_j\}_{j\in Z}$,如果(4)式定义的子空间 $\{V_j\}_{j\in Z}$ 满足:

(1) $\cdots\subset V_0\subset V_1\subset V_2\cdots$;

(2) $\mathrm{clos}_{L^2(R)}(\bigcup_{j\in Z}V_j)=L^2(R)$;

(3) $\bigcap_{j\in Z}V_j=\{0\}$;

(4) $f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(ax)\in V_{j+1},\ j\in Z$;

(5) $\{\varphi_{l,j,k}:1\leqslant l\leqslant r,\ k\in Z\}$ 构成 $V_j$ 的一个 Riesz 基.

定义 $W_j,j\in Z$ 是 $V_j$ 在 $V_{j+1}$ 中的正交补空间,向量函数 $\Psi(x)=(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{(a-1)r})^T,\psi_l\in L^2,\ l=1,2,\cdots,(a-1)r$,其整数平移生成 $W_j$ 的一个 Riesz 基,即

$$W_j=\mathrm{clos}_{L^2(R)}\langle\psi_{l,j,k}:\ 1\leqslant l\leqslant(a-1)r,\ k\in Z\rangle,\ j\in Z. \tag{5}$$

由于 $\psi_1(x),\psi_2(x),\cdots,\psi_{(a-1)r}(x)\in W_0\subset V_1$,因此存在 $r\times(a-1)r$ 矩阵序列 $\{Q_k\}_{k\in Z}$ 有

$$\Psi(x)=\sum_{k\in Z}Q_k\Phi(ax-k). \tag{6}$$

进而有

$$\hat{\Psi}(w)=Q(z)\hat{\Phi}(\frac{w}{a}), \tag{7}$$

这里

$$Q(z)=\frac{1}{a}\sum_{k\in Z}Q_k z^k. \tag{8}$$

设 $\Lambda(x)$ 是 $s\times1$ 的列向量函数,$\Gamma(x)$ 是 $h\times1$ 的列向量函数,其分量均为 $L^2(R)$ 中的函数,定义两个向量函数的内积为:

$$\langle \Lambda,\Gamma \rangle = \int_R \Lambda(x)\Gamma(x)^T \mathrm{d}x. \tag{9}$$

称 $\Phi(x)=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_r)^T$ 是 $a$ 尺度正交的多尺度函数，如果它满足

$$\langle \Phi(\cdot),\Phi(\cdot-n)\rangle = \delta_{0,n}I_r,\quad n\in Z. \tag{10}$$

称 $\Psi(x)=(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{(a-1)r})^T$ 是相应于 $\Phi$ 的正交小波函数，如果满足

$$\langle \Phi(\cdot),\Psi(\cdot-n)\rangle = \langle \Psi(\cdot),\Phi(\cdot-n)\rangle = O, \tag{11}$$

$$\langle \Psi(\cdot),\Psi(\cdot-n)\rangle = \delta_{0,n}I_{(a-1)r},\quad n\in Z, \tag{12}$$

这里 $O$ 是 $r\times(a-1)r$ 阶零矩阵，$I_{(a-1)r}$是$(a-1)r$ 阶单位矩阵.

引理 1[2]　设 $\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r)^T,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r\in L^2$. 则$\{\eta_l(x-k):1\leqslant l\leqslant r,k\in Z\}$是一个正交族的充分必要条件是

$$\sum_{k\in Z}\hat{\eta}(w+2k\pi)\hat{\eta}(w+2k\pi)^* = I_r,\quad |z|=1, \tag{13}$$

这里及以后，我们用“$*$”表示共轭转置.

## 3　$a$ 尺度正交多小波的构造

**定理 1**　设 $\Phi(x)$是 $a$ 尺度 $r$ 重正交尺度函数，$P(z)$是(3)式定义的两尺度符号，$\omega_j,j=1,2,\cdots,a$ 为 $z^a-1=0$ 的 $a$ 个根，则

$$\sum_{j=1}^{a}P(\omega_jz)P(\omega_jz)^* = I_r,\quad |z|=1. \tag{14}$$

上式等价于两尺度矩阵序列$\{P_k\}$满足

$$\sum_{i\in Z}P_iP_{i+ak}^* = a\delta_{0,k}I_r,\quad |z|=1. \tag{15}$$

假设 $\Psi(x)=(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{(a-1)r})^T$ 是对应于 $\Phi$ 的正交多小波，$Q(z)$是(8)式定义的符号函数，则

$$\sum_{j=1}^{a}P(\omega_jz)Q(\omega_jz)^* = O, \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{a}Q(\omega_jz)Q(\omega_jz)^* = I_{(a-1)r}. \tag{17}$$

(16),(17)两式也等价于

$$\sum_{i\in Z}P_iQ_{i+ak}^T = O, \tag{18}$$

$$\sum_{i\in Z}Q_iQ_{i+ak}^T = a\delta_{0,k}I_{(a-1)r}. \tag{19}$$

应用(2)及(13)两式即可证明定理 1，这里省略.

定义矩阵 $M_{P,Q}(z)$为

$$M_{P,Q}(z)M_{P,Q}(z)^* = \begin{bmatrix} P(\omega_1z) & P(\omega_2z) & \cdots & P(\omega_az) \\ Q(\omega_1z) & Q(\omega_2z) & \cdots & Q(\omega_az) \end{bmatrix}, \tag{20}$$

则(14),(16)和(17)式等价于下列一个等式

$$M_{P,Q}(z)M_{P,Q}(z)^* = I_{ar},\quad |z|=1. \tag{21}$$

**引理 2** 设 $\Phi(x)=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_r)^T$ 是紧支撑 $a$ 尺度 $r$ 重正交尺度函数，满足方程(1)；设 $\Phi'(x)=(\Phi(ax)^T,\ \Phi(ax-1)^T,\cdots,\Phi(ax-a+1)^T)^T$，则

(1) $\Phi'(x)$是一个重数为 $ar$ 的 $a$ 尺度正交尺度函数，且 $\mathrm{supp}\Phi'(x)\subset[0,\lceil\frac{M}{a}\rceil]$，这里

$$\lceil x\rceil=\inf\{n;n\geqslant x,n\in Z\};$$

(2) $\Phi'(x)$具有如下的两尺度矩阵方程：

$$\Phi'(x)=\sum_{k=0}^{\lceil\frac{M}{a}\rceil}\begin{bmatrix} P_{ak} & P_{ak+1} & \cdots & P_{ak+a-1} \\ P_{ak-a} & P_{ak-a+1} & \cdots & P_{ak-a+a-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{ak-(a-1)a} & P_{ak-(a-1)a+1} & \cdots & P_{ak-(a-1)a+a-1}\end{bmatrix}\Phi'(ax-k). \tag{23}$$

**证明** (1) 因为 $\Phi(x)$是一个正交的尺度函数，所以有

$$\langle\Phi'(x),\Phi'(x-n)\rangle=\int_R\Phi'(x)\Phi'(x-n)^T\mathrm{d}x$$

$$=\int_R[\Phi(ax)^T,\Phi(ax-1)^T,\cdots,\Phi(ax-a+1)^T)]^T\cdot$$

$$[\Phi(ax-an)^T,\Phi(ax-an-1)^T,\cdots,\Phi(ax-an-a+1)^T)]\mathrm{d}x$$

$$=\begin{bmatrix}\langle\Phi(ax),\Phi(ax-an)\rangle & \cdots & \langle\Phi(ax),\Phi(ax-an-a+1)\rangle \\ \langle\Phi(ax-1),\Phi(ax-an)\rangle & \cdots & \langle\Phi(ax-1),\Phi(ax-an-a+1)\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle\Phi(ax-a+1),\Phi(ax-an)\rangle & \cdots & \langle\Phi(ax-a+1),\Phi(ax-an-a+1)\rangle\end{bmatrix}$$

$$=\delta_{0,n}I_{ar}.$$

(2) 根据 $\Phi'(x)$的定义，我们有

$$\Phi'(x)=\begin{bmatrix}\Phi(ax) \\ \Phi(ax-1) \\ \cdots \\ \Phi(ax-a+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{M}P_k\Phi(a^2x-k) \\ \sum_{k=0}^{M}P_k\Phi(a^2x-k-a) \\ \cdots \\ \sum_{k=0}^{M}P_k\Phi(a^2x-k-a(a-1))\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{\lceil\frac{M}{a}\rceil}P_{ak}\Phi(a^2x-ak)+\cdots+\sum_{k=0}^{\lceil\frac{M}{a}\rceil}P_{ak+a-1}\Phi(a^2x-ak-a+1) \\ \sum_{k=0}^{\lceil\frac{M}{a}\rceil}P_{ak}\Phi(a^2x-a(k+1))+\cdots+\sum_{k=0}^{\lceil\frac{M}{a}\rceil}P_{ak+a-1}\Phi(a^2x-a(k+1)-a+1) \\ \cdots \\ \sum_{k=0}^{\lceil\frac{M}{a}\rceil}P_{ak}\Phi(a^2x-ak-a^2+a)+\cdots+\sum_{k=0}^{\lceil\frac{M}{a}\rceil}P_{ak+a-1}\Phi(a^2x-ak-a^2+1)\end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lceil \frac{M}{a} \rceil} \begin{bmatrix} P_{ak} & P_{ak+1} & \cdots & P_{ak+a-1} \\ P_{ak-a} & P_{ak-a+1} & \cdots & P_{ak-a+a-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{ak-(a-1)a} & P_{ak-(a-1)a+1} & \cdots & P_{ak-(a-1)a+a-1} \end{bmatrix} \Phi'(ax-k).$$

这就完成了(23)式的证明. 再应用(23)式得到 $\mathrm{supp}\Phi'(x) \subset [0, \lceil \frac{M}{a} \rceil]$.

引理 2 说明了 $r$ 重支撑区间为$[0,M]$的 $a$ 尺度的尺度函数可以转化为 $ar$ 重支撑区间为$[0,\lceil \frac{M}{a} \rceil]$的 $a$ 尺度的尺度函数. 即可以把较长的支撑区间转化为较短的支撑区间. 为了研究的方便,也不失一般性,我们可以设两尺度矩阵方程的系数矩阵可能 $P_0, P_1, \cdots, P_{2a-1}$不为零,其余的皆为零. 下面将讨论此种情形下相应正交多小波的构造问题. 以后我们讨论的尺度函数满足下列方程:

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{2a-1} P_k \Phi(ax-k), \tag{24}$$

并设相应的小波 $\Psi(x)$满足

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{2a-1} Q_k \Phi(ax-k). \tag{25}$$

定义 $l_0 = (P_0, P_1, \cdots, P_{a-1}), l_1 = (P_a, P_{a+1}, \cdots, P_{2a-1})$,则 $\Phi(x)$是正交的尺度函数等价于

$$\sum_{m=0}^{1} l_{m+n} l_m^T = \delta_{0,n} I_r. \tag{26}$$

定义 $r \times ar$ 矩阵多项式 $L(z)$为

$$L(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{1} l_k z^k, \tag{27}$$

类似地,定义 $b_0 = (Q_0, Q_1, \cdots, Q_{a-1})$, $b_1 = (Q_a, Q_{a+1}, \cdots, Q_{2a-1})$,定义$(a-1)r \times ar$ 矩阵多项式 $B(z)$为

$$B(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{1} b_k z^k, \tag{28}$$

容易验证 $\Phi(x)$是正交的尺度函数, $\Psi(x)$是对应于 $\Phi(x)$的正交小波的充分必要条件是

$$L(z)L(\bar{z})^T = I_r,\ L(z)B(\bar{z})^T = O,\ B(z)B(\bar{z})^T = I_{(a-1)r}. \tag{29}$$

下面再定义一个 $ar \times ar$ 矩阵 $H(z)$为

$$H(z) = \begin{bmatrix} L(z) \\ B(z) \end{bmatrix}, \tag{30}$$

则(29)式也等价于

$$H(z)H(\bar{z})^T = I_{ar}. \tag{31}$$

**定理 2** 设 $H(z)$是一个 $n \times n$ 方阵,其元素均为一阶多项式,则(31)式成立的充分必要条件是

$$H(z) = H(1)(I - A + Az), \tag{32}$$

其中 $A$ 是一个 $n \times n$ 对称阵,且满足

$$A^2 = A, H(1)H(1)^T = I_{ar}.$$

**证明** 如果 $H(z)$满足(32)式,直接验证 $H(z)$是满足(31)式. 相反地,设 $H(z)$是满足

(32)式，设 $V(z)=H(1)^T H(z)$，由于 $H(1)H(1)^T=I_{ar}$，

$$V(1)=I_{(a-1)r},\tag{33}$$

$$V(z)V(\bar{z})^T=I_{(a-1)r},\tag{34}$$

从(33)式可以看出 $V(z)=(I-A+Az)$，再从(34)式得到 $A^2=A$.

根据上面的分析，要构造相应的多小波，其本质是寻找 $B(z)$，使 $H(z)H(\bar{z})^T=I_{ar}$. 而根据(32)式，$H(z)$可设为

$$H(z)=\begin{bmatrix}L(1)\\B(1)\end{bmatrix}(I-A+Az),\tag{35}$$

其中 $A$ 为待定矩阵，它必须满足

$$\begin{cases}L(z)=L(1)(I-A+Az),\\A^T=A,\end{cases}\tag{36}$$

即

$$\begin{cases}L(1)A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}l_1,\\A^T=A.\end{cases}\tag{37}$$

根据(37)式求出 $A$ 之后，则 $B(z)$可通过下式求出：

$$B(z)=B(1)(I-A+Az).\tag{38}$$

综上分析，得到构造紧支撑 $a$ 尺度正交多小波的算法：

(1) 根据(27)式构造 $L(1)$；再将 $r\times ar$ 矩阵 $L(1)$扩充为 $ar\times ar$ 的正交阵，扩充的$(a-1)r\times ar$ 矩阵块记为 $B(1)$（注：矩阵的正交扩充不是唯一的，不同的扩充可对应不同的小波）；

(2) 解方程(37)，得到矩阵 $A$；

(3) 利用(38)式求出 $B(z)$；

(4) 再根据 $B(z)$的定义求出$\{Q_k\}$，即求出相应的紧支撑 $a$ 尺度的正交多小波.

## 4 构造算例

下面将采用正交矩阵扩充方法去构造正交多小波.

例（2 尺度正交多小波的构造） 设 $\Phi(x)=(\varphi_1,\varphi_2)^T$，supp$\Phi(x)=[0,2]$是一个 3-系数的尺度函数，满足如下的方程[9]：

$$\Phi(x)=P_0\Phi(2x)+P_1\Phi(2x-1)+P_2\Phi(2x-2),$$

其中

$$P_0=\begin{bmatrix}0&\dfrac{2+\sqrt{7}}{4}\\0&\dfrac{2-\sqrt{7}}{4}\end{bmatrix},\ P_1=\begin{bmatrix}\dfrac{3}{4}&\dfrac{1}{4}\\\dfrac{1}{4}&\dfrac{3}{4}\end{bmatrix},\ P_2=\begin{bmatrix}\dfrac{2-\sqrt{7}}{4}&0\\\dfrac{2+\sqrt{7}}{4}&0\end{bmatrix}.$$

(1) 根据(27)式构造 $L(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\dfrac{2-\sqrt{7}}{4}&\dfrac{2+\sqrt{7}}{4}&\dfrac{3}{4}&\dfrac{1}{4}\\\dfrac{2+\sqrt{7}}{4}&\dfrac{2-\sqrt{7}}{4}&\dfrac{1}{4}&\dfrac{3}{4}\end{bmatrix}$；将 2×4 矩阵 $L(1)$进行

正交扩充，当然这种扩充有很多，这里仅给出两种扩充，得到扩充的矩阵块分别记为 $B^1(1)$，$B^2(1)$：

$$B^1(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{2+\sqrt{7}}{4} & -\frac{2-\sqrt{7}}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-2-\sqrt{7}}{4} & -\frac{2+\sqrt{7}}{4}\end{bmatrix}$$

$$B^2(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{20} & -\frac{4\sqrt{10}-5\sqrt{14}}{20} & -\frac{4\sqrt{10}+5\sqrt{14}}{20}\\ 0 & \frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{\sqrt{40-10\sqrt{7}}} & -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{40-10\sqrt{7}}} & -\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{14}}{\sqrt{40-10\sqrt{7}}}\end{bmatrix}.$$

(2) 利用(37)式求出 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

(3) 应用(38)式分别得到 $B^1(z)$，$B^2(z)$为：

$$B^1(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\frac{1}{4}z & \frac{3}{4} & -\frac{2+\sqrt{7}}{4} & -\frac{2-\sqrt{7}}{4}\\ \frac{3}{4}z & \frac{1}{4} & \frac{-2-\sqrt{7}}{4} & -\frac{2+\sqrt{7}}{4}\end{bmatrix},$$

$$B^2(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{10}}{10}z & \frac{3\sqrt{10}}{20} & -\frac{4\sqrt{10}-5\sqrt{14}}{20} & -\frac{4\sqrt{10}+5\sqrt{14}}{20}\\ 0 & \frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{\sqrt{40-10\sqrt{7}}} & -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{40-10\sqrt{7}}} & -\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{14}}{\sqrt{40-10\sqrt{7}}}\end{bmatrix}.$$

(4)由 $B(z)$的定义有

$$b_0^1=\begin{bmatrix}0 & \frac{3}{4} & -\frac{2+\sqrt{7}}{4} & -\frac{2-\sqrt{7}}{4}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{-2-\sqrt{7}}{4} & -\frac{2+\sqrt{7}}{4}\end{bmatrix},\ b_1^1=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0\\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$b_0^2=\begin{bmatrix}0 & \frac{3\sqrt{10}}{20} & -\frac{4\sqrt{10}-5\sqrt{14}}{20} & -\frac{4\sqrt{10}+5\sqrt{14}}{20}\\ 0 & \frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{\sqrt{40-10\sqrt{7}}} & -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{40-10\sqrt{7}}} & -\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{14}}{\sqrt{40-10\sqrt{7}}}\end{bmatrix},$$

$$b_1^2=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{10}}{10}z & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

从而有

$$Q_0^1=\begin{bmatrix}0 & \frac{3}{4}\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix},\ Q_1^1=\begin{bmatrix}-\frac{2+\sqrt{7}}{4} & -\frac{2-\sqrt{7}}{4}\\ -\frac{2-\sqrt{7}}{4} & -\frac{2+\sqrt{7}}{4}\end{bmatrix},\ Q_2^1=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ \frac{3}{4} & 0\end{bmatrix}.$$

$$Q_0^2=\begin{bmatrix}0 & \frac{3\sqrt{10}}{20}\\ 0 & \frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{\sqrt{40-10\sqrt{7}}}\end{bmatrix},\ Q_1^2=\begin{bmatrix}-\frac{4\sqrt{10}-5\sqrt{14}}{20} & -\frac{4\sqrt{10}+5\sqrt{14}}{20}\\ -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{40-10\sqrt{7}}} & \frac{4\sqrt{2}-\sqrt{14}}{\sqrt{40-10\sqrt{7}}}\end{bmatrix},$$

$$Q_2^2=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{10}}{10} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

因此便得到正交多尺度函数 $\Phi(x)$ 所对应的两种不同的正交多小波分别为：

$$\Psi^i(x)=\sum_{k=0}^{2}Q_k^i\Phi(2x-k),\quad i=1,2.$$

下面给出例中的尺度函数及小波的图形.

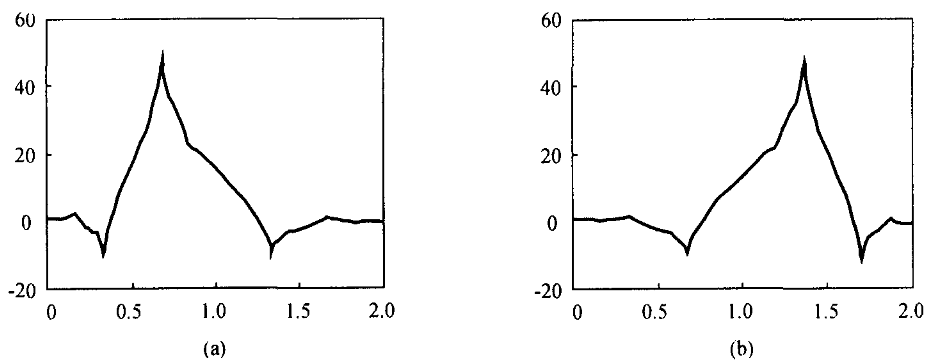



图 1　尺度函数的图形(a)：$\varphi_1(x)$，(b)：$\varphi_2(x)$

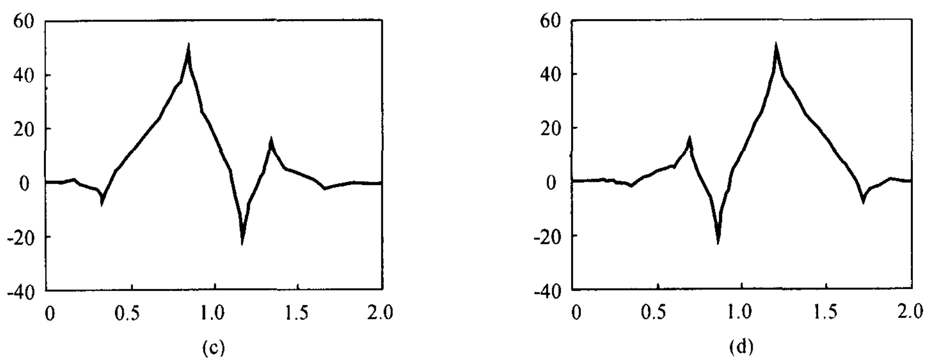
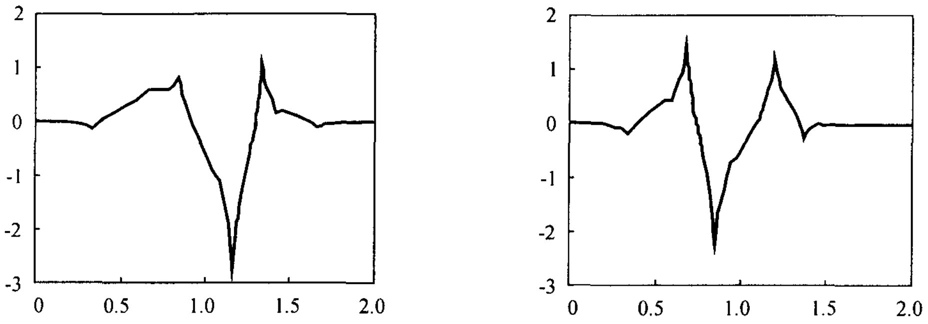



图 2　小波函数的图形(b)：$\psi_1^1(x)$，(d)：$\psi_2^1(x)$




(e)　　　　　　　　(f)

图 3　小波函数的图形(c)：$\psi_1^2(x)$，　(d)：$\psi_2^2(x)$

从图 2 和图 3 可以看出这两种小波是完全不同的，但它都是对应于同一正交多尺度函数 $\Phi(x)$ 的正交多小波.

## 参考文献：

[1]　CHUI C K, LIAN J. *A study on orthonormal multiwavelets* [J]. J. Appl. Numer. Math., 1996, **20** (3): 273—298.

[2]　GOODMAN T N T, LEE S L. *Wavelets of multiplicity r* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1994, **342**: 307—324.

[3]　LIAN J. *Orthogonality criteria for multiscaling functions* [J]. Appl. Comput. Harmon. Anal., 1998, **5**(3): 277—311.

[4]　杨守志，杨晓忠. 紧支撑正交对称与反对称小波的构造 [J]. 计算数学，2000，**22**(3)：333—338.
YANG Shou-zhi, YANG Xiao-zhong. *Construction of compactly supported symmetric and antisymmetric orthonormal wavelets* [J]. Mathematica Numerica Sinica, 2000, **22**(3): 333—338. (in Chinese)

[5]　YANG Shou-zhi, CHENG Zheng-xing, WANG Hong-yong. *Construction of biorthogonal multiwavelets* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2002, **276**(1): 1—12.

[6]　DAUBECHIE I. *Orthoronmal bases of compactly supported wavelets* [J]. Comm. Pure. Appl. Math., 1998, **41**: 909—996.

[7]　LAWTON W, LEE S L, SHEN Z. *An algorithm for matrix extension and wavelet construction* [J]. Math. Comp., 1996, **65**: 723—737.

[8]　GOH S S, YAP V B. *Matrix extension and biorthogonal multiwavelets construction* [J]. Linear Algebra Appl., 1998, **269**:139—157.

[9]　STRELA V, HELLER P N, STRANG G, et al. *The application of multiwavelet filterbanks to image processing* [J]. IEEE Trans. Image. Process., 1999, **8**: 548—563.

# Matrix Orthogonal Extension and Orthogonal Multiwavelets with Scale = a

YANG Shou-zhi[1], SHEN Pei-ping[2], YANG Jian-wei[2]
(1. Dept. of Math., Shantou University, Guangdong 515063, China;
2. Dept. of Math., Xi'an Jiaotong University, Shaanxi 710049, China)

**Abstract**: There are perfect formulas for the constructions of orthogonal uni-wavelet with scale=2. However, as yet there has not been a general method to obtain orthogonal multiwavelets with scale=a ( $a \in Z$, $a \geqslant 2$ ). In this paper, we will give an approach for constructing compactly supported orthogonal multiwavelets with scale=a, which makes construction of orthogonal multiwavelets easy like in the construction of orthogonal uni-wavelet. Finally, an example for construction multiwavelets is given.

**Key words**: compactly supported function; multiscaling function; orthogonal multiwavelets; two-scale matrix equation; two-scale matrix sequence; two-scale matrix symbol.