第16卷第3期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 16 No. 3
1996年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1996

给定极点的有理函数插值序列的收敛性*

朱来义　　高世臣
(中国人民大学信息系, 北京100872)　(中国地质大学, 北京100023)

摘　要　设$\Gamma\in C(1,\alpha)$, $\alpha>0$. G是复平面上以Γ为边界的有界单连通区域. 本文考虑了极点位于$\overline{G}$外部, 以广义Faber-Džrbašjan有理函数的零点为插值结点的Lagrange插值有理函数序列对$A(\overline{G})$和$E^q(G)$ $(1<q<+\infty)$中函数的一致逼近和平均逼近阶的估计.

关键词　广义Faber-Džrbašjan有理函数系, Lagrange插值有理函数, 一致逼近, 平均逼近

分类号　AMS(1991) 30C15/CCL O174.42

设Γ是复平面上可求长的Jordan闭曲线, 其参数方程为$z=z(s)$, s为弧长, 称曲线Γ属于类$C(p,\alpha)$, 这里$p\geq 0$为整数, $0<\alpha<1$, 若$z(s)$连续可微p次, 且$z^{(p)}(s)\in \mathrm{Lip}\alpha$.

设D是Γ外部含有∞点的单连通区域, G为Γ的内部, $w=\Phi(z)$是将D保形映射到单位圆外部$|w|>1$的映射函数, 满足

$$\Phi(\infty)=\infty,\quad \Phi'(\infty)=\lim_{z\to\infty}\frac{\Phi(z)}{z}=\gamma>0,$$

并且设$z=\Psi(w)$为其逆映射.

用$A(\overline{G})$表示在G内解析, 在$\overline{G}$上连续的函数全体. $E^q(G)$ $(0<q<+\infty)$表示在G中解析且满足$\frac{1}{2\pi}\int|f(z)|^q|dz|<+\infty$的函数$f(z)$的全体. $W^{(p)}H^{(\alpha)}(\overline{D})$表示在$D$内解析, 在$\overline{D}$上连续可微$p$次, 且其$p$阶导函数在$\overline{D}$上满足$\alpha$阶Lipschitz条件的函数全体.

由文献[1], 知道$\Gamma\in C(p,\alpha)$, 则映射函数$W=\Phi(z)$和$z=\Psi(w)$分别属于$W^{(p)}H^{(\alpha)}(\overline{D})$和$W^{(p)}H^{(\alpha)}(|W|\geq 1)$.

设$\{b_k\}_{k=0}^{\infty}\subset D$, $g(z)\in W^{(p)}H^{(\alpha)}(\overline{D})$, 且$g(z)\neq 0$, $z\in\overline{D}$, 令

$$\alpha_k=\frac{1}{\Phi(b_k)},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

则关于$\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$的Malmquist系$\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$定义如下

$$\varphi_0(z)=\frac{\sqrt{1-|\alpha_0|^2}}{1-\overline{\alpha}_0 z}$$

* 1993年2月25日收到. 96年3月16日收到修改稿. 国家自然科学基金资助课题.

$$\varphi_n(z)=\frac{\sqrt{1-|\alpha_n|^2}}{1-\bar{\alpha}_n z}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha_k-z}{1-\bar{\alpha}_k z}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k},\quad n=1,2,\cdots.$$

设$M_n(z)$为$g(z)\varphi_n[\Phi(z)]$在Γ外部$\{b_k\}_{k=0}^n$的某个邻域外的Laurent展式的主部,则$M_n(z)$是形如$M_n(z)=\dfrac{Q_n(z)}{\prod_{k=0}^n(z-b_k)}$的有理函数.其中$Q_n(z)$是次数$\leq n$的多项式.

函数系$\{M_n(z)\}$就是相应于G,极点为$\{b_k\}$的广义Faber-Džrbašjan有理函数系.

令$E_n(z)=M_n(z)-g(z)\varphi_n[\Phi(z)]$,则$E_n(z)$在$D$内解析,且$E_n(\infty)=0$,

$$M_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{g(\xi)\varphi_n[\Phi(\xi)]}{\xi-z}d\xi,\quad z\in G,$$
$$E_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{g(\xi)\varphi_n[\Phi(\xi)]}{\xi-z}d\xi,\quad z\in D.$$

由文献[2]可知$M_n(z)$在$\bar{D}$上有如下渐近等式.

定理Z[2] 设$\Gamma\in C(p+1,\alpha),p\geq 0$为整数,$0<\alpha<1,g(z)\in W^{(p)}H^{(\alpha)}(\bar{D})$,且$g(z)$在$\bar{D}$上异于零,$\{b_k\}\subset D$满足条件

$$|\Phi(b_k)|\geq\rho>1,\qquad(*)$$

则极点位于$\{b_k\}$,关于区域G及权函数$g(z)$的广义Faber-Džrbašjan有理函数$M_n(z)$有如下渐近式

$$M_n(z)=g(z)\varphi_n[\Phi(z)][1+O(n^{-p-\alpha}\ln n)],\quad z\in\bar{D}.$$

由此可知,当$g(z)$在$\bar{D}$上异于零时,$M_n(z)$的零点位于G内,且在G内有n个零点,记为$\{z_k^{(n)}\}_{k=1}^n(\{z_k^{(n)}\}\subset G)$.

在文献[3],[4]中,考虑了函数类$A(|z|\leq 1)$中的函数,被具有给定极点的有理函数插值时,其插值有理函数序列在$|z|\leq 1$上的一致收敛性及其在$L^q(|z|=1)(0<q<+\infty)$中的平均收敛性问题,其中的插值结点都位于$|z|=1$上,因而对于在边界上的某些点可能不存在边界值的H^q类函数就有局限.

在定理Z的条件下,设$M_{n+1}(z)$的零点为$\{z_k^{(n+1)}\}_{k=0}^n,f(z)\in E^q(G)(0<q<+\infty),L_n(f,z)$为极点是$\{b_k\}_{k=0}^{n+1}$,以$\{z_k^{(n+1)}\}_{k=0}^n$为插值结点的$f(z)$的Lagrange插值有理函数,则由Hermite插值公式有

$$f(z)-L_n(f,z)=\frac{M_{n+1}(z)}{2\pi i}\int\frac{f(\xi)}{M_{n+1}(\xi)(\xi-z)}d\xi,\quad z\in G.$$

本文考虑$f(z)\in E^q(G)(1<q<+\infty)$和$f(z)\in A(\bar{G})$被$L_n(f,z)$逼近的平均逼近阶和一致逼近阶的估计.主要结果为

定理1 设$\Gamma\in C(1,\alpha),0<\alpha<1,g(z)$在$D$内解析,在$\bar{D}$上异于零,且属于Lip$\alpha$,$\{b_k\}\subset D$满足条件$(*)$,则对任何$f(z)\in A(\bar{G})$,有

$$|f(z)-L_n(f,z)|=O(\omega(f,\frac{1}{n})\ln n),\quad z\in\bar{G},$$

其中$\omega(f,\delta)$是$f(z)$在$\bar{G}$中的连续模.

定理2 在定理1的条件下,对任何$f(z)\in A(\bar{G}),0<q<+\infty$,有

$$\left\{\int\left|f(z)-L_n(f,z)\right|^q\left|dx\right|\right\}^{\frac{1}{q}}=O\left(\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)\right),$$

其中 $\omega(f,\delta)$ 是 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 中的连续模

定理 3 在定理 1 的条件下, 对任何 $f(z)\in E^q(G)$, $1<q<+\infty$, 有

$$\left\{\int\left|f(z)-L_n(f,z)\right|^q\left|dz\right|\right\}^{\frac{1}{q}}=O\left[\omega\left(f\circ\Psi,\frac{1}{n}\right)_q\right],$$

其中 $\omega(f\circ\Psi,\delta)_q$ 是 $f[\Psi(w)]$ 在 $|w|=1$ 上的平均连续模

参 考 文 献

[1] I N. Vekua, *Generalized Analytic Functions* (*Russisch*), Moskau Fizmatgiz, 1959.

[2] 朱来义, 给定极点的曲线上加权正交有理函数, 数学学报, 36: 5(1993), 633—643.

[3] 沈燮昌, 单位圆上有理函数插值序列的收敛性, 数学学报, 34(1991), 851—857.

[4] 沈燮昌, 有理函数序列的平均收敛性, 数学学报, 35(1992), 73—84.

On Convergence of the Interpolation Sequence of Rational Functions with Preassigned Poles

Zhu Laiyi (People's University of China, Beijing 100872)

Gao Shichen (Geology University of China, Beijing 100083)

Abstract

Let G be a bounded simply connected domain in the complex plan with boundary $\partial G=\Gamma\in C(1,\alpha)$, $0<\alpha<1$. In this paper we estimate the uniform and mean approximation orders of functions in $A(\overline{G})$ and $E_q(G)$ $(1<q<+\infty)$ by their Lagrange interpolation rational functions based on the zeros of the generalized Faber-Ďzrbašjan rational functions with preassigned poles in the exterior of $\overline{G}$.

Keywords generalized Faber-Ďzrbašjan rational functions, Lagrange interpolation rational functions, uniform approximation, mean approximation.