第16卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 16 No. 3
1996年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1996

常系数线性微分方程RMI解题机*

王建东　　朱梧槚
(南京航空航天大学计算机科学与工程系, 210016
南京大学计算机软件国家重点实验室, 210093)

肖奚安　　徐利治
(空军气象学院数学教研室)　(大连理工大学数学科学研究所, 116023)

摘　要　本文介绍的常系数线性微分方程解题机是利用数学方法论的研究成果, 摸拟人的数学思维过程, 采用关系映射反演(RMI)方法, 通过符号推理给出微分方程解析解的数学软件. 文中介绍了研制该解题机的基本思想和实现技术, 并给出了用解题机求解微分方程和微分方程组的几个实例.

关键词　解题机, 微分方程, 关系映射反演
分类号　AMS(1991) 00A35

一　引　言

目前已有很多计算机程序应用数值解法来给出微分方程的数值解, 但能求出微分方程精确的解析解的工具则很少见. 已有的少数能解微分方程的软件也只能解很少一部分可解的微分方程. 这是因为解微分方程本来就没有普遍适用的程序, 只能对一些特殊类型的方程使用一些特殊的解法.

在工程技术领域中遇到的许多问题是常微分方程的初值问题, 如果能有一种解微分方程初值问题的有力的工具, 无疑会给工程技术人员分析实际问题、建立数学模型带来很大的方便. 80年代初由[1]提出的关系映射反演(RMI)方法是一种适用于数理科学与工程技术科学的普遍思想方法, 带有一般的原则性, 所以也叫作"RMI原则." 本文将这一方法应用到求解常微分方程的初值问题上来, 在一台带有数学协处理器的386微机上实现, 研制了解常微分方程初值问题的RMI解题机. 实验证明, 其求解常微分方程初值问题的能力明显超过著名的数学通用软件包MATHEMATICA.

二　RMI方法

假设φ是一个映射, 它把集合$A=\{\alpha\}$中的元素映入(或映满)另一集合$A^*=\{\alpha^*\}$, 其中

* 1995年3月16日收到. 国家基础研究攀登计划资助项目.

α^* 表示 α 的映象, α 称为原象 这时可记

$$\varphi: A \mid\to A^*,\ \varphi(\alpha) = \alpha^*.$$

又, 如果存在逆映射 φ^{-1}, 则 $\varphi^{-1}(\alpha^*) = \alpha$

另假设 $\Gamma = \{\theta\}$ 是一组关系或运算, 能定义在 A 的全体或部分元素之间 这样, $S = (A, \Gamma)$ 便构成一个关系结构 又设关系结构 S 中包含一个未知性状的对象 x, 它是问题中需要确定其性状的目标, 则称 x 为目标原象, 在映射 φ 作用下, $x^* = \varphi(x)$ 便称为目标映象

又设 φ 为这样的映射, 它不但把 A 映成 A^*, 而且还把 A 上的关系(或运算) 映射成 $\Gamma^* = \{\theta^*\}$. 这样, 关系结构 S 便通过 φ 映射成 $S^* = (A^*, \Gamma^*)$, 而 S^* 便称为映象关系结构(或映象系统), 它包含有目标映象 $x^* = \varphi(x)$.

当对象的性状处于未知状态时, 则在其所用以代表的字母下划一横线 于是, $\underline{x}$ 即代表未知的目标原象 相应地, $\underline{x}^* = \varphi(\underline{x})$ 即代表未知的目标映象

另外, 如果未知的目标映象 $\underline{x}^*$ 能通过确定的数学手续 ψ 从映象关系结构系统 S^* 中确定出来(即把未知的 $\underline{x}^*$ 变为已知的 x^*), 则称原来变 S 为 S^* 的映射 φ 为"可定映映射."

于是, 数学中的 RM I 方法便可陈述如下:

给定一个含有未知目标原象 $\underline{x}$ 的关系结构系统 $S = (A, \Gamma, \underline{x})$ 如果能找到一个可逆而又可定映的映射 φ, 将 S 映射成 $S^* = (A^*, \Gamma^*, \underline{x}^*)$; 则可以从 S^* 通过一定的数学手续 ψ 将未知的目标映象 $\underline{x}^* = \varphi(\underline{x})$ 确定出来, 从而再通过反演, 即逆映射 φ^{-1}, 最终便可把目标原象 $x = \varphi^{-1}(x^*)$ 确定出来, 这个过程可用框图表示为:

也可简单地记作

$$(S, \underline{x}) \xrightarrow{\varphi} (S^*, \underline{x}^*) \xrightarrow{\psi} x^* \xrightarrow{\varphi^{-1}} x.$$

概括地说, RM I 方法的全过程表现为: 关系→映射→定映→反演→得解 有关细节参见[2].

三　用 RM I 方法求解常微分方程的初值问题

微分方程有很多解法, 如积分法、分离变量法、求积分因子法、克莱洛方程法、变量代换法、皮卡儿法、积分变换法等 其中, 积分变换法的基本思想就是 RM I 方法

拉普拉斯变换是常用的求解微分方程的一种积分变换法 例如, 要求

$$y''(t) - x''(t) + x'(t) - y(t) = e^t - 2,$$
$$2y''(t) - x''(t) - 2y'(t) + x(t) = -t$$

满足初值条件 $x(0) = x'(0) = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$ 的解 在这个问题中, 目标原象为未知函数 $x(t)$ 和 $y(t)$, 原象关系结构为所给出的微分方程与初值条件 现在我们用拉氏变换作为映射 φ, 并记 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的映象为

$$\mathcal{L}(x(t)) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt = X(s),$$
$$\mathcal{L}(y(t)) = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt = Y(s).$$

为得到映象关系结构, 我们应用 $\mathcal{L}$, 即对原方程组中每个方程的两边都取拉氏变换, 并利用初值条件, 可得

$$s^2 Y(s) - s^2 X(s) + sX(s) - Y(s) = 1/(s-1) - 2/s$$
$$2s^2 Y(s) - s^2 X(s) - 2sY(s) + X(s) = -1/s^2$$

这样就把包含目标原象 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的原象关系结构映射成了包含目标映象 $X(s)$ 和 $Y(s)$ 的映象关系结构, 且由于印象关系结构是一个代数方程式, 因而很容易通过定映手续, 即解代数方程组来确定目标映象:

$$X(s) = (2s-1)/(s^2(s-1)^2),\ Y(s) = 1/(s(s-1)^2).$$

最后, 可以通过反演, 即拉氏逆变换求出

$$x(t) = -t + te^t,\ y(t) = 1 - e^t + te^t.$$

显然, 这是一种典型的 RMI 方法

四　常微分方程的 RMI 解题机

在这里, 试图在计算机上建立一个程序, 能用 RMI 方法给出一类常微分方程的解析解

首先, 从最简单、最规范的情形入手, 即构造用拉普拉斯变换求解常系数线性微分方程的初值问题的解题机 该解题机由映射机、定映机、反演机三部分组成

1　映射机

所谓映射机, 即将所要求解的微分方程通过拉普拉斯变换映射成代数方程的机制 为了完成映射, 将拉氏变换的公式及拉氏变换表放入程序之中. 当用户输入要解的微分方程及初值条件, 并指出所要求解的函数名后, 映射机即自动根据初值条件将微分方程通过拉氏变换变成代数方程, 并给出对应于原来要求解的函数在代数方程中需求解的对应的映象函数名 另外, 为简单起见, 在进行映射时假定所有的初值条件都取在自变量为 0 的那一点, 以后通过坐标平移得到原问题的真正解

由于定映手续仅限于解一般的有理代数方程, 故在程序中只要放入那些变换结果为有理分式的拉氏变换公式就行了. 当然, 未知函数各阶导数的拉氏变换形式也必须包括在其中 考虑到工程技术的一般需要, 程序中目前只包括未知函数一至四阶导数的拉氏变换的形式, 因此只能解四阶以内的微分方程 但是, 如果需要的话, 可以很容易地将其加以扩充 另外, 由于阶跃函数是工程技术中常用的函数, 映射机中特地加入了阶跃函数的拉氏变换公式

为了方便使用, 未知函数和自变量的名称都可以由用户自己任意确定

在映射机的设计中不仅要考虑对一个微分方程的两边同时进行拉氏变换的问题, 还要考虑在解联立微分方程组时对多个微分方程进行拉氏变换 因此, 程序中还解决了同样以等式形式输入的微分方程与初值条件的判别与切分的问题 这样, 在缺少部分或全部初值条件时, 解题机可以把缺少的初值条件作为待定常数而给出所要求解的未知函数的通解

2　定映机

定映机即代数方程求解机, 它对映射机所输出的代数方程进行求解, 从而得到目标映象函数的解析解

在定映机的设计中除了考虑一般的代数方程求解外, 还要考虑在上面所提到的缺少初值条件的情况下, 把所缺的初值条件作为一个任意常数放在代数方程的解中, 以便进一步求出原微分方程的通解

3　反演机

反演机中包含有拉氏逆变换表, 它接受定映机给出的目标映象函数的解, 并通过表达式的处理, 使其变成某种规范的形式 最后, 根据拉氏逆变换表, 将其变换成目标原象函数, 并输出结果

在拉氏逆变换表中, 尽量将与有理代数分式有关的变换公式通通包括进来 并考虑到各种系数可能以代数符号形式也可能以数字形式出现的种种情况 因此拉氏逆变换表要比映射机中所用的拉氏变换表大得多

因此, 反演机设计中很大一部分工作是把定映机得到的代数方程的解规范化 由于拉氏逆变换表中的代数有理分式分母的形式多是二项式的形式, 我们采用求部分分式和凑平方和、平方差等数学手续来进行规范化, 将以各种不同形式出现的代数方程的解化成统一的形式后再去查表

反演机还根据用户的输入, 把查表后得到的原函数的解以用户给定的函数和自变量的名称输出 若原给定的初值条件不是取在自变量为 0 的那一点, 在输出之前还要先进行坐标平移的变换, 以真正得到原问题的解

五、运行实例

在这里, 通过常微分方程的 RM I 解题机的两个运行实例, 来进一步说明解题机的工作过程 其中每一行分号之前是系统输入输出的信息, 分号之后是说明 解题机在实际运行时只是接受用户的输入, 通过计算后, 输出最终结果, 并不给出中间结果 这里, 为了说明其运行过程, 特意让系统输出一些中间结果

例1　求微分方程组

$$y''(t) - x''(t) + x'(t) - y(t) = e^t - 2,$$
$$2y''(t) - x''(t) - 2y'(t) + x(t) = -t$$

满足初值条件 $x(0) = x'(0) = 0,\ y(0) = y'(0) = 0$ 的解

$sD[\{y''[t] - x''[t] + x'[t] - y[t] == E\wedge t - 2,$ 　　; 输入要求解的微分方
$2y''[t] - x''[t] - 2y'[t] + x[t] == -t,$ 　　; 程和初值条件
$x[0] == 0, x'[0] == 0, y[0] == 0, y'[0] == 0\},$
$\{x, y\}, t]$ 　　; 指出要求的函数和自
; 变量名

$\{s X[s] - s^2 X[s] - Y[s] + s^2 Y[s] == \frac{1}{-1+s} - \frac{2}{s},$ 　　; 解题机对原方程组取

; 拉氏变换得到的代数

; 方程组

$\rangle \quad X[s]-s^2X[s]-2sY[s]+2s^2Y[s]==-s^{-2}$; 〉号为续行号

$\{\{X[s]->-(\frac{-s+s^2+s^3-s^4}{-s^3+s^4+4s^5-8s^6+5s^7-s^8})-$; 解题机给出代数方程

$\rangle \quad \frac{(-2+s)(-2s^3+2s^4)}{-s^3+s^4+4s^5-8s^6+5s^7-s^8}$; 组的解 $X(s), Y(S)$

$\rangle \quad Y[s]->-(\frac{-s^2+2s^3-s^4}{-3^s+s^4+4s^5-8s^6+5s^7-s^8})-$

$\rangle \quad \frac{(-2+s)(-s^2+s^4)}{-s^3+s^4+4s^5-8s^6+5s^7-s^8}\}\}$

$\{\{X[s]->(-1+s)^{-2}-s^{-2}, Y[s]->(-1+s)^{-2}-\frac{1}{-1+s}+\frac{1}{s}\}\}$; 化简 $X(s)$ 和 $Y(s)$

$\{\{x[t]->-t+E^tt, y[t]->1-E^t+E^tt\}\}$; 通过拉氏逆变换

; 求得原方程的解

例2　求4阶微分方程

$$x''''(t)+2x''(t)+x(t)=\sin(t)$$

满足初值条件 $x(0)=1,\ x'(0)=-2,\ x''(0)=3,\ x'''(0)=0$ 的解

$sD[\{x''''[t]+2x''[t]+x[t]==\sin[t], x[0]==1,$; 输入要求解的微分

$x'[0]==-2, x''[0]==3, x'''[0]==0\}, \{x\}, t]$; 方程、初值条件、

; 函数和自变量

$\{-3s+2s^2-s^3+X[s]+s^4X[s]+2(2-s+s^2X[s])==\frac{1}{1+s^2}\}$; 拉氏变换

$\{\{X[s]->(\frac{3-5s+6s^2-6s^3+2s^4-s^5}{1+3s^2+3s^4+s^6})\}\}$; 代数方程的解

$\{\{X[s]->(1+s^2)^{-3}+\frac{-2+4s}{(1+s^2)^2}+\frac{-2+s}{1+s^2}\}\}$; 化简

$\{\{X[t]->\frac{-(-8\cos[t]-5t\cos[t]+21\sin[t]-16t\sin[t]+t^2\sin[t])}{8}\}\}$; 原微分方程的解

六　讨　论

常微分方程的RMI解题机, 是研制RMI解题机的一个初步尝试. 目前首先着手建造一个用拉普拉斯变换作为映射工具解常系数线性微分方程初值问题的解题机. 在实验中, 共做了手头所有的各种数学习题集中的常系数线性微分方程(组)的习题83例, 其中解题机能求解的有80例, 解不出的有3例. 分析一下不能求解的问题, 发现, 主要是由于有的函数的拉氏变换不能表达为初等函数; 有的经过定映后得到的代数方程的解又无法用部分分式表达为简单的代数分式, 从而无法通过查表得到其拉氏逆变换即原目标函数的解. 尽管目前已有的数学问题求解软件MATHEMATICA 也能给出微分方程的精确解, 但就解常系数线性微分方程的初值问题来说, 其功能是很弱的. 在上面举的两个例子, MATHEMATICA 均解不出来. 经过初步实验, RMI解题机能解的问题中约有一半是MATHEMATICA 不能求解的. 但是另一方面, 由

于MATHEMATICA是一个通用的数学软件, 在处理许多数学问题上有很强的功能, 故而我们把RMI解题机建立在MATHEMATICA的基础之上, 使其解常系数微分方程的能力大大加强. 而工程技术中的微分方程问题有很大一部分是属于这一类的, 故这样的解题机不仅对高等院校的数学教学是一个很好的辅助工具, 而且在工程技术上也有实际应用价值.

RMI方法可用于许多数学问题的求解, 如无理函数的积分问题、三角函数有理式的积分问题、级数求和问题、图论定理证明问题等等. 正因为如此, 我们希望能在常微分方程初值问题的RMI解题机取得成功以后, 再进一步研究各种各样便于应用的RMI解题机.

参考文献

[1] 徐利治, 数学方法论选讲, 华中工学院出版社, 1983.

[2] 徐利治、郑毓信, 关系映射反演方法, 数学方法论丛书, 江苏教育出版社, 1988.

[3] F. S. Merritt 著(丁仁、陈三平译), 工程技术常用数学, 科学出版社, 1978.

[4] 朱梧槚、肖奚安, 数学方法论ABC, 辽宁教育出版社, 1986.

[5] 徐利治、朱梧槚等, 数学方法论教程, 江苏教育出版社, 1992.

[6] 朱梧槚、史久一, 化归与归纳类比联想, 江苏教育出版社, 1988.

RMI Solver for Constant Coefficient Linear Differential Equations

Wang Jiandong   Zhu Wujia

(Dept. of Computer Science & Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics
Computer Software Laboratory of Nanjing University)

Xiao Xi'an

(Division of Mathematics, Meteorological Institute of Chinese Air Force)

L. C. Hsu

(Mathematical Research Institute, Dalian University of Technology)

Abstract

This paper presents a solver for solving constant coefficient linear differential equations. The solver is a mathematical software which gives the analytic solutions of the differential equations, using the recent achievements in the research on mathematical methodology and modeling the procedure of human's mathematical thinking, through symbolic inferences with the method of relation, mapping, and inversion. The paper expounds the main idea and technique for the solver development and gives a few instances of differential equations solved by the solver.

Keywords solver, differential equation, relation-mapping-inversion.