第16卷第4期 数学研究与评论 Vol.16 No.4
1996年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1996

关于四元数矩阵迹的几个定理的注记*

刘建洲 谢清明
(湘潭大学数学系，湖南 411105)

摘 要 本文得到一个四元数矩阵的控制不等式，进而改进了[1]中的几个主要结果.

关键词 四元数矩阵，奇异值，特征值，迹.

分类号 AMS(1991) 15A/CCL O151.21

用 Ω 表四元数体，$\Omega^{n\times n}$ 表 $m\times n$ 阶四元数矩阵集. $SC_n(\Omega)$ 表 n 阶四元数自共轭矩阵集，设 $A\in SC_n(\Omega)$，$A>0(A\geqslant 0)$ 表 A 正定(半正定). 设 $q\in\Omega$，$\bar{q}$ 表其共轭四元数，记 $\mathrm{Re}(q)=\frac{1}{2}(q+\bar{q})$，$\|q\|=\sqrt{q\bar{q}}$. 设 $A=(a_{ij})\in\Omega^{n\times n}$，$\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ 表矩阵 A 的迹，$\sigma(A)$ 表 A 的奇异值. 若 $A=BC\in\Omega^{n\times n}$，其中 $B,C\in SC_n(\Omega)$，且 $B\geqslant 0$(或 $C\geqslant 0$)，由[2]知 A 的特征值为实数，用 $\lambda(A)$ 表 A 的特征值.

用 R 表实数集，$R^{m\times n}$ 表 $m\times n$ 阶实矩阵集. 设 $a_i\in R(i=1,2,\cdots,n)$ 是一组实数，在无特殊说明时，以下总设其按大小顺序排列为 $a_{[1]}\geqslant a_{[2]}\geqslant\cdots\geqslant a_{[n]}$. 设 $x,y\in R^{1\times n}$，如果它们的分量满足：$\sum_{i=1}^{k}x_{[i]}\leqslant\sum_{i=1}^{k}y_{[i]}$，$k=1,2,\cdots,n$，则称 y 弱控制 x，记 $x\prec_w y$，若还有 $\sum_{i=1}^{n}x_{[i]}=\sum_{i=1}^{n}y_{[i]}$，则称 y 控制 x，记为 $x\prec y$.

设 $x\in\Omega^{1\times n}$，记 $\|x\|=(\|x_1\|,\|x_2\|,\cdots,\|x_n\|)$，并记 $\mathscr{D}_n$ 是 Ω 上广义次双随机矩阵集[3].

一 一个控制不等式

定理1 设 $A=(a_{ij})\in\Omega^{n\times n}$，记 $a=(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$，则

$$(\mathrm{Re}a_{11},\mathrm{Re}a_{22},\cdots,\mathrm{Re}a_{nn})\prec_w\|a\|\prec_w(\sigma_1(A),\sigma_2(A),\cdots,\sigma_n(A)).\tag{1}$$

证明 左边控制不等式显然. 下证右边不等式.

设 A 的奇异值分解为 $A=UD_\sigma V^*$，其中 U,V 是 n 阶广义酉矩阵，$D_\sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1(A),\sigma_2(A),\cdots,\sigma_n(A))$，设 $P=U\circ\bar{V}=(u_{ij}\bar{v}_{ij})=(p_{ij})$，则对 $i=1,2,\cdots,n$ 有

$$a_{ii}=\sum_{j=1}^{n}u_{ij}\sigma_j(A)\bar{v}_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j(A)u_{ij}\bar{v}_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j(A)p_{ij},\tag{2}$$

* 1994年2月28日收到. 湖南省教委科研基金资助.

从而有

$$a = \left(\sum_{j=1}^{s}\sigma_j(A)u_{1j}\bar{v}_{1j}, \sum_{j=1}^{s}\sigma_j(A)u_{2j}\bar{v}_{2j}, \cdots, \sum_{j=1}^{s}\sigma_j(A)u_{sj}\bar{v}_{sj}\right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{s}\sigma_j(A)p_{1j}, \sum_{j=1}^{s}\sigma_j(A)p_{2j}, \cdots, \sum_{j=1}^{s}\sigma_j(A)p_{sj}\right) = (\sigma_1(A), \sigma_2(A), \cdots, \sigma_s(A))P'. \quad (3)$$

注意到 $P \in \mathscr{P}_s^{[3]}$，由[3，定理 1.3]有

$$\| a \| \prec_w \| (\sigma_1(A), \sigma_2(A), \cdots, \sigma_s(A)) \| = (\sigma_1(A), \sigma_2(A), \cdots, \sigma_s(A)).$$

二　一些特征值与奇异值不等式

定理 2　设 $A, B \in \Omega^{m\times n}$，则对任意自然数 $k(\leqslant \min(m,n))$ 有

$$\sum_{i=1}^{k}\sigma_{[i]}(A+B) \leqslant \sum_{i=1}^{k}(\sigma_{[i]}(A) + \sigma_{[i]}(B)). \quad (4)$$

证明　由[3，定理 3.2]有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\sigma_{[i]}(A+B) &= \max_{\substack{UU^*=VV^*=I_k \\ U\in\Omega^{k\times m}, V\in\Omega^{k\times n}}} \| \mathrm{tr}U(A+B)V^* \| \\ &= \max_{\substack{UU^*=VV^*=I_k \\ U\in\Omega^{k\times m}, V\in\Omega^{k\times n}}} \| \mathrm{tr}(UAV^*) + \mathrm{tr}(UBV^*) \| \\ &\leqslant \max_{\substack{UU^*=VV^*=I_k \\ U\in\Omega^{k\times m}, V\in\Omega^{k\times n}}} (\| \mathrm{tr}(UAV^*) \| + \| \mathrm{tr}(UBV^*) \|) \\ &\leqslant \max_{\substack{UU^*=VV^*=I_k \\ U\in\Omega^{k\times m}, V\in\Omega^{k\times n}}} \| \mathrm{tr}(UAV^*) \| + \max_{\substack{UU^*=VV^*=I_k \\ U\in\Omega^{k\times m}, V\in\Omega^{k\times n}}} \| \mathrm{tr}(UBV^*) \| \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sigma_{[i]}(A) + \sum_{i=1}^{k}\sigma_{[i]}(B).\end{aligned}$$

推论 1　设 $A_i \in \Omega^{m\times n}(i = 1,2,\cdots,l)$，则对任意自然数 $k(\leqslant \min(m,n))$ 有

$$\sum_{i=1}^{k}\sigma_{[i]}(A_1 + A_2 + \cdots + A_l) \leqslant \sum_{i=1}^{k}(\sigma_{[i]}(A_1) + \sigma_{[i]}(A_2) + \cdots + \sigma_{[i]}(A_l)]. \quad (5)$$

定理 3（加权算术 - 几何平均型不等式）　设 $A_i \in \Omega^{n\times n}(i = 1,2,\cdots,m)$，$0 < \alpha_i \in R(i = 1,2,\cdots,m)$，且 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 1$，则对任意自然数 $k(\leqslant n)$ 有

$$\sum_{i=1}^{k}\sigma_{[i]}(A_1A_2\cdots A_m) \leqslant \alpha_1\sum_{i=1}^{k}\sigma_{[i]}^{\frac{1}{\alpha_1}}(A_1) + \alpha_2\sum_{i=1}^{k}\sigma_{[i]}^{\frac{1}{\alpha_2}}(A_2) + \cdots + \alpha_m\sum_{i=1}^{k}\sigma_{[i]}^{\frac{1}{\alpha_m}}(A_m). \quad (6)$$

证明　由[3，推论 3.1]及加权算术 - 几何平均不等式立得(6).

定理 4（Hölder 型不等式）　设 $A_{ts} \in \Omega^{n\times n}(t = 1,2,\cdots,m; s = 1,2,\cdots,l)$，$0 < \alpha_s \in R(s = 1,2,\cdots,l)$，且 $\sum_{s=1}^{l}\alpha_s = 1$，则对任意自然数 $k(\leqslant n)$ 有

$$\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\sigma_{[i]}(A_{t1}A_{t2}\cdots A_{tl})$$

$$\leqslant (\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\sigma_{[i]}^{\alpha_1}(A_{t1}))^{\frac{1}{\alpha_1}}(\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\sigma_{[i]}^{\alpha_2}(A_{t2}))^{\frac{1}{\alpha_2}}\cdots(\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\sigma_{[i]}^{\alpha_l}(A_{tl}))^{\frac{1}{\alpha_l}}. \qquad (7)$$

证明 由引理 2 及 Hölder 不等式立得(7).

定理5 (Minkowski型不等式) 设 $A_{ts}\in\Omega^{n\times n}(t=1,2,\cdots,m;s=1,2,\cdots,l)$, $p>1$,则对任意自然数 $k(\leqslant n)$ 有

$$(\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\sigma_{[i]}^{p}(A_{t1}+A_{t2}+\cdots+A_{tl}))^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant (\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\sigma_{[i]}^{p}(A_{t1}))^{\frac{1}{p}}+(\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\sigma_{[i]}^{p}(A_{t2}))^{\frac{1}{p}}+\cdots+(\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\sigma_{[i]}^{p}(A_{tl}))^{\frac{1}{p}}. \qquad (8)$$

证明 由定理 2、[4,p118]及 Minkowski 不等式立得(8).

推论 2 设 $A_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$, $\alpha_i>0(i=1,2,\cdots,m)$ 且 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1$,则

$$\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(A_1A_2\cdots A_m))\leqslant\|\operatorname{tr}(A_1A_2\cdots A_m)\|\leqslant\alpha_1\operatorname{tr}(A_1^{\frac{1}{\alpha_1}})+\alpha_2\operatorname{tr}(A_2^{\frac{1}{\alpha_2}})+\cdots+\alpha_m\operatorname{tr}(A_m^{\frac{1}{\alpha_m}}). \qquad (9)$$

证明 左边不等式显然.下证右边不等式.

设 $A_1A_2\cdots A_m=(c_{ij})\in\Omega^{n\times n}$,注意到当 $A_j\geqslant 0$ 时,$\sigma_{[i]}(A_j)=\lambda_{[i]}(A_j)(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$,且 $\operatorname{tr}A_j=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A_j)$,由定理 1、定理 3 及[1] 中有关矩阵指数的定义有

$$\begin{aligned}
\|\operatorname{tr}(A_1A_2\cdots A_m)\| &= \|\sum_{i=1}^{n}c_{ii}\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|c_{ii}\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(A_1A_2\cdots A_m)\\
&\leqslant\alpha_1\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^{\frac{1}{\alpha_1}}(A_1)+\alpha_2\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^{\frac{1}{\alpha_2}}(A_2)+\cdots+\alpha_m\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^{\frac{1}{\alpha_m}}(A_m)\\
&=\alpha_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{\frac{1}{\alpha_1}}(A_1)+\alpha_2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{\frac{1}{\alpha_2}}(A_2)+\cdots+\alpha_m\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{\frac{1}{\alpha_m}}(A_m)\\
&=\alpha_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A_1^{\frac{1}{\alpha_1}})+\alpha_2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A_2^{\frac{1}{\alpha_2}})+\cdots+\alpha_m\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A_m^{\frac{1}{\alpha_m}})\\
&=\alpha_1\operatorname{tr}(A_1^{\frac{1}{\alpha_1}})+\alpha_2\operatorname{tr}(A_2^{\frac{1}{\alpha_2}})+\cdots+\alpha_m\operatorname{tr}(A_m^{\frac{1}{\alpha_m}}).
\end{aligned}$$

在(9) 中取 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_m=\frac{1}{m}$,即为[5] 中不等式在四元数矩阵中的推广.当取 $m=2$ 时即得 Young 型不等式.

类似方法可证下列结论:

推论 3 设 $A_{ts}\geqslant 0(t=1,2,\cdots,m;s=1,2,\cdots,l)$, $\alpha_s>0(s=1,2,\cdots,l)$,且 $\sum_{s=1}^{l}\alpha_s=1$,则

$$\sum_{t=1}^{m}\operatorname{Re}\operatorname{tr}(A_{t1}A_{t2}\cdots A_{tl})\leqslant(\sum_{t=1}^{m}\|\operatorname{tr}(A_{t1}A_{t2}\cdots A_{tl})\|$$
$$\leqslant(\sum_{t=1}^{m}\operatorname{tr}(A_{t1}^{\alpha_1}))^{\frac{1}{\alpha_1}}(\sum_{t=1}^{m}\operatorname{tr}(A_{t2}^{\alpha_2}))^{\frac{1}{\alpha_2}}\cdots(\sum_{t=1}^{m}\operatorname{tr}(A_{tl}^{\alpha_l}))^{\frac{1}{\alpha_l}}. \qquad (10)$$

推论 4 设 $A_{ts}\geqslant 0(t=1,2,\cdots,m;s=1,2,\cdots,l)$, $P>1$,则

$$(\sum_{t=1}^{m}\operatorname{Re}\operatorname{tr}(A_{t1}+A_{t2}+\cdots+A_{tl})^{p})^{\frac{1}{p}}\leqslant(\sum_{t=1}^{m}\|\operatorname{tr}(A_{t1}+A_{t2}+\cdots+A_{tl})^{p}\|)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant (\sum_{i=1}^{m} \mathrm{tr}(A_{i1}^{p}))^{\frac{1}{p}} + \cdots + (\sum_{i=1}^{m} \mathrm{tr}(A_{il}^{p}))^{\frac{1}{p}}. \qquad (11)$$

显然在(9)、(10)、(11)中分别取 $m=2$、$l=2$、$l=2$ 时就分别改进了[1]中定理3、定理4、定理5的结果.而且观察[1]中的证明方法知,用文[1]中方法很难将其结论推广到本文(9)、(10)、(11)的情形.

三　关于[1]中复Hermite矩阵中的结果

1. 文[1]中推论4—推论6的条件既要求所讨论矩阵可换、又要求为正定(或半正定)Hermite矩阵,其实,由[1]中定理7及本文以上讨论,[1]中推论4、推论5可去掉可换条件.

2. 文[6]中证明了如下结论:

设 A,B 是 n 阶可换矩阵,且其特征值皆为实数,则存在非异矩阵 P,使 $P^{-1}AP$,$P^{-1}BP$ 同是上(下)三角矩阵.

由此,[1]中推论4、推论5中条件又可去掉所讨论矩阵为正定(或半正定)Hermite矩阵,而改为所讨论矩阵的特征值皆为非负实数并保留可换条件即可.

参 考 文 献

[1] 张树青,关于四元数矩阵之迹的几个定理,数学研究与评论,4(1993),567—572.

[2] 曹重光,四元数自共轭半正定矩阵乘积的特征值估计,数学研究与评论,1(1990),19—22.

[3] 刘建洲,四元数体上的矩阵及其优化理论,数学学报,6(1992),831—838.

[4] A. W. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Academic Press, New York, 1979.

[5] 陈道琦,关于半正定Hermite矩阵乘积迹的一个不等式,数学学报,4(1988),565—569.

[6] 刘建洲,关于矩阵迹的算术平均-几何平均不等式,湖南教育学院学报(自),1(1984),23—25.

Notes on "Several Theorems on the Traces of Quaternions Matrices"

Liu Jianzhou　　*Xie Qingming*

(Dept. of Math., Xiangtan University, Hunan 411105)

Abstract

In this paper, we obtain a majorization inequality of quaternion matrix, this improves some main resutls in [1].

Keywords　quaternion matrices, signular value, eigenvalue, trace.