数 学 年 刊
2016, 37A(2):227–232
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2016.0019

一类三阶伪抛物型方程初边值问题解的存在定理*

冯艳青[1] 王忠英[1]

提要 借助路径提升问题，利用 Banach 空间吸引盆理论，研究了一类三阶伪抛物型方程初边值问题解的存在唯一性问题，给出其解存在唯一的充分条件，同时证明了一些已有的结论是本文主要定理的推论.

关键词 三阶伪抛物型方程初边值问题，路径提升问题，吸引盆，存在理论
MR (2000) 主题分类 34C25
中图法分类 O175
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2016)02-0227-06

1 引 言

我们将研究三阶伪抛物型方程初边值问题解的存在性问题

$$\begin{cases}\Delta(u+u_t)-u_t=f(x,u),\\ u(x,0)=0,\ u=0 \text{ 或 } (u+u_t)_n+(u+u_t)=0,\ (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T],\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 Δ 为 n 维拉普拉斯算子， $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是紧的有界集，其边界分段光滑且处处有非负平均曲率.

由于这类方程有着广泛的应用背景，如常应用于二阶流体非定常流动 [1], Chen 和 Gurtin 的热传导理论 [2] 、共振辐射在气体中的扩散 [3−4] 等一些重要的物理过程中，因此方程 (1.1) 解的存在和唯一性问题引起学者们研究的兴趣.

在文 [5] 中， Elcart 和 Sigillito 推导出伪抛物算子

$$L_a u=\Delta(u+u_t)+\sum_{i=1}^n u_{x_i}-au-u_t$$

的一个优先估计，并应用于方程 (1.1) 中得到如下定理.

定理 1.1 设算子 $Pu=L_0u-f(x,u)$, 这里 $L_0u=\Delta(u+u_t)-u_t$, f 满足下列条件：

(1) $\inf\limits_{\Omega\times\mathbb{R}} f_u>-\lambda$;

(2) 对于固定的 x, $f_u=\mathrm{O}(u)$,

则方程 $Pu=0$ 在 Hilbert 空间 W_0 中有唯一解.

本文的主要目的是推广 Elcart 和 Sigillito 的结果. 我们在第 4 节的定理 4.1 中，将 Elcart 和 Sigillito 的条件 (2) 替换为

(2) 对任意 $u\in W_0$, $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}s}{1+N(s)+Q(s)N(s)}=\infty$, 这里 $N(u)=\sup\|[L_0+f'_u(x,u)]^{-1}\|$, $Q(u)=\sup f'_u(x,u)$.

本文 2013 年 12 月 7 日收到， 2015 年 6 月 23 日收到修改稿.
[1]常州工学院数学系，江苏 常州 213002. E-mail: fengyq@czu.cn; wangzy@czu.cn
*本文受到江苏省教育厅项目 (No. 13KJD110001) 和常州工学院自然科学基金 (No. YN0909) 的资助.

使定理 1.1 成为本文主要定理的推论. 我们主要定理的证明方法不同于 Elcart 和 Sigillito 的证明. 文章第 3 节主要证明了一些不等式, 证明的思路方法与 Elcart 和 Sigillito 类似, 这些不等式在主要定理的证明过程中起着重要的作用.

2 预备知识

设 E, F 为 Banach 空间, D 为 E 中连通开集, 下面定理可用来证明本文的主要定理.

定理 2.1 [6] 设 $f: D \subset E \to F$ 在 D 上是局部同胚的 C^1 映射. 设 $x_0 \in D, \forall x \in D$, 路径提升问题

$$\begin{cases} f(\gamma_x(t)) = f(x_0) + \mathrm{e}^{-t}(f(x) - f(x_0)), & t \in \mathbb{R}, \\ \gamma_x(0) = x, & \gamma_x(t) \in D \end{cases} \tag{2.1}$$

有唯一一个定义在最大开区间 $I_x = (t_x^-, t_x^+)$, $-\infty \leqslant t_x^- < 0 < t_x^+ \leqslant +\infty$ 上的连续解 $t \to \gamma_x(t)$, 并且集合 $\{(x,t) \in D \times \mathbb{R} : t \in I_x\}$ 是 $D \times \mathbb{R}$ 上的开集, 映射 $(x,t) \to \gamma_x(t)$ 也是连续的, 且具有性质

$$\begin{aligned} &t, t+\tau \in I_x \Longrightarrow \tau \in I_{\gamma_{x(t)}}, \\ &\gamma_{\gamma_{x(t)}}(\tau) = \gamma_x(t+\tau). \end{aligned}$$

定义 2.1 [6] 在定理 2.1 的假设条件下, x_0 的吸引盆是指集合

$$A = \Big\{X \in D : t_x^+ = +\infty, \lim_{t \to +\infty} \gamma_x(t) = x_0\Big\}.$$

定理 2.2 [7] 设连续映射 $f: D \subset E \to F$ 是局部同胚的, 则 f 是 E 到 F 上的全局同胚的充要条件是对所有的 $x \in A$, $\gamma_x(t)$ 都定义在实数集 $\mathbb{R}$ 上, 即 $\gamma_x(t)$ 可以向 $-\infty$ 延伸.

3 一些引理

在这一节中, 我们首先证明一些重要的不等式.

考虑三阶伪抛物型算子

$$L_a u = \Delta(u + u_t) + \sum_{i=1}^n u_{x_i} - au - u_t, \tag{3.1}$$

其中 $a(x)$ 是关于 $t, x_1, \cdots, x_n, u$ 的有界函数, $u_t \in L_2([0,T], W_2^2(\Omega))$. 设 $W_0(D)$ 是以

$$(\|u\|_{2,1})^2 = \int (u^2 + |\nabla u|^2 + |D^2 u|^2 + u_t^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

为范数的 Hilbert 空间, $D = \Omega \times [0,T]$, Ω 是一个边界分段光滑且处处有非负平均曲率的 n 维区域, $|D^2 u|^2$ 表示空间变量所有二阶导数的平方和.

记

$$Lu = \Delta(u + u_t) + \sum_{i=1}^n u_{x_i} - u_t, \tag{3.2}$$

(3.1) 可以写成

$$L_a u = Lu - au. \tag{3.3}$$

在上面的假设下， L_a 是 $W_0(D)$ 映入 $L_2(D)$ 的线性算子.

引理 3.1　设 $a_0 = \inf\limits_{\Omega} a > -\lambda$, 则对于任意 $u \in W_0(D)$, 有

$$\int_D (\nabla u)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \int_D (Lu)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + (2+4\lambda)\int_D u^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

这里 λ 是 $L_2(D)$ 上满足齐次边界条件的拉普拉斯算子 $-\Delta$ 的最小特征值.

证　由 (3.1)–(3.3), 得

$$\begin{aligned}\int_D uLu\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_D au^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_D (\nabla u)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} |\nabla u|^2\mathrm{d}x - \sum_{j=1}^n \int_D uu_{x_j}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ + \int_D au^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} u^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中 $\Omega_T = D \cap \{t = T\}$. 对于 $\varepsilon_1 > 0$ 和 $\varepsilon_2 > 0$, 使用两次 AM-GM 不等式，得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\varepsilon_1}\int_D (Lu)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon_1}{2}\int_D u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t - 2\int_D au^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ \geqslant &\int_D (\nabla u)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \frac{\varepsilon_2}{2}\int_D |\nabla u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \frac{1}{2\varepsilon_2}\int_D u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \\ &\Big(1-\frac{\varepsilon_2}{2}\Big)\int_D (\nabla u)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\varepsilon_1}\int_D (Lu)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \Big(\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon_2} - 2a_0\Big)\int_D u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由 $a_0 = \inf\limits_{\Omega} a > -\lambda$ 并设 $\varepsilon_1 = 1 = \varepsilon_2$, 得

$$\int_D (\nabla u)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \int_D (Lu)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + (2+4\lambda)\int_D u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

下面两个引理的证明类似于文 [8] 中的相关证明.

引理 3.2　$\int_D (u_t)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \int_D (Lu)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{3}{2}\int_D u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$

引理 3.3　$\int_D |D^2u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant 14\int_D (Lu)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + (21+24\lambda)\int_D u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$

引理 3.4　设 $a_0 = \inf\limits_{\Omega} a > -\lambda$, 则有

$$\|u\| \leqslant C(\|u\|_0 + \|Lu\|_0),$$

其中 $C = \max\big\{16, \frac{51}{2} + 28\lambda\big\}$, $\|\ \|_0$ 是 $L_2(D)$ 的范数.

证　我们可以得到

$$\begin{aligned}(\|u\|_{2,1})^2 &= \int (u^2 + |\nabla u|^2 + |D^2u|^2 + u_t^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \int u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int (|\nabla u|^2 + |D^2u|^2 + u_t^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

根据引理 3.1–3.3, 有

$$\int (|\nabla u|^2 + |D^2u|^2 + u_t^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant 16\int_D (Lu)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \Big(\frac{49}{2} + 24\lambda\Big)\int_D u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

于是

$$(\|u\|_{2,1})^2 \leqslant 16\int_D (Lu)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \Big(\frac{51}{2}+24\lambda\Big)\int_D u^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

令 $\max\big\{16, \frac{51}{2}+28\lambda\big\}$, 则有

$$\|u\| \leqslant C(\|u\|_0 + \|Lu\|_0).$$

4 主要定理

下面我们将给出方程

$$L_0 u = \Delta(u+u_t) - u_t = f(x,u) \tag{4.1}$$

满足初始条件 $u(x,0)=0$, $u=0$ 或 $(u+u_t)_n + (u+u_t) = 0$, $(x,t)\in S_T$ 的解的存在唯一性的一个充分条件. 将方程 (4.1) 写成算子的形式

$$Fu = Lu - au,$$

则 (4.1) 等价于

$$F(u) = 0, \quad u \in W_0.$$

我们设 $\partial\Omega \in C^2$ 且 f 关于 u 连续, 有直到三阶连续偏导数. 于是对一切 $u,\varphi \in W_0(D)$, 有

$$F'(u)(\varphi) = L_0\varphi - f'_u(x,u)\varphi, \quad u,\varphi \in W_0.$$

下面是本文的主要定理.

定理 4.1 假设

(1) $\inf\limits_{G\times\mathbb{R}} f'_u(x,u) > -\lambda$;

(2) 对于任意 $u\in W_0$, 有

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{1+N(s)+Q(s)N(s)} = \infty, \tag{4.2}$$

这里 $N(s) = \sup\limits_{\|u\|_0\leqslant s} \|[L_0 + f'_u(x,u)]^{-1}\|$, $Q(s) = \sup\limits_{G\times\mathbb{R}} f'_u(x,u)$, 则方程

$$F(u) = 0$$

存在唯一解 $u\in W_0$.

证 由条件 (1) 可知, 0 不是 $L_0\phi - f'_u(x,u)\phi = 0$ 的特征值, 因此对每个 $u\in W_0$, $F'(u) = L_0 - f'_u I$ 是 $W_0(D)$ 到 $L^2(D)$ 上的可逆算子, 其中 I 是 $W_0(D)$ 上的恒同算子, 从而说明 F 是 $W_0(D)$ 上的局部同胚.

任取 $u\in W_0(D)$, 记 $[L_0 - f'_u(x,u)I]^{-1}\varphi = \psi$, 由引理 3.4 得

$$\begin{aligned}
\|\psi\| &\leqslant C(\|\psi\|_0 + \|L_0\psi\|_0) = C(\|[L_0 - f'_u(x,u)I]^{-1}\varphi\| + \|L_0[L_0 - f'_u(x,u)I]^{-1}\varphi\|)\\
&\leqslant C(N(\|u\|)\|\varphi\| + \|\varphi\| + \|f'_u(x,u)\|\|[L_0 - f'_u(x,u)I]^{-1}\varphi\|)\\
&\leqslant C(N(\|u\|)\|\varphi\| + \|\varphi\| + \sup_{G\times\mathbb{R}}\|f'_u(x,u)\|N(\|u\|)\|\varphi\|)\\
&\leqslant C(N(\|u\|)\|\varphi\| + \|\varphi\| + Q(\|u\|)N(\|u\|)\|\varphi\|),
\end{aligned}$$

所以

$$\|F'(u)^{-1}\| = \|[L_0 - f'_u(x,u)I]^{-1}\| \leqslant C(1+N(\|u\|)+Q(\|u\|)N(\|u\|)).$$

关于映照 F 考虑路径提升问题

$$\begin{cases} F(\gamma_u(t)) - F(u_0) = \mathrm{e}^{-t}(F(u) - F(u_0)), \\ \gamma_u(0) = u. \end{cases}$$

显然 $\gamma_u'(t) = -[F'(\gamma_u(t))]^{-1}\mathrm{e}^{-t}(F(u) - F(u_0))$, 则

$$\begin{aligned} \|\gamma_u(t) - \gamma_u(0)\| &= \Big\| \int_0^t \gamma_u'(t)\mathrm{d}t \Big\| \leqslant \int_0^t \|\gamma_u'(t)\|\mathrm{d}t = \int_0^t \|[F'(\gamma_u(t))]^{-1}\mathrm{e}^{-t}(F(u) - F(u_0))\|\mathrm{d}t \\ &\leqslant C\int_0^t |1 + N(\gamma_u(t)) + Q(\gamma_u(t))N(\gamma_u(t))|\mathrm{e}^{-t}\|F(u) - F(u_0)\|\mathrm{d}t, \\ \|\gamma_u(t)\| &\leqslant \|\gamma_u(0)\| + C\int_0^t |1 + N(\gamma_u(t)) + Q(\gamma_u(t))N(\gamma_u(t))|\mathrm{e}^{-t}\|F(u) - F(u_0)\|\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式，得

$$\int_{\|\gamma_u(0)\|}^{\|\gamma_u(t)\|} \frac{\mathrm{d}s}{1 + N(s) + Q(s)N(s)} \leqslant C\int_0^t \mathrm{e}^{-t}\|F(u) - F(u_0)\|\mathrm{d}t \leqslant C\|F(u) - F(u_0)\|,$$

且 (4.2) 成立，则 $\exists M > 0$,

$$\|\gamma_u(t)\| \leqslant M, \quad t > 0.$$

由定理 2.1, 我们只要证明 $\gamma_u(t)$ 可以向 $-\infty$ 延伸即可.

令 $g(-t) = \gamma_u(t)$, $t \in (b, 0]$, $\forall b < 0$. 对 $t_1, t_2 \in (b, 0]$, 有

$$\begin{aligned} \|\gamma_u(t_1) - \gamma_u(t_2)\| = \|g(-t_1) - g(-t_2)\| &= \int_{-t_2}^{-t_1} \|g'(s)\|\mathrm{d}s \\ &= \int_{-t_2}^{-t_1} \|F'(\gamma_u(t)^{-1})\|\mathrm{e}^s\|F(u) - F(u_0)\|\mathrm{d}s \\ &\leqslant C\int_{-t_2}^{-t_1} |1 + N(M) + Q(M)N(M)|\mathrm{e}^s\|F(u) - F(u_0)\|\mathrm{d}s \\ &\leqslant C(1 + N(M) + Q(M)N(M))\mathrm{e}^b\|F(u) - F(u_0)\||t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

所以 $\gamma_u(t)$ 在 $(-b, 0]$ 上 Lipschitz 连续，$\gamma_u(t)$ 可以向 $-\infty$ 延伸，即 F 是 $W_0(D)$ 到 $L_2(D)$ 上的全局同胚，命题得证.

推论 4.1　假设 f 满足

(1) $\inf\limits_{G\times\mathbb{R}} f_u'(x, u) > -\lambda$;

(2) 对于固定的 x, $|f_u'| = \omega(\|u\|)$, 其中 ω 连续且满足

$$\int_c^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\omega(t)} = \infty, \tag{4.3}$$

则方程 (4.1) 在 W_0 上有唯一解.

证　由文 [5] 中的定理 1, 可得

$$\|[F'(u)]^{-1}\| \leqslant \alpha \sup_G |f_u'(x, u)| + \beta, \quad \alpha, \beta \text{ 是正常数}.$$

由 (4.3), $\int_c^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\alpha \sup |f_u'| + \beta} = \infty$. 故由定理 4.1, 方程 (4.1) 存在唯一解.

推论 4.2　(Elcrat and Sigillito)　设 $Pu = L_0u - f(x, u)$, 假设 f 满足

(1) $\inf\limits_{G\times\mathbb{R}} f_u'(x, u) > -\lambda$;

(2) 对于固定的 $x, \|f'_u\| = O(\|u\|)$,
则方程 $Pu = 0$ 在 W_0 上有唯一解.

证 由条件 (2) 可知 $\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\omega(t)} = \infty$ 成立，则命题得证. Elcrat 和 Sigillito 在文 [5] 中的结果成为定理 4.1 的推论.

致谢 作者衷心感谢审稿人的意见对本文的提高.

参 考 文 献

[1] Ting T W. Certain non-steady flows of second-order fluids [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 1963, 14(1):1–26.

[2] Chen P J, Gurtin M E. On a theory of heat conduction involving two temperatures [J]. *Z Angew Math Phys*, 1968, 19(4):614–627.

[3] Milne E A. The diffusion of imprisoned radiation through a gas [J]. *J London Math Soc*, 1926, 1(1):40–51.

[4] Mitchell A G, Zemansky N W. Resonance radiation and excited atoms [M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1934.

[5] Elcrat A R, Sigillito V G. Coercivity for a third order pseudoparabolic operator with applications to semilinear equations [J]. *J Math Anal*, 1977, 61(4):841–849.

[6] Gorni G. Acriterion of invertibility in the large for local diffeomorphisms between Banach spaces [J]. *Nonlinear Analysis*, 1993, 21(1):43–47.

[7] 王文相, 沈祖和. 巴拿赫空间的吸引盆及其应用 [J]. 数学学报, 2006, 49(5):1013–1020.

[8] Elcrat A R. Constructive existence for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients [J]. *SIAM J Math Anal*, 1974, 5(4):663–672.

[9] Feng Y Q, Wang Z Y, Zhang D Q. Global homeomorphism and the existence of solutions for periodically perturbed conservative systems [J]. *Journal of Nanjing University Mathematical*, 2011, 28(1):24–32.

An Existence Theorem for the Initial-Boundary Value Problem of a Third Order Pseudoparabolic Equation

FENG Yanqing[1] WANG Zhongying[1]

[1]Department of Mathematics, Changzhou Institute of Technology, Changzhou 213002, Jiangsu, China. E-mail: fengyq@czu.cn; wangzy@czu.cn

Abstract In this paper, a new set of sufficient conditions related to the path-lifting problem and the basin of attraction method is given in discussing the initial-boundary value problem of a third order pseudoparabolic equation. Some known results on the existence of solutions of the above equation are generalized.

Keywords Third order pseudoparabolic initial-boundary value problem, Path-lifting problem, The basin of attraction, Existence theorems

2000 MR Subject Classification 34C25

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 37 No. 2, 2016
by ALLERTON PRESS, INC., USA