数 学 年 刊 A 辑
2018, 39(1):43–52
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2018.0005

由 $n\times n$ 上三角 Toeplitz 矩阵所构成的超循环矩阵族*

舒永录[1] 王 伟[2] 王兴忠[3]

提要 在 Feldman 和 Costakis 所做的结果的基础上, 进一步考虑了超循环算子族的一些问题. 设 $\mathcal{T}=(T_1,\cdots,T_m)$ 是一组由 m 个上三角 Toeplitz 复矩阵构成的矩阵组, 给出了一个 $\mathcal{T}$ 是超循环的充分必要条件.

关键词 超循环算子, 超循环算子族, 上三角 Toeplitz 复矩阵
MR (2000) 主题分类 47A16, 47B20
中图法分类 O177.2
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2018)01-0043-10

1 引 言

令 X 是一个拓扑线性空间, T 是 X 上的一个连续的线性算子, 如果存在一个向量 $x\in X$, 使得它的轨道 $\mathrm{obit}(x,T)$ 在 X 中稠密, 即

$$\overline{\mathrm{Orb}(T,x)}=\overline{\{x,Tx,T^2x,\cdots\}}=X,$$

则称 T 是 X 上的超循环算子, 称 x 是算子 T 的超循环向量, 把所有超循环向量的集合记作 $\mathrm{HC}(T)$.

在 2006 年, 相对于单个算子的研究, Feldman 给出了一类新的超循环算子 —— 超循环算子族, 使得对超循环现象的研究不仅仅局限在无限维空间, 在有限维空间也同样存在超循环现象. 他在 $\mathbb{C}^n$ 上给出第一个例子, 存在由 $(n+1)$ 个对角矩阵构成的超循环算子族.

对于 m-算子族, 指由 m 个两两可交换的算子构成. 设 $\mathcal{T}=(T_1,T_2,\cdots,T_m)$ 是一个 m-算子族, X 是一个 Banach 空间, $\mathcal{F}$ 是由 $\mathcal{T}$ 生成的半群, 即

$$\mathcal{F}=\langle\mathcal{T}\rangle=\Big\{T_1^{k_1}T_2^{k_2}\cdots T_m^{k_m}:k_i\in\mathbb{N},\ i=1,\cdots,m\Big\},$$

则 $\mathcal{F}$ 是一个有限生成的可交换半群. 如果存在 $x\in X$, 使得轨道 $\{Sx:S\in\mathcal{F}\}$ 在 X 中是稠密的, 则称 m-算子族是超循环的, 称 x 是 m-算子族 $\mathcal{T}$ 的超循环向量.

本文 2015 年 7 月 28 日收到, 2016 年 6 月 30 日收到修改稿.
[1]重庆大学数学中心, 重庆 401331. E-mail: shuyonglu@cqu.edu.cn
[2]河南师范大学数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007. E-mail: wangwei005c@126.com
[3]重庆大学数学与统计学院, 重庆 401331. E-mail: wmd070925@sina.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11271387), 重庆市自然科学基金 (No. cstc 2013jjB0050) 和重庆市项目 (No. 1020709520130059) 的资助.

Fredman 在 [6] 中给出了算子族是超循环的判断标准.

定理 1.1 (Hypercyclic Criterion)[6] 设 X 是一个可分的 Banach 空间, $\mathcal{T}=(T_1, T_2,\cdots,T_m)$ 是 X 上的一个 m-算子族. 如果在 X 中存在稠子集 X_0, Y_0, 严格递增的正整数序列 $\{k_{1,n}\},\cdots,\{k_{m,n}\}$ 和映射 $S_n: Y_0\to X, n\geqslant 1$, 使得对于任意的 $x\in X_0, y\in Y_0$ 都有下面的条件成立:

(i) $T_1^{k_{1,n}}T_2^{k_{2,n}}\cdots T_m^{k_{m,n}}x\longrightarrow 0$;

(ii) $S_ny\longrightarrow 0$;

(iii) $T_1^{k_{1,n}}T_2^{k_{2,n}}\cdots T_m^{k_{m,n}}S_ny\longrightarrow y$,

则 $\mathcal{T}$ 是一个超循环的 m-算子族.

Feldman 在文 [6] 中证明了在 $\mathbb{C}^n$ 上存在由 $(n+1)$ 个对角矩阵构成的超循环算子族, 但是不存在由 n 个对角矩阵构成的超循环算子族. Costakis 在文 [2] 中做出了进一步的研究, 证明了在 $\mathbb{C}^n$ 上存在由 k 个不能同时对角化的可交换矩阵构成的超循环算子族, 其中 $k>n$. 因此, 根据 Feldman[6]和 Costakis[2]的结果, 就有了下面的问题.

问题 1.1 在 $\mathbb{C}^n$ 上是否存在由 n 不能同时对角化的可交换矩阵构成的超循环算子族?

通过对一类算子的研究, Costakis 解决了上面问题的一部分. Costakis 在文 [2, 4] 中证明了在 $\mathbb{R}^n$ 上不存在由阶数大于或等于 3 的若当块矩阵构成的超循环算子族. 进而, 对由 2×2, 3×3 和 4×4 的上三角 Teoplitz 复矩阵构成的算子族, Costakis 在文 [3] 中给出了使这些算子族是超循环的一个充分必要条件.

在这篇文章中, 我们扩展了 Costakis 在文 [3] 中的结论, 在 $\mathbb{C}^n$ 上给出由 m 个 $n\times n$ 的上三角 Teoplitz 复矩阵构成的 m-算子族是超循环的充分必要条件.

对于其他的一些在有限维或无限维空间上的超循环算子族的结果, 可以参考文 [1, 5, 7–8].

2 主要定理及其证明

在这篇文章中, 用 $\mathbb{N}_+$, $\mathbb{N}$ 分别表示正整数和非负整数, $J_n(\lambda)$ 表示特征值是 λ 的 $n\times n$ 的若当形矩阵. 在给出主要定理之前, 先介绍下面两个引理.

引理 2.1[3] 设 A, B 是两个可交换的复矩阵,

$$A=J_n(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{C},$$

则 B 是上三角的 Toeplitz 矩阵:

$$B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ 0 & b_1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & b_2\\ 0 & 0 & \cdots & b_1\end{pmatrix},$$

其中 $b_1,\cdots,b_n\in\mathbb{C}$.

引理 2.2[3]　设 A,B 是两个可交换的复矩阵,

$$A=J_{n_1}(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus J_{n_k}(\lambda_k),\quad \lambda_j\in\mathbb{C},\quad n_1+\cdots+n_k=n,\quad \lambda_i\neq\lambda_j,\ i\neq j,$$

则

$$B=B_1\oplus\cdots\oplus B_k,$$

其中 B_j 是如引理 2.1 中的 $n_j\times n_j$ 上三角 Toeplitz 矩阵, $j=1,\cdots,k$.

根据引理 2.2, 对一个由两两可交换矩阵构成的 m-算子族 $\mathcal{T}=(T_1,\cdots,T_m)$, 如果 T_1 与 A 相似, 则存在一个可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}T_1P=A=J_{n_1}(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus J_{n_k}(\lambda_k),$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k\in\mathbb{C}$, $n_1+\cdots+n_k=n$, $\lambda_i\neq\lambda_j$ $(i\neq j)$. 进一步, 因为 $P^{-1}T_jP$ $(j=2,\cdots,m)$ 与 $P^{-1}T_1P$ 可交换, 可得

$$P^{-1}T_jP=B_{j,1}\oplus\cdots\oplus B_{j,k},$$

而且 $P^{-1}T_1P,\cdots,P^{-1}T_mP$ 是两两可交换的. 容易验证超循环性在相似变换下是保持的. 因此, m-算子族 $(T_1,\cdots,T_m)$ 是超循环的当且仅当 m-算子族

$$(J_{n_1}(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus J_{n_k}(\lambda_k),B_{2,1}\oplus\cdots\oplus B_{2,k},\cdots,B_{m,1}\oplus\cdots\oplus B_{m,k})$$

是超循环的. 由于若当块矩阵是一类特殊的上三角 Toeplitz 矩阵, 所以研究两两可交换矩阵构成的算子族的超循环性等价于研究算子族 $\mathcal{S}$ 的超循环性,

$$\mathcal{S}=(B_{1,1}\oplus\cdots\oplus B_{1,k},B_{2,1}\oplus\cdots\oplus B_{2,k},\cdots,B_{m,1}\oplus\cdots\oplus B_{m,k}).$$

设 A_j 是 $\mathbb{C}^n$ 上的上三角 Toeplitz 矩阵:

$$A_j=\begin{pmatrix} a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,n}\\ 0 & a_{j,1} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{j,2}\\ 0 & 0 & \cdots & a_{j,1}\end{pmatrix},\tag{2.1}$$

其中 $a_{j,i}\in\mathbb{C},\ j=1,2,\cdots,m,\ i=1,2,\cdots,n$.

在上面两个引理的基础上, 现在我们给出这篇文章的主要定理.

定理 2.1　设 $\mathcal{T}=(T_1,\cdots,T_m)$ 是一个由上三角 Toeplitz 矩阵构成的 m-算子族, 其中 T_j $(j=1,\cdots,m)$ 如 (2.1) 的形式, 则 m-算子族 $\mathcal{T}$ 是超循环的当且仅当集合

$$\left\{\left(\Lambda_{n-1}(k),\Lambda_{n-2}(k),\cdots,\Lambda_1(k),\prod_{j=1}^{m}a_{j,1}^{k_j}\right)^t:\ k_j\in\mathbb{N},\ j=1,2,\cdots,m\right\}$$

在 $\mathbb{C}^n$ 中稠密, 其中 A^t 表示 A 的转置,

$$\Lambda_\omega(k)=\sum_{j=1}^{m}k_j\Bigg(\sum_{\sum\limits_{i=1}^{n-1}i\nu_{i+1}=\omega}(-1)^{(s_n-1)}\frac{(s_n)!}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}\nu_{i+1}!}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}a_{j,i+1}^{\nu_i}}{a_{j,1}^{s_n}}\Bigg),$$

$$s_n=\sum_{i=1}^{n-1}\nu_{i+1},\quad \omega=1,2,\cdots,n-1.$$

证 对一个多重指标 $k=(k_1,\cdots,k_m)\in\mathbb{N}^m$, 根据文 [3, Section 3], 可以得到下面的公式:

$$\begin{aligned}T_1^{k_1}\cdots T_m^{k_m}&=\sum_{\substack{k_{1,1},\cdots,k_{1,n}\in\mathbb{N}\\ k_{1,1}+\cdots+k_{1,n}=k_1}}\cdots\sum_{\substack{k_{m,1},\cdots,k_{m,n}\in\mathbb{N}\\ k_{m,1}+\cdots+k_{m,n}=k_m}}\prod_{j=1}^{m}\binom{k_j}{k_{j,1},\cdots,k_{j,n}}a_{j,1}^{kj,1}\cdots a_{j,n}^{kj,n}\\&\quad\times U^{(k_{1,2}+\cdots+k_{m,2})+2(k_{1,3}+\cdots+k_{m,3})+\cdots+(n-1)(k_{1,n}+\cdots+k_{m,n})}\\&=\begin{pmatrix}c_1(k)&c_2(k)&\cdots&c_n(k)\\0&c_1(k)&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&c_2(k)\\0&0&\cdots&c_1(k)\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{2.2}$$

其中

$$U=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\ddots&\vdots\\0&0&0&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

根据上面的公式, 为了确定 $c_1(k)$, 有下面的等式:

$$(k_{1,2}+\cdots+k_{m,2})+2(k_{1,3}+\cdots+k_{m,3})+\cdots+(n-1)(k_{1,n}+\cdots+k_{m,n})=0,$$

即 $k_{1,1}=k_1,\ k_{2,1}=k_2,\cdots,k_{n,1}=k_n$. 因此, 可得

$$c_1(k)=\prod_{j=1}^{m}a_{j,1}^{k_j}.\tag{2.3}$$

同理, 为了确定 $c_2(k)$, 有下面的等式:

$$(k_{1,2}+\cdots+k_{m,2})+2(k_{1,3}+\cdots+k_{m,3})+\cdots+(n-1)(k_{1,n}+\cdots+k_{m,n})=1.$$

上式是指 $k_{1,2},\cdots,k_{m,2}$ 中有一个 1, 其他的都是 0. 通过简单计算, 可得

$$c_2(k)=c_1(k)\sum_{j=1}^{m}k_j\frac{a_{j,2}}{a_{j,1}}=c_1(k)\Lambda_1(k),\tag{2.4}$$

其中

$$\Lambda_1(k)=\sum_{j=1}^{m}k_j\frac{a_{j,2}}{a_{j,1}}.$$

同理, 为了确定 $c_3(k)$, 有下面的等式:

$$(k_{1,2}+\cdots+k_{m,2})+2(k_{1,3}+\cdots+k_{m,3})+\cdots+(n-1)(k_{1,n}+\cdots+k_{m,n})=2.$$

上式可以分为下面 3 种情况:

(1) $k_{1,3},\cdots,k_{m,3}$ 中只有一个未知数是 1, 其他的都是 0;

(2) $k_{1,2},\cdots,k_{m,2}$ 中只有一个未知数是 2, 其他的都是 0;

(3) $k_{1,2},\cdots,k_{m,2}$ 中有两个不同的未知数 1, 其他的都是 0.

通过简单计算, 可得

$$\begin{aligned} c_3(k) &= c_1(k)\Big[\sum_{j=1}^{m}k_j\Big(\frac{a_{j,3}}{a_{j,1}}-\frac{1}{2}\frac{a_{j,2}^2}{a_{j,1}^2}\Big)+\frac{1}{2!}\Big(\sum_{j=1}^{m}k_j\frac{a_{j,2}}{a_{j,1}}\Big)^2\Big]\\ &= c_1(k)\Big(\frac{1}{2!}\Lambda_1^2(k)+\Lambda_2(k)\Big), \end{aligned}\tag{2.5}$$

其中

$$\Lambda_2(k)=\sum_{j=1}^{m}k_j\big(\frac{a_{j,3}}{a_{j,1}}-\frac{1}{2}\frac{a_{j,2}^2}{a_{j,1}^2}\big).$$

用同样的方法可得 $c_4(k)$, $c_5(k)$:

$$\begin{aligned} c_4(k) &= c_1(k)\Big[\sum_{j=1}^{m}k_j\Big(\frac{a_{j,4}}{a_{j,1}}-\frac{a_{j,2}a_{j,3}}{a_{j,1}^2}+\frac{1}{3}\frac{a_{j,2}^3}{a_{j,1}^3}\Big)+\frac{1}{3!}\Big(\sum_{j=1}^{m}k_j\frac{a_{j,2}}{a_{j,1}}\Big)^3\\ &\quad+\Big(\sum_{j=1}^{m}k_j\frac{a_{j,2}}{a_{j,1}}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m}k_j\big(\frac{a_{j,3}}{a_{j,1}}-\frac{1}{2}\frac{a_{j,2}^2}{a_{j,1}^2}\big)\Big)\Big]\\ &= c_1(k)\Big(\frac{1}{3!}\Lambda_1^3(k)+\Lambda_1(k)\Lambda_2(k)+\Lambda_3(k)\Big), \end{aligned}\tag{2.6}$$

其中

$$\Lambda_3(k)=\sum_{j=1}^{m}k_j\Big(\frac{a_{j,4}}{a_{j,1}}-\frac{a_{j,2}a_{j,3}}{a_{j,1}^2}+\frac{1}{3}\frac{a_{j,2}^3}{a_{j,1}^3}\Big).$$

$$\begin{aligned} c_5(k) &= c_1(k)\Big[\sum_{j=1}^{m}k_j\Big(\frac{a_{j,5}}{a_{j,1}}-\frac{a_{j,2}a_{j,4}}{a_{j,1}^2}-\frac{1}{2}\frac{a_{j,3}^2}{a_{j,1}^2}+\frac{a_{j,2}^2a_{j,3}}{a_{j,1}^3}-\frac{1}{4}\frac{a_{j,2}^4}{a_{j,1}^4}\Big)+\frac{1}{4!}\Big(\sum_{j=1}^{m}k_j\frac{a_{j,2}}{a_{j,1}}\Big)^4\\ &\quad+\Big(\sum_{j=1}^{m}k_j\frac{a_{j,2}}{a_{j,1}}\Big)\sum_{j=1}^{m}k_j\Big(\frac{a_{j,4}}{a_{j,1}}-\frac{a_{j,2}a_{j,3}}{a_{j,1}^2}+\frac{1}{3}\frac{a_{j,2}^3}{a_{j,1}^3}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{m}k_j\Big(\frac{a_{j,3}}{a_{j,1}}-\frac{1}{2}\frac{a_{j,2}^2}{a_{j,1}^2}\Big)\Big)^2\\ &\quad+\frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{m}k_j\frac{a_{j,2}}{a_{j,1}}\Big)^2\sum_{j=1}^{m}k_j\Big(\frac{a_{j,3}}{a_{j,1}}-\frac{1}{2}\frac{a_{j,2}^2}{a_{j,1}^2}\Big)\Big]\\ &= c_1(k)\Big(\frac{1}{4!}\Lambda_1^4(k)+\Lambda_1(k)\Lambda_3(k)+\frac{1}{2}\Lambda_1^2(k)\Lambda_2(k)+\frac{1}{2}\Lambda_2^2(k)+\Lambda_4(k)\Big), \end{aligned}\tag{2.7}$$

其中

$$\Lambda_4(k)=\sum_{j=1}^{m}k_j\Big(\frac{a_{j,5}}{a_{j,1}}-\frac{a_{j,2}a_{j,4}}{a_{j,1}^2}-\frac{1}{2}\frac{a_{j,3}^2}{a_{j,1}^2}+\frac{a_{j,2}^2a_{j,3}}{a_{j,1}^3}-\frac{1}{4}\frac{a_{j,2}^4}{a_{j,1}^4}\Big).$$

由归纳法, 可得下面的公式:

$$c_n(k)=c_1(k)\sum_{\sum\limits_{i=1}^{n-1}i\gamma_i=n-1}\mu_{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-1}}\Lambda_1^{\gamma_1}(k)\Lambda_2^{\gamma_2}(k)\cdots\Lambda_{n-1}^{\gamma_{n-1}}(k),\tag{2.8}$$

其中相应的系数 $\mu_{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-1}}$ 可以表示为

$$\mu_{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-1}}=\prod_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\gamma_i!},$$

并且

$$\begin{aligned}\Lambda_\omega(k)&=\sum_{j=1}^{m}k_j\Big(\sum_{\sum\limits_{i=1}^{n-1}i\nu_{i+1}=\omega}(-1)^{(s_n-1)}\frac{(s_n)!}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}\nu_{i+1}!}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}a_{j,i+1}^{\nu_i}}{a_{j,1}^{s_n}}\Big),\\ s_n&=\sum_{i=1}^{n-1}\nu_{i+1},\quad \omega=1,2,\cdots,n-1.\end{aligned}\tag{2.9}$$

假设 m-算子族 $\mathcal{T}$ 是超循环的, 则存在向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)^t\in\mathbb{C}^n$, 使得轨道

$$\begin{aligned}\{\mathcal{T}^kx:k\in\mathbb{N}^m\}&=\{T_1^{k_l}T_2^{k_2}\cdots T_m^{k_m}x:k_j\in\mathbb{N},\ j=1,2,\cdots,m\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}x_jc_j(k)\\ \vdots\\ x_{n-1}c_1(k)+x_nc_2(k)\\ x_nc_1(k)\end{pmatrix}:k_j\in\mathbb{N},\ j=1,2,\cdots,m\right\}\end{aligned}$$

在 $\mathbb{C}^n$ 中稠密. 特别地, 根据上式可得 $x_n\neq 0$.

对任意的向量 $z=(z_1,\cdots,z_n)^t\in\mathbb{C}^n$, $z_n\neq 0$, 可以找到一列正整数的子序列 $\{k_{1,n}\}$, $\{k_{2,n}\},\cdots,\{k_{m,n}\}$, 使得

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}x_jc_j(\widehat{k}_n)\longrightarrow{}& x_1z_n+x_2z_nz_{n-1}+\cdots\\&+x_nz_n\sum_{\sum\limits_{i=1}^{n-1}i\gamma_i=n-1}\mu_{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-1}}z_{n-1}^{\gamma_1}z_{n-2}^{\gamma_2}\cdots z_1^{\gamma_{n-1}},\end{aligned}\tag{2.10}$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1}c_1(\widehat{k}_n)+x_nc_2(\widehat{k}_n)\longrightarrow x_{n-1}z_n+x_nz_nz_{n-1},\tag{2.11}$$

$$x_nc_1(\widehat{k}_n)\longrightarrow x_nz_n,\tag{2.12}$$

其中 $\widehat{k}_n=(k_{1,n},k_{2,n},\cdots,k_{m,n})$.

由 (2.12) 和 $x_n\neq 0$, 可得

$$c_1(\widehat{k}_n)=\prod_{j=1}^{m}a_{j,1}^{k_{j,n}}\longrightarrow z_n.$$

由 (2.11) 和 $x_{n-1}c_1(\widehat{k}_n)\longrightarrow x_{n-1}z_n$, 可得

$$x_nc_2(\widehat{k}_n)=x_nc_1(\widehat{k}_n)\Lambda_1(\widehat{k}_n)\longrightarrow x_nz_nz_{n-1}.$$

因为 $x_nc_1(\widehat{k}_n)\longrightarrow x_nz_n\neq 0$, 可得

$$\Lambda_1(\widehat{k}_n)\longrightarrow z_{n-1}.$$

利用归纳法, 可得

$$\Lambda_v(\widehat{k}_n) \longrightarrow z_{n-v}, \quad v=2,3,\cdots n-1.$$

所以, 子集

$$\Big\{(\Lambda_{n-1}(\widehat{k}_n),\Lambda_{n-2}(\widehat{k}_n),\cdots,\Lambda_1(\widehat{k}_n),\prod_{j=1}^{m}a_{j,1}^{k_{j,n}})^t:\ k_j\in\mathbb{N},\ j=1,2,\cdots,m\Big\}$$

在 $\mathbb{C}^n\setminus\{(\sigma_1,\cdots,\sigma_{n-1},0)^t:\sigma_v\in\mathbb{C},v=1,2,\cdots,n-1\}$ 中稠密, 当然也在 $\mathbb{C}^n$ 中稠密. 因此, 集合

$$\Big\{(\Lambda_{n-1}(k),\Lambda_{n-2}(k),\cdots,\Lambda_1(k),\prod_{j=1}^{m}a_{j,1}^{k_j})^t:\ k_j\in\mathbb{N},\ j=1,2,\cdots,m\Big\}$$

在 $\mathbb{C}^n$ 中稠密.

因为相反方向的证明很容易, 在这就省略了.

注 2.1　(i) 根据定理 2.1 的证明, 可以完全刻画超循环算子族 $\mathcal{T}=(T_1,\cdots,T_m)$ 的超循环向量. 事实上,

$$\mathrm{HC}(\mathcal{T})=\mathbb{C}^n\setminus\{(\sigma_1,\cdots,\sigma_{n-1},0)^t:\sigma_j\in\mathbb{C},j=1,\cdots,n-1\}.$$

很明显, $\mathrm{HC}(\mathcal{T})$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个稠子集, 而且在 $\mathbb{C}^n$ 中的任一向量都可以写成超循环算子族 $\mathcal{T}$ 的两个超循环向量的和.

(ii) 根据定理 2.1, m-算子族 $\mathcal{T}=(T_1,\cdots,T_m)$ 是超循环的但是不一定满足定理 1.1. 设 $X_0=Y_0$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的稠子集, $\{k_{1,n}\},\{k_{2,n}\},\cdots,\{k_{m,n}\}$ 是递增的正整数序列, 对任意的 $x\in X_0$, $x\neq 0$, 如果

$$T_1^{k_{l,n}}T_2^{k_{2,n}}\cdots T_m^{k_{m,n}}x\longrightarrow 0,$$
$$T_1^{k_{l,n}}T_2^{k_{2,n}}\cdots T_m^{k_{m,n}}S_nx\longrightarrow x,$$

即有

$$T_1^{k_{l,n}}T_2^{k_{2,n}}\cdots T_m^{k_{m,n}}\longrightarrow 0,$$
$$T_1^{k_{l,n}}T_2^{k_{2,n}}\cdots T_m^{k_{m,n}}S_n\longrightarrow \mathbf{1}.$$

因此, 可得

$$S_nx\longrightarrow (T_1^{k_{l,n}}T_2^{k_{2,n}}\cdots T_m^{k_{m,n}})^{-1}x\longrightarrow\infty.$$

根据 Costakis 在文 [3] 中的想法, 我们也可以得到 n-算子族 $(T_1,T_2,\cdots,T_n)$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上不是超循环的, 从而给出下面的推论.

推论 2.1　设 $\mathcal{T}=(T_1,T_2,\cdots,T_n)$, 其中 T_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 是 (2.1) 中形式的矩阵, 则 $\mathcal{T}$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上不是超循环的.

证　利用反证法, 假设 $(T_1,\cdots,T_n)$ 是超循环算子族, 根据定理 2.1, 我们可以得到, 集合

$$\Big\{\Big(\Lambda_{n-1}(k),\Lambda_{n-2}(k),\cdots,\Lambda_1(k),\prod_{j=1}^{n}a_{j,1}^{k_j}\Big)^t:\ k_j\in\mathbb{N},\ j=1,2,\cdots,n\Big\}$$

在 $\mathbb{C}^n$ 中稠密.

定义函数 $f:\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}^n$ ，$f(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)=(\mathrm{e}^{x_1},\cdots,\mathrm{e}^{x_{n-1}},x_n)$, 显然 f 是连续的, 而且是满射, 因此集合

$$\left\{\begin{pmatrix}(\mathrm{e}^{\alpha_1^{n-1}})^{k_1}(\mathrm{e}^{\alpha_2^{n-1}})^{k_2}\cdots(\mathrm{e}^{\alpha_n^{n-1}})^{k_n}\\ \vdots\\ (\mathrm{e}^{\alpha_1^{1}})^{k_1}(\mathrm{e}^{\alpha_2^{1}})^{k_2}\cdots(\mathrm{e}^{\alpha_n^{1}})^{k_n}\\ a_{1,1}^{k_1}a_{2,1}^{k_2}\cdots a_{n,1}^{k_n}\end{pmatrix}: k_j\in\mathbb{N},\ j=1,2,\cdots,n\right\}$$

在 $\mathbb{C}^n$ 中稠密, 其中

$$\alpha_j^{\omega}=\sum_{\sum\limits_{i=1}^{n-1}i\nu_{i+1}=\omega}(-1)^{(s_n-1)}\frac{(s_n)!}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}\nu_{i+1}!}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}a_{j,i+1}^{\nu_i}}{a_{j,1}^{s_n}},\quad s_n=\sum_{i=1}^{n-1}\nu_{i+1},\ \omega=1,2,\cdots,n-1.$$

这就意味着由 n 个对角矩阵构成的算子族

$$\left(\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\alpha_1^{n-1}}&0&\cdots&0\\0&\mathrm{e}^{\alpha_1^{n-2}}&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\cdots&a_{1,1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\alpha_2^{n-1}}&0&\cdots&0\\0&\mathrm{e}^{\alpha_2^{n-2}}&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\cdots&a_{2,1}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\alpha_n^{n-1}}&0&\cdots&0\\0&\mathrm{e}^{\alpha_n^{n-2}}&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\cdots&a_{n,1}\end{pmatrix}\right)$$

在 $\mathbb{C}^n$ 上是超循环的, 因为向量 $(1,1,\cdots,1)^t$ 就是它的超循环向量. 这与 Feldman 在文 [6] 中的定理 3.6 矛盾.

上面给出的 m-算子族是由 $n\times n$ 的上三角的 Toeplitz 矩阵构成的, 是比较简单的情形. 下面研究一般的情况, 用 Tut_{v,α_1} 表示维数是 v、特征值是 α_1 的上三角的 Toeplitz 矩阵, 即

$$Tut_{v,\alpha_1}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\cdots&\alpha_v\\0&\alpha_1&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\alpha_2\\0&0&\cdots&\alpha_1\end{pmatrix}.$$

设 T 是 $n\times n$ 复矩阵, 且与一个含有 p 个若当块的 $n\times n$ 若当块矩阵可交换, 则由引理 2.2 可知矩阵 T 有如下形式:

$$T=\mathrm{diag}\Big\{Tut_{n_1,\alpha_{1,1}},\cdots,Tut_{n_p,\alpha_{p,1}}\Big\}=Tut_{n_1,\alpha_{1,1}}\oplus\cdots\oplus Tut_{n_p,\alpha_{p,1}},\tag{2.13}$$

其中 $n_1+\cdots+n_p=n,\ \alpha_{1,1},\cdots,\alpha_{p,1}\in\mathbb{C}$.

根据引理 2.2 和定理 2.1, 在更一般情形下, 给出如下定理.

定理 2.2　设 $\mathcal{T}=(T_1,\cdots,T_m)$ 是一个由 m 个 $n\times n$ 复矩阵构成的算子族, 且

$$T_j = Tut_{n_1,\alpha_{j,1}^{(1)}} \oplus \cdots \oplus Tut_{n_p,\alpha_{j,1}^{(p)}}, \tag{2.14}$$

其中 $\alpha_{j,1}^{(b)}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}, b=1,\cdots,p;\ j=1,\cdots,m$, 则 m-算子族 $\mathcal{T}$ 是超循环的当且仅当集合

$$\left\{\left(\Lambda_{n_1-1}^{(1)}(k),\cdots,\Lambda_1^{(1)}(k),\prod_{j=1}^{m}(a_{j,1}^{(1)})^{k_j},\cdots,\Lambda_{n_p-1}^{(p)}(k),\cdots,\Lambda_1^{(p)}(k),\prod_{j=1}^{m}(a_{j,1}^{(p)})^{k_j}\right)^t : k_1,\cdots,k_m\in\mathbb{N}\right\}$$

在 $\mathbb{C}^n$ 中稠密.

证　根据定理 2.1 很容易证明这个结果, 此处省略证明过程.

根据推论 2.1, 很容易得到下面的结果.

推论 2.2　设 $\mathcal{T}=(T_1,\cdots,T_n)$ 是一个由 n 个 $n\times n$ 复矩阵构成的算子族, 且矩阵 T_j 形如 (2.13) 中所示, $j=1,2,\cdots,n$, 则算子族 $\mathcal{T}$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上不是超循环的.

注 2.2　根据定理 2.2, 我们可以完全刻画 m-算子族 $\mathcal{T}=(T_1,\cdots,T_m)$ 的超循环向量:

$$\begin{aligned}\mathrm{HC}(\mathcal{T}) = \mathbb{C}^n\setminus\Big\{&(\sigma_{1,1},\cdots,\sigma_{1,n_1-1},0,\cdots,\cdots,\sigma_{p,1},\cdots,\sigma_{p,n_p-1},0)^t:\sigma_{i,j}\in\mathbb{C},\\ &\qquad\qquad i=1,\cdots,p,\ j=1,2,\cdots,n_i-1\Big\}.\end{aligned}$$

致谢 本文作者感谢编辑和匿名审稿人给出很多宝贵的意见及建议, 以及舒教授和赵显锋师兄的鼓励与帮助.

参　考　文　献

[1] Ayadi A. Hypercyclic abelian semigroup of matrices on $\mathbb{C}^n$ and $\mathbb{R}^n$ and k-transitivity ($k\geqslant 2$) [J]. *Applied General Topology*, 2011, to appear.

[2] Costakis G D, Hadjiloucas D, Manoussos A. Dynamics of tuples of matrices [J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2009, 137(3):1025–1034.

[3] Costakis G D, Hadjiloucas D, Manoussos A. Dynamics of tuples of complex upper triangular Toeplitz matrices [J]. arXiv preprint, 2010, arXiv:1008.0780.

[4] Costakis G D, Parissis I. Dynamics of tuples of matrices in Jordan form. arXiv preprint, 2010, arXiv:1003.5321.

[5] Feldman N S. Hypercyclic pairs of coanalytic Toeplitz operators [J]. *Integral Equations and Operator Theory*, 2007, 58(2):153–173.

[6] Feldman N S. Hypercyclic tuples of operators and somewhere dense orbits [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, 346(1):82–98.

[7] Javaheri M. Topologically transitive semigroup actions of real linear fractional transformations [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2010, 368(2):587–603.

[8] Javaheri M. Semigroups of matrices with dense orbits [J]. *Dynamical Systems*, 2011, 26(3): 235–243.

Hypercyclic Tuple of $n \times n$ Upper Triangular Toeplitz Matrices

SHU Yonglu[1] WANG Wei[2] WANG Xingzhong[3]

[1]Center of Mathematics, Chongqing University, Chongqing 401331, China. E-mail: shuyonglu@cqu.edu.cn

[2]College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, Henan, China. E-mail: wangwei005c@126.com

[3]College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China. E-mail: wmd070925@sina.com

Abstract In this paper, based on the results of Feldman and Costakis, the authors consider the problem of hypercyclic tuple operators. Let $\mathcal{T} = (T_1, \cdots, T_m)$ be a tuple of $n \times n$ complex upper triangular Toeplitz matrices. A necessary and sufficient condition for the tuple to be hypercyclic is obtained.

Keywords Hypercyclic operator, Hypercyclic tuple, Upper triangular Toeplitz Matrix

2000 MR Subject Classification 47A16, 47B20

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 39 No. 1, 2018
by ALLERTON PRESS, INC., USA