数 学 年 刊 A 辑
2018, 39(1):63–76
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2018.0007

Lorentz 空间型中正常 2-调和超曲面的分类*

独 力[1] 刘建成[2]

提要 本文对 Lorentz 空间型中的正常 2-调和超曲面进行了完全分类, 它的形状算子的极小多项式的阶数至多是 2.

关键词 Lorentz 空间型, 正常 2-调和超曲面, 极小多项式, 广义脐超曲面
MR (2000) 主题分类 53C50
中图法分类 O175.29
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2018)01-0063-14

1 引 言

设 $\phi: M_r^n \to N_q^{n+p}$ 是从指标为 r 的 n 维伪黎曼流形 M_r^n 到指标为 q 的 $n+p$ 维伪黎曼流形 N_q^{n+p} 的等距浸入. 记 $\widetilde{R}$, ∇^ϕ 和 ∇ 分别为 N_q^{n+p} 的曲率张量, 向量丛 $\phi^*TN_q^{n+p}$ 上由 ϕ 诱导的诱导联络和 M_r^n 上的联络.

如果 ϕ 的 2-张力场 $\tau_2(\phi)$ 满足 (见文 [1–2])

$$\tau_2(\phi) := \mathrm{tr}(\nabla^\phi\nabla^\phi - \nabla^\phi_\nabla)\tau(\phi) - \mathrm{tr}\widetilde{R}(\mathrm{d}\phi, \tau(\phi))\mathrm{d}\phi = 0, \tag{1.1}$$

那么称 M_r^n 是 N_q^{n+p} 的 2-调和子流形, 其中 $\tau(\phi) = \mathrm{tr}\nabla^\phi \mathrm{d}\phi$ 是 ϕ 的张力场. 注意到 $\tau(\phi) = n\vec{H}$, 其中 $\vec{H}$ 是 M_r^n 的平均曲率向量场, 易见极小子流形是 2-调和子流形. 非极小的 2-调和子流形通常被称为正常 2-调和子流形.

近年来对常截曲率为 c 的伪黎曼空间型 $N_q^{n+p}(c)$ 中的正常 2-调和子流形的研究呈现日趋浓厚的研究兴趣. 文 [3–9] 对 $N_q^{n+p}(c)$ 中此类子流形的非存在性问题进行了广泛的研究, 并且得到了许多深刻的结论.

正常 2-子流形的分类问题是另一重要研究课题, 譬如文 [10–11] 在特殊情形下得到了一些漂亮的分类结果. 本文将考虑 Lorentz 空间型 $N_1^{n+1}(c)$ 中正常 2-调和超曲面 M_r^n $(r=0,1)$ 的分类. 在假设超曲面的形状算子的极小多项式的阶数至多是两次的前提下, 得到了此类超曲面的一个完全分类结果. 具体地, 首先证明了

定理 1.1 设 $M_r^n\,(n>2)$ 是 Lorentz 空间型 $N_1^{n+1}(c)$ 中的 2-调和超曲面. 如果 M_r^n 的形状算子的极小多项式的阶数至多是 2, 那么 M_r^n 的平均曲率是常数.

注 1.1 当 $c=0$, 定理 1.1 的结果已被证明, 详见文 [12, 定理 4.2].

本文 2015 年 5 月 12 日收到, 2016 年 10 月 6 日收到修改稿.
[1]重庆理工大学理学院，重庆 400054. E-mail: duli820210@163.com
[2]通信作者. 西北师范大学数学与统计学院, 兰州 730070. E-mail: liujc@nwnu.edu.cn
*本文受到国家自然基金 (No. 11261051, No. 11761061), 定西师范高等专科学校青年人才资助计划 (No. 2102-2017) 和定西师范高等专科学校重点项目 (No. TD2016ZD08) 的资助.

利用定理 1.1, 得到了以下分类结果.

定理 1.2 设 $M_r^n\,(n>2)$ 是 Lorentz 空间型 $N_1^{n+1}(c)$ 中的正常 2-调和超曲面. 假设 M_r^n 的形状算子的极小多项式的阶数至多是 2, 则 $c\neq 0$. 进一步,

(i) 当 $c>0$ 时, $r=1$ 且 M_1^n 是一个形状算子为

$$\begin{pmatrix} \pm\sqrt{c} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \pm\sqrt{c} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pm\sqrt{c} \end{pmatrix}$$

的广义脐超曲面, 或 $\mathbb{S}_1^n(2c)$ 的一个开部分, 或 $\mathbb{S}_{r_1}^{n_1}(c_1)\times\mathbb{S}_{1-r_1}^{n-n_1}(c_2)(n_1\neq n-n_1, r_1=0,1)$ 的一个开部分, 其中 c_1 和 c_2 是满足 $\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}=\frac{1}{c}$, $n_1^2c_1+(n-n_1)^2c_2\neq n^2c$ 和 $n_1c_1+(n-n_1)c_2=2nc$ 的两个正常数.

(ii) 当 $c<0$ 时, $r=0$ 且 M^n 是 $\mathbb{H}^n(2c)$, 或 $\mathbb{H}^{n_1}(\widetilde{c}_1)\times\mathbb{H}^{n-n_1}(\widetilde{c}_2)(n_1\neq n-n_1)$ 的一个开部分, 其中 $\widetilde{c}_1$ 和 $\widetilde{c}_2$ 是满足 $\frac{1}{\widetilde{c}_1}+\frac{1}{\widetilde{c}_2}=\frac{1}{c}$, $n_1^2\widetilde{c}_1+(n-n_1)^2\widetilde{c}_2\neq n^2c$ 和 $n_1\widetilde{c}_1+(n-n_1)\widetilde{c}_2=2nc$ 的两个负常数.

注 1.2 当 $n=2$ 时, 定理 1.2 的结果已被 Sasahara 在文 [11] 中证明. 因此, 本文只对 $n>2$ 的情形研究.

注 1.3 由定理 1.2 可见, 对于 Lorentz-Minkowski 空间中的 2-调和超曲面 M_r^n, 如果其形状算子的极小多项式的阶数至多是 2, 那么 M_r^n 是极小的. 该结论已被 Ferrández 等人在文 [12] 中证明.

熟知, 对给定的 n 阶方阵 B, 如果多项式 $f(x)=x^s+a_1x^{s-1}+\cdots+a_s$ 使得

$$f(B)=B^s+a_1B^{s-1}+\cdots+a_s\mathrm{I}=\mathbf{0},$$

那么称 $f(x)$ 为方阵 B 的零化多项式, 其中 I 和 $\mathbf{0}$ 分别是 n 阶单位矩阵和零矩阵. 在 B 的所有零化多项式中, 阶数最低且首项系数为 1 的零化多项式称为 B 的极小多项式, 记为 $\mu_B(x)$.

如果 Lorentz 空间型中超曲面 M_r^n 的形状算子的极小多项式具有形式 $(x-\lambda)^2$ 或者 $(x-\lambda)^3$, 那么称 M_r^n 是一个广义脐超曲面 (见文 [13]). 关于 Lorentz 空间型中广义脐超曲面的例子, 详见文 [12–14].

不难发现广义脐超曲面具有非对角化形状算子且有相同的主曲率. 对于定理 1.2 中所陈述的其它超曲面, 根据 [15] 可知 $\mathbb{S}_1^n(2c)$ 和 $\mathbb{H}^n(2c)$ 是全脐的, $\mathbb{S}_{r_1}^{n_1}(c_1)\times\mathbb{S}_{1-r_1}^{n-n_1}(c_2)$ $(r_1=0,1)$ 和 $\mathbb{H}^{n_1}(\widetilde{c}_1)\times\mathbb{H}^{n-n_1}(\widetilde{c}_2)$ 具有可对角化形状算子且有两个不同主曲率, 即这些都不是广义脐超曲面.

2 预备知识

设 $N_1^{n+1}(c)$ 是 $(n+1)$-维常截曲率为 c 的 Lorentz 空间型. 当 $c>0$, $c=0$ 或 $c<0$ 时, $N_1^{n+1}(c)$ 分别被称为 de Sitter 空间 $\mathbb{S}_1^{n+1}(c)$, Lorentz-Minkowski 空间 $\mathbb{L}^{n+1}$ 或 anti-de Sitter 空间 $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$.

因为 $N_1^{n+1}(c)$ 具有常截曲率 c, 所以其曲率张量 $\widetilde{R}$ 为

$$\widetilde{R}(X,Y)Z=c(\langle Y,Z\rangle X-\langle X,Z\rangle Y).$$

设 M_r^n $(r=0,1)$ 是 $N_1^{n+1}(c)$ 中的超曲面. 约定 ∇ 和 $\widetilde{\nabla}$ 分别表示 M_r^n 和 $N_1^{n+1}(c)$ 上的 Levi-Civita 联络. 对于 M_r^n 上的任意光滑切向量场 X,Y, Gauss 公式为

$$\widetilde{\nabla}_XY=\nabla_XY+h(X,Y),$$

其中 h 是 M_r^n 的第二基本形式. 记 A_ξ 是 M_r^n 关于单位法向量 ξ 的形状算子, 则 Weingarten 公式可表示成如下形式

$$\widetilde{\nabla}_X\xi=-A_\xi(X).$$

熟知, h 和 A_ξ 具有如下关系

$$\langle h(X,Y),\xi\rangle=\langle A_\xi(X),Y\rangle. \tag{2.1}$$

若记 $H=\frac{\langle\xi,\xi\rangle}{n}\mathrm{trace}A_\xi$ 为超曲面 M_r^n 的平均曲率, 则平均曲率向量场 $\vec{H}=H\xi$.

设 X,Y,Z 是 M_r^n 上的光滑切向量场, D 是 M_r^n 的法联络. 则第二基本形式 h 的协变导数 $\widetilde{\nabla}_Xh$ 定义如下

$$(\widetilde{\nabla}_Xh)(Y,Z)=D_Xh(Y,Z)-h(\nabla_XY,Z)-h(Y,\nabla_XZ), \tag{2.2}$$

于是 Codazzi 方程为

$$(\widetilde{\nabla}_Xh)(Y,Z)=(\widetilde{\nabla}_Yh)(X,Z).$$

在 $N_1^{n+1}(c)$ 上选取局部伪黎曼标准正交基 $\{e_1,\cdots,e_n,e_{n+1}\}$, 即 $\varepsilon_A=\langle e_A,e_A\rangle=\pm1$, $1\leqslant A\leqslant n+1$, 使限制到 M_r^n 上, $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 M_r^n 的切标架场, e_{n+1} 是 M_r^n 的法标架场. 设 $\{\omega^i\}_{i=1}^n$ 和 ω_B^A, $1\leqslant A,B\leqslant n+1$ 分别为 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 的对偶 1-形式和联络形式, 则 $\widetilde{\nabla}e_A=\sum\limits_{B=1}^{n+1}\varepsilon_B\omega_A^Be_B$, $\omega_B^A=-\omega_A^B$, $1\leqslant A,B\leqslant n+1$. 根据 Gauss 公式, 对于 $i,j=1,2,\cdots,n$, 有

$$\nabla_{e_i}e_j=\sum_{k=1}^n\varepsilon_k\omega_j^k(e_i)e_k,\quad \omega_j^i=-\omega_i^j. \tag{2.3}$$

记

$$h(e_i,e_j)=\varepsilon_{n+1}h_{ij}e_{n+1}. \tag{2.4}$$

于是 M_r^n 的结构方程为 (见 [16, p.52])

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\omega^i=-\sum_{j=1}^n\varepsilon_j\omega_j^i\wedge\omega^j,\\
&\mathrm{d}\omega_j^i=\frac12\sum_{k,l=1}^n\varepsilon_{n+1}(h_{ik}h_{jl}-h_{il}h_{jk})\omega^k\wedge\omega^l-\sum_{k=1}^n\varepsilon_k\omega_k^i\wedge\omega_j^k+\frac12\sum_{k,l=1}^n\widetilde{R}_{jkl}^i\omega^k\wedge\omega^l,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 $\widetilde{R}(e_i,e_j)e_k=\sum\limits_{l=1}^n\varepsilon_l\widetilde{R}_{jkl}^ie_l$.

对于 M_r^n 上的光滑函数 f, Laplacian 算子 Δ 作用在 f 上按如下定义

$$\Delta f=-\sum_{i=1}^n\varepsilon_i(e_ie_i-\nabla_{e_i}e_i)f. \tag{2.6}$$

借助文 [17] 或 [16] 中方法, 类似地可证得以下关键引理.

引理 2.1 设 $\phi: M_r^n \to N_1^{n+1}(c)$ 是等距浸入. 则 M_r^n 是 2-调和超曲面当且仅当

$$\begin{cases}-\Delta H - H(\varepsilon_{n+1}\|A_{n+1}\|^2 - nc) = 0,\\ n\varepsilon_{n+1}H\nabla H + 2A_{n+1}(\nabla H) = 0,\end{cases} \tag{2.7}$$

其中, 对于 M_r^n 上的适当标准正交标架场 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$,

$$\|A_{n+1}\|^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i\langle A_{n+1}(A_{n+1}(e_i)), e_i\rangle, \quad \nabla H = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i(H)e_i.$$

证 选择 M_r^n 的一个标准正交基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$, 使得 $\mathrm{d}\phi(e_1), \cdots, \mathrm{d}\phi(e_n)$, e_{n+1} 是定义在 M_r^n 上的 $N_1^{n+1}(c)$ 的相应标准正交标架场[17], 其中 e_{n+1} 是 M_r^n 的一个局部单位法向量场, $\mathrm{d}\phi$ 是 TM_r^n 到它的像的恒等映射. 则

$$\vec{H} = He_{n+1}, \quad H = \frac{\varepsilon_{n+1}}{n}\mathrm{trace}A_{n+1}, \quad A_{n+1} = A_{e_{n+1}}. \tag{2.8}$$

注意到, 对于 M_r^n 的光滑切向量场 X, Y 和光滑向量场 W, 有以下等式

$$\mathrm{d}\phi(X) = X, \quad \nabla_X^\phi(\mathrm{d}\phi(Y)) = \widetilde{\nabla}_X Y, \quad \nabla_X^\phi W = \widetilde{\nabla}_X W, \tag{2.9}$$

则利用 Gauss 公式得

$$\tau(\phi) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i\Big(\nabla_{e_i}^\phi(\mathrm{d}\phi(e_i)) - \mathrm{d}\phi(\nabla_{e_i}e_i)\Big) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i h(e_i, e_i) = nHe_{n+1}. \tag{2.10}$$

记 $\widetilde{\Delta} = -\mathrm{trace}(\widetilde{\nabla}\widetilde{\nabla} - \widetilde{\nabla}_\nabla)$, 利用 Weingarten 公式, 结合 (2.9) 和 (2.10) 式如下计算得

$$\begin{aligned}\tau_2(\phi) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\nabla_{e_i}^\phi\nabla_{e_i}^\phi\tau(\phi) - \nabla_{\nabla_{e_i}e_i}^\phi\tau(\phi) - \widetilde{R}(\mathrm{d}\phi(e_i), \tau(\phi))\mathrm{d}\phi(e_i))\\ &= n\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(e_ie_i(H)e_{n+1} + 2e_i(H)\widetilde{\nabla}_{e_i}e_{n+1} + H\widetilde{\nabla}_{e_i}\widetilde{\nabla}_{e_i}e_{n+1}\\ &\quad - \nabla_{e_i}e_i(H)e_{n+1} - H\widetilde{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i}e_{n+1} - H\widetilde{R}(\mathrm{d}\phi(e_i), e_{n+1})\mathrm{d}\phi(e_i))\\ &= -n(\Delta H)e_{n+1} - 2nA_{n+1}(\nabla H) - nH\widetilde{\Delta}e_{n+1}\\ &\quad - nH\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\widetilde{R}(\mathrm{d}\phi(e_i), e_{n+1})\mathrm{d}\phi(e_i).\end{aligned} \tag{2.11}$$

显然,

$$-nH\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\widetilde{R}(\mathrm{d}\phi(e_i), e_{n+1})\mathrm{d}\phi(e_i) = n^2cHe_{n+1}. \tag{2.12}$$

下面, 分别计算 (2.11) 式中 $(-\widetilde{\Delta}e_{n+1})$ 的切向部分和法向部分. 首先, 根据 Weingarten 公式, 由 (2.2) 式可得 $(-\widetilde{\Delta}e_{n+1})$ 的切向部分为

$$\begin{aligned}(-\widetilde{\Delta}e_{n+1})^\top &= \sum_{i,k=1}^n \varepsilon_i\varepsilon_k\langle\widetilde{\nabla}_{e_i}\widetilde{\nabla}_{e_i}e_{n+1} - \widetilde{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i}e_{n+1}, e_k\rangle e_k\\ &= -\sum_{i,k=1}^n \varepsilon_i\varepsilon_k\langle(\widetilde{\nabla}_{e_i}h)(e_k, e_i), e_{n+1}\rangle e_k.\end{aligned} \tag{2.13}$$

在 M_r^n 上选择局部法坐标系, 利用 Codazzi 方程, 根据 (2.13) 式可得

$$\begin{aligned}(-\widetilde{\Delta}e_{n+1})^{\top} &= -\sum_{i,k=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_k\langle(\widetilde{\nabla}_{e_k}h)(e_i,e_i),e_{n+1}\rangle e_k\\ &= -\sum_{i,k=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_k e_k\langle h(e_i,e_i),e_{n+1}\rangle e_k=-n\varepsilon_{n+1}\nabla H. \qquad (2.14)\end{aligned}$$

另外, 再次利用 Weingarten 公式, 直接计算可以得到 $(-\widetilde{\Delta}e_{n+1})$ 的法向部分为

$$\begin{aligned}(-\widetilde{\Delta}e_{n+1})^{\perp} &= \varepsilon_{n+1}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\langle\widetilde{\nabla}_{e_i}\widetilde{\nabla}_{e_i}e_{n+1}-\widetilde{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i}e_{n+1},e_{n+1}\rangle e_{n+1}\\ &= \varepsilon_{n+1}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\langle\widetilde{\nabla}_{e_i}(-A_{n+1}(e_i)),e_{n+1}\rangle e_{n+1}\\ &= -\varepsilon_{n+1}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\langle h(A_{n+1}(e_i),e_i),e_{n+1}\rangle e_{n+1}=-\varepsilon_{n+1}\|A_{n+1}\|^2e_{n+1}. \qquad (2.15)\end{aligned}$$

将 (2.12), (2.14) 和 (2.15) 式代入 (2.11) 式, 利用方程 (1.1) 有

$$(-\Delta H-\varepsilon_{n+1}H\|A_{n+1}\|^2+ncH)e_{n+1}=2A_{n+1}(\nabla H)+n\varepsilon_{n+1}H\nabla H. \qquad (2.16)$$

比较切向部分和法向部分, 引理 2.1 得证.

3　一些例子

本节给出 de Sitter 空间 $\mathbb{S}_1^{n+1}(c)$ 和 anti-de Sitter 空间 $\mathbb{H}_1^{n+1}(c)$ 中的正常 2-调和超曲面的例子, 它的形状算子 A_{n+1} 的极小多项式 $\mu_{A_{n+1}}(x)$ 的阶数至多为两次.

例 3.1　设 M_1^n 是 de Sitter 空间 $\mathbb{S}_1^{n+1}(c)$ 中的广义脐超曲面. 在 M_1^n 上选取伪标准正交基, 使得 $\langle u_1,u_2\rangle=\langle u_i,u_i\rangle=1$, $i=3,\cdots,n$; $\langle u_1,u_1\rangle=\langle u_2,u_2\rangle=\langle u_i,u_j\rangle=0$, $i\neq j=1,2,\cdots,n$. 由文献 [12] 有

$$A_{n+1}=\begin{pmatrix}\pm\sqrt{c} & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \pm\sqrt{c} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \pm\sqrt{c}\end{pmatrix}.$$

容易计算 A_{n+1} 的特征多项式为 $(x-(\pm\sqrt{c}))^n$, 并且

$$A_{n+1}-(\pm\sqrt{c})\mathrm{I}=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0\\1&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\neq\mathbf{0};$$

$$\big(A_{n+1}-(\pm\sqrt{c})\mathrm{I}\big)^2=\mathbf{0}.$$

熟知矩阵的特征多项式一定是它的零化多项式, 故 $\mu_{A_{n+1}}(x)=(x-(\pm\sqrt{c}))^2$, 即极小多项式 $\mu_{A_{n+1}}(x)$ 的阶数为 2.

现在, 根据基 $u_1,\cdots,u_n$ 构造 M_1^n 的一个伪黎曼标准正交基 $e_1,\cdots,e_n$, 使得

$$e_1=\frac{u_1+u_2}{\sqrt{2}},\quad e_2=\frac{u_1-u_2}{\sqrt{2}},\quad e_k=u_k,\quad \forall k=3,4,\cdots,n,$$

容易验证 e_2 是类时的, e_i ($i=1,3,\cdots,n$) 是类空的, 且 A_{n+1} 关于标准正交基 $\{e_i\}$ 具有如下形式

$$\begin{pmatrix} \pm\sqrt{c}+\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \pm\sqrt{c}-\dfrac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{c} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \pm\sqrt{c} \end{pmatrix}.$$

注意到 $\varepsilon_{n+1}=1$, 直接计算可得 $H=\pm\sqrt{c}$(非零常数) 和 $\varepsilon_{n+1}\|A_{n+1}\|^2=nc$, 这表明 2-调和方程 (2.7) 恒成立. 因此 M_1^n 是 $\mathbb{S}_1^{n+1}(c)$ 中 $\mu_{A_{n+1}}(x)$ 的阶数为 2 的正常 2-调和超曲面.

例 3.2 设 $\mathbb{S}_1^n(2c)$ 是 de Sitter 空间 $\mathbb{S}_1^{n+1}(c)$ 中的超曲面. 由文 [15] 知 $A_{n+1}=\pm\sqrt{c}I$, $\varepsilon_{n+1}=1$, 其中 I 是恒等算子. 利用例 3.1 中计算 $\mu_{A_{n+1}}(x)$ 的相同方法, 易得 $\mu_{A_{n+1}}(x)=x-(\pm\sqrt{c})$.

另外, 不难计算得 $H=\pm\sqrt{c}$ 和 $\varepsilon_{n+1}\|A_{n+1}\|^2=nc$. 据此可见 (2.7) 式恒成立. 所以 $\mathbb{S}_1^n(2c)$ 是 $\mathbb{S}_1^{n+1}(c)$ 中 $\mu_{A_{n+1}}(x)$ 的阶数为 1 的正常 2-调和超曲面.

例 3.3 设 $\mathbb{S}_{r_1}^{n_1}(c_1)\times\mathbb{S}_{1-r_1}^{n-n_1}(c_2)$ $(r_1=0,1)$ 是 de Sitte 空间 $\mathbb{S}_1^{n+1}(c)$ 中的超曲面, 其中常数 c_1, c_2 满足 $\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}=\frac{1}{c}$. 根据文 [15] 可得

$$A_{n+1}=\pm(\sqrt{c_1-c}\,I_{n_1}\oplus(-\sqrt{c_2-c})I_{n-n_1}),\tag{3.1}$$

其中 I_{n_1} 和 I_{n-n_1} 是两个恒等算子. 则 $\pm\sqrt{c_1-c}$ 和 $\mp\sqrt{c_2-c}$ 是 $\mathbb{S}_{r_1}^{n_1}(c_1)\times\mathbb{S}_{1-r_1}^{n-n_1}(c_2)$ 的两个不同主曲率, 且其重数分别为 n_1 和 $n-n_1$. 记

$$\lambda=\pm\sqrt{c_1-c},\quad \mu=\mp\sqrt{c_2-c}.\tag{3.2}$$

不难计算得

$$\mu_{A_{n+1}}(x)=(x-\lambda)(x-\mu).$$

假设

$$n_1^2c_1+(n-n_1)^2c_2\neq n^2c.\tag{3.3}$$

$$n_1c_1+(n-n_1)c_2=2nc.\tag{3.4}$$

利用 $\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}=\frac{1}{c}$, 由 (3.2) 式有

$$\lambda\mu=-c,$$

结合 (2.8), (3.2) 和 (3.3) 式, 我们发现

$$n^2H^2=n_1^2c_1+(n-n_1)^2c_2-n^2c\neq 0,$$

即 H 是一个非零常数. 此外, 结合 (3.1), (3.2) 和 (3.4) 式有

$$\varepsilon_{n+1}\|A_{n+1}\|^2 = nc.$$

以上事实证得 2-调和方程 (2.7) 成立. 故 $\mathbb{S}^{n_1}_{r_1}(c_1)\times\mathbb{S}^{n-n_1}_{1-r_1}(c_2)$ 是 $\mathbb{S}^{n+1}_1(c)$ 中 $\mu_{A_{n+1}}(x)$ 阶数为 2 的正常 2-调和超曲面.

例 3.4 设 $\mathbb{H}^n(2c)$ 是 anti-de Sitter 空间 $\mathbb{H}^{n+1}_1(c)$ 中的超曲面. 则形状算子 $A_{n+1}=\pm\sqrt{-c}I$(见文 [15]) 以及 $\varepsilon_{n+1}=-1$. 类似例 3.2 的讨论可知 $\mathbb{H}^n(2c)$ 是 anti-de Sitter 空间 $\mathbb{H}^{n+1}_1(c)$ 中 $\mu_{A_{n+1}}(x)$ 的阶数为 1 的正常 2-调和超曲面.

例 3.5 设 $\mathbb{H}^{n_1}(\widetilde{c}_1)\times\mathbb{H}^{n-n_1}(\widetilde{c}_2)$ 是 anti-de Sitter 空间 $\mathbb{H}^{n+1}_1(c)$ 中的超曲面, 其中常数 $\widetilde{c}_1,\widetilde{c}_2$ 满足 $\frac{1}{\widetilde{c}_1}+\frac{1}{\widetilde{c}_2}=\frac{1}{c}$. 由文 [15] 可知

$$A_{n+1}=\pm(\sqrt{c-\widetilde{c}_1}\,I_{n_1}\oplus(-\sqrt{c-\widetilde{c}_2}\,)I_{n-n_1}),$$

则 $\mathbb{H}^{n_1}(\widetilde{c}_1)\times\mathbb{H}^{n-n_1}(\widetilde{c}_2)$ 的两个不同主曲率是 $\pm\sqrt{c-\widetilde{c}_1}$ 和 $\mp\sqrt{c-\widetilde{c}_2}$, 且其重数分别为 n_1 和 $n-n_1$. 易得 $\mu_{A_{n+1}}(x)$ 的阶数为 2.

假设

$$n_1^2\widetilde{c}_1+(n-n_1)^2\widetilde{c}_2\neq n^2c,$$

$$n_1\widetilde{c}_1+(n-n_1)\widetilde{c}_2=2nc.$$

利用与例 3.3 中相同的讨论方法可得 $\mathbb{H}^{n_1}(\widetilde{c}_1)\times\mathbb{H}^{n-n_1}(\widetilde{c}_2)$ 是 $\mathbb{H}^{n+1}_1(c)$ 中 $\mu_{A_{n+1}}(x)$ 的阶数为 2 的正常 2-调和超曲面.

4 定理 1.1 的证明

由假设, A_{n+1} 的极小多项式的阶数至多为 2 且 $n>2$, 所以 A_{n+1} 是如下三种可能的形式之一 (见文 [12]):

$$\text{(I)}: \begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix},\quad \text{(II)}: \begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix},\quad \text{(III)}: \begin{pmatrix}\lambda \mathrm{I}_m & 0\\ 0 & \mu\mathrm{I}_{n-m}\end{pmatrix}(\lambda\neq\mu),$$

其中 m 和 $n-m$ 分别为主曲率 λ 和 μ 的重数.

4.1 形状算子具有形式 (I) 或 (II) 的情形

命题 4.1 设 $M^n_r\,(n>2)$ 是 $N^{n+1}_1(c)$ 中的 2-调和超曲面. 如果形状算子具有形式 (I) 或 (II), 那么 M^n_r 的平均曲率是常数.

证 反设 M^n_r 的平均曲率 H 不是常数, 则存在某个开子集 $U\subset M^n_r$, 使得在其上 $\nabla H\neq 0$. 利用 (2.7) 式中第二式可知 $-\frac{n\varepsilon_{n+1}H}{2}$ 是沿主方向 ∇H 的主曲率, 不失一般性, 记

$$\lambda=-\frac{n\varepsilon_{n+1}H}{2}. \tag{4.1}$$

如果形状算子具有形式 (I). 选取适当的伪黎曼标准正交基 (详见例 3.1), 使得

$$A_{n+1}=\begin{pmatrix} \lambda+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

则利用 (2.8) 和 (4.1) 式, 直接计算便得 $H=0$, 矛盾.

如果形状算子具有形式 (II), 那么由 (2.8) 式易得 $H=\varepsilon_{n+1}\lambda$. 结合 (4.1) 式有 $\frac{n+2}{2}H=0$, 即 $H=0$, 矛盾. 命题 4.1 得证.

4.2 形状算子具有形式 (III) 的情形

命题 4.2 设 $M_r^n\,(n>2)$ 是 $N_1^{n+1}(c)$ 中的 2-调和超曲面. 如果形状算子具有形式 (III), 那么 M_r^n 的平均曲率是常数.

证 反设平均曲率 H 不是常数, 则在 M_r^n 上存在一个开子集 U, 使得在 U 上 $\nabla H\neq 0$. 根据 (2.7) 式中的第 2 式可知 $-\frac{n\varepsilon_{n+1}}{2}H$ 是沿主方向 ∇H 的主曲率. 不失一般性, 记 $\lambda=-\frac{n\varepsilon_{n+1}}{2}H$.

因为 A_{n+1} 具有形式 (III), 所以在 U 上选取一个伪黎曼标准正交标架场 $\{e_A\}_{A=1}^{n+1}$, 使得 $e_1\parallel\nabla H$, $e_1,e_2,\cdots,e_m$ 是对应主曲率为 λ 的主方向, $e_{m+1},e_{m+2},\cdots,e_n$ 是对应主曲率为 μ 的主方向, 以及 e_{n+1} 是 U 的法向量场, 即

$$A_{n+1}(e_i)=\lambda_i e_i,\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{4.2}$$

其中 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m=\lambda$, $\lambda_{m+1}=\lambda_{m+2}=\cdots=\lambda_n=\mu$. 则

$$nH=\varepsilon_{n+1}(m\lambda+(n-m)\mu). \tag{4.3}$$

与此同时, 对于不同的 $i,j(=1,2,\cdots,n)$, 由 (2.1) 式可得

$$h(e_i,e_i)=\varepsilon_{n+1}\varepsilon_i\lambda_i e_{n+1},\quad h(e_i,e_j)=0. \tag{4.4}$$

利用 Weingarten 公式(2.2), (2.3) 和 (4.4) 式, 对于不同的 $i,j\ (=1,2,\cdots,n)$, 有

$$(\widetilde{\nabla}_{e_i}h)(e_j,e_j)=\varepsilon_{n+1}\varepsilon_j e_i(\lambda_j)e_{n+1}$$

和

$$(\widetilde{\nabla}_{e_j}h)(e_i,e_j)=\varepsilon_{n+1}\omega_i^j(e_j)(\lambda_i-\lambda_j)e_{n+1}.$$

根据 Codazzi 方程 $(\widetilde{\nabla}_{e_i}h)(e_j,e_j)=(\widetilde{\nabla}_{e_j}h)(e_i,e_j)$ 得

$$\varepsilon_j e_i(\lambda_j)=\omega_i^j(e_j)(\lambda_i-\lambda_j). \tag{4.5}$$

类似地, 对于不同的 $i,j,l(=1,\cdots,n)$, 由 Codazzi 方程 $(\widetilde{\nabla}_{e_i}h)(e_j,e_l)=(\widetilde{\nabla}_{e_j}h)(e_i,e_l)$, 经过计算有

$$\omega_j^l(e_i)(\lambda_l-\lambda_j)=\omega_i^l(e_j)(\lambda_l-\lambda_i). \tag{4.6}$$

注意到 $e_1 \parallel \nabla H$, 则 $e_i(H)=0\ (i=2,3,\cdots,n)$, 且

$$\nabla H=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i e_i(H)e_i=\varepsilon_1 e_1(H)e_1. \tag{4.7}$$

断言 $m=1$. 反设 $m>1$, 则 $A_{n+1}(e_1)=\lambda e_1$, 并且存在一个固定指标 $\alpha\ (1<\alpha\leqslant m)$, 使得 $A_{n+1}(e_\alpha)=\lambda e_\alpha$. 取 $i=1$ 和 $j=\alpha$ 代入 (4.5) 式可得 $e_1(\lambda)=0$, 结合 $\lambda=-\frac{n\varepsilon_{n+1}}{2}H$ 有 $e_1(H)=0$, 则根据 (4.7) 式可知 $\nabla H=0$, 矛盾.

现在 $m=1$, $\lambda=\frac{-n\varepsilon_{n+1}}{2}H$, 由 (4.3) 式有

$$\mu=\frac{3n\varepsilon_{n+1}}{2(n-1)}H. \tag{4.8}$$

在 (4.5) 式中, 取 $i=1$ 和 $j=\alpha>1$, 并且利用 (4.8) 直接计算可得

$$3\varepsilon_\alpha e_1(H)=-(n+2)H\omega_1^\alpha(e_\alpha),$$

即

$$\omega_1^\alpha(e_\alpha)=-\frac{3\varepsilon_\alpha e_1(H)}{(n+2)H}. \tag{4.9}$$

为了完成命题 4.2 的证明, 我们证明以下引理.

引理 4.1 在上述假设之下, 有

$$\varepsilon_1 He_1e_1(H)-\frac{3\varepsilon_1(n-1)}{n+2}(e_1(H))^2-\frac{\varepsilon_{n+1}(n+8)n^2}{4(n-1)}H^4+ncH^2=0, \tag{4.10}$$

$$He_1e_1(H)-\frac{3\varepsilon_1+\varepsilon_\alpha(n+2)}{\varepsilon_\alpha(n+2)}(e_1(H))^2+\frac{\varepsilon_{n+1}\varepsilon_1(n+2)n^2}{4(n-1)}H^4+\frac{\varepsilon_1(n+2)}{3}cH^2=0. \tag{4.11}$$

证 利用 (2.6), (4.7) 和 (4.9) 式, 容易检验

$$H\Delta H=-H\varepsilon_1e_1e_1(H)+\frac{3(n-1)\varepsilon_1}{(n+2)}(e_1(H))^2. \tag{4.12}$$

另外, 利用 (2.7) 式中的第一式,(4.2) 和 (4.8) 式, 直接计算得

$$\Delta H=\Big(nc-\frac{\varepsilon_{n+1}(n+8)n^2}{4(n-1)}H^2\Big)H,$$

将其代入 (4.12) 式便得方程 (4.10).

注意到 $e_\alpha(H)=0$, $\alpha=2,3,\cdots,n$. 取 $i=\alpha$ 和 $j=1$ 代入 (4.5) 式, 有 $\omega_\alpha^1(e_1)=0$. 故

$$\omega_i^1(e_1)=0,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{4.13}$$

在 (4.6) 式中, 取 $i=1$, $j=\alpha$ 和 $l=\beta(\neq\alpha)$, 不难得到

$$\omega_1^\beta(e_\alpha)=0,\quad \alpha,\beta=2,\cdots,n. \tag{4.14}$$

结合 (4.9), (4.13) 和 (4.14) 式有

$$e_1(H)\omega^\alpha=\frac{-\varepsilon_\alpha(n+2)H}{3}\omega_1^\alpha.$$

对其两边进行外微分即得

$$\mathrm{d}e_1(H)\wedge\omega^\alpha+e_1(H)\mathrm{d}\omega^\alpha=\frac{-\varepsilon_\alpha(n+2)}{3}(\mathrm{d}H\wedge\omega_1^\alpha+H\mathrm{d}\omega_1^\alpha). \tag{4.15}$$

一方面, 利用 (2.5) 中的第一式和 (4.13) 式得

$$\begin{cases} \mathrm{d}e_1(H)\wedge\omega^\alpha(e_1,e_\alpha)=e_1e_1(H), \\ \mathrm{d}\omega^\alpha(e_1,e_\alpha)=-\sum\limits_{i=1}^n\varepsilon_i\omega_i^\alpha\wedge\omega^i(e_1,e_\alpha)=\varepsilon_1\omega_1^\alpha(e_\alpha), \\ \mathrm{d}H\wedge\omega_1^\alpha(e_1,e_\alpha)=e_1(H)\omega_1^\alpha(e_\alpha). \end{cases} \tag{4.16}$$

另一方面, 根据 (2.4) 和 (4.4) 式, 以及 (2.5) 中的第二式有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega_1^\alpha &= \sum_{j,l=1}^n\varepsilon_{n+1}h_{\alpha j}h_{1l}\omega^j\wedge\omega^l-\sum_{j=1}^n\varepsilon_j\omega_j^\alpha\wedge\omega_1^j+\frac12\sum_{j,l=1}^n\widetilde{R}_{1jl}^\alpha\omega^j\wedge\omega^l \\ &= -\sum_j^n\varepsilon_j\omega_j^\alpha\wedge\omega_1^j+\varepsilon_{n+1}\varepsilon_1\varepsilon_\alpha(\lambda\mu-\varepsilon_{n+1}c)\omega^\alpha\wedge\omega^1, \quad \alpha>1. \end{aligned}$$

结合 (4.13) 和 (4.14) 式可得

$$\mathrm{d}\omega_1^\alpha(e_1,e_\alpha)=\varepsilon_{n+1}\varepsilon_1\varepsilon_\alpha\Big(\frac{3n^2H^2}{4(n-1)}+\varepsilon_{n+1}c\Big). \tag{4.17}$$

将 (4.16)–(4.17) 式代入 (4.15) 式可得方程 (4.11), 从而完成了引理 4.1 的证明.

回到命题 4.2 的证明, 考虑 e_1 的任意一条积分曲线 γ, 且记 H', H'' 分别为 H 沿曲线 γ 的一阶和二阶导数. 那么沿曲线 γ, (4.10) 和 (4.11) 式分别变为

$$HH''-\frac{3(n-1)}{n+2}(H')^2-\frac{\varepsilon_{n+1}\varepsilon_1(n+8)n^2}{4(n-1)}H^4+\varepsilon_1ncH^2=0 \tag{4.18}$$

和

$$HH''-\frac{3\varepsilon_1\varepsilon_\alpha+(n+2)}{n+2}(H')^2+\frac{\varepsilon_{n+1}\varepsilon_1(n+2)n^2}{4(n-1)}H^4+\frac{\varepsilon_1(n+2)}{3}cH^2=0. \tag{4.19}$$

给 (4.18) 和 (4.19) 式两边分别同乘以 $-(3\varepsilon_1\varepsilon_\alpha+(n+2))$ 和 $3(n-1)$, 然后将其相加得到下面关于 H 的常系数方程

$$C_1HH''+C_2H^4+C_3H^2=0, \tag{4.20}$$

其中

$$\begin{aligned} C_1 &= 2n-3\varepsilon_1\varepsilon_\alpha-5, \\ C_2 &= \frac{3\varepsilon_{n+1}\varepsilon_1(n-1)(n+2)n^2+\varepsilon_{n+1}(3\varepsilon_\alpha+\varepsilon_1(n+2))(n+8)n^2}{4(n-1)}, \\ C_3 &= (\varepsilon_1(n-1)(n+2)-(3\varepsilon_\alpha+\varepsilon_1(n+2))n)c. \end{aligned}$$

注意到三元数组 $(\varepsilon_{n+1},\varepsilon_1,\varepsilon_\alpha)$ 的取值只能为如下 4 种可能的情形:

$$(1,1,1), \quad (1,1,-1), \quad (1,-1,1), \quad (-1,1,1).$$

不难检验对于以上任何一种情形都有 $C_2\neq0$.

(i) 如果 $C_1=0$, 那么 (4.20) 式表明, 沿 e_1 的积分曲线 γ, H 是常数, 即在 U 上 $e_1(H)=0$, 则由 (4.7) 式可知在 U 上 $\nabla H=0$, 这是一个矛盾.

(ii) 如果 $C_1\neq0$, 给 (4.20) 式两边同乘以 $\frac{H'}{H}$, 然后沿 γ 对此结果积分可得

$$C_1(H')^2+\frac{C_2}{2}H^4+C_3H^2+C=0, \tag{4.21}$$

其中 C 是一个常数. 另外, 给 (4.18) 式两边同乘以 (-1), 然后将其与 (4.19) 式相加便有

$$\widetilde{C}_1(H')^2+\widetilde{C}_2H^4+\widetilde{C}_3H^2=0, \tag{4.22}$$

其中

$$\begin{aligned}\widetilde{C}_1&=\frac{C_1}{n+2},\\ \widetilde{C}_2&=\frac{\varepsilon_{n+1}\varepsilon_1(n+5)n^2}{2(n-1)},\\ \widetilde{C}_3&=\frac{2\varepsilon_1(1-n)}{3}c.\end{aligned}$$

此时, 给 (4.21) 式两边同乘以 $\frac{1}{n+2}$, 给 (4.22) 式两边同乘以 (-1), 将这两个结果相加, 最终得到如下关于 H 的常系数方程

$$\frac{C_2-2(n+2)\widetilde{C}_2}{2(n+2)}H^4+\frac{C_3-(n+2)\widetilde{C}_3}{n+2}H^2+\frac{C}{n+2}=0. \tag{4.23}$$

类似 $C_2\neq 0$ 的分析讨论, 不难检验

$$\frac{C_2-2(n+2)\widetilde{C}_2}{2(n+2)}\neq 0,$$

则 (4.23) 式表明平均曲率 H 是一个常系数方程的解, 所以 H 沿 e_1 的积分曲线 γ 是一个常数, 故在 U 上

$$e_1(H)=0.$$

进一步, 有 $\nabla H=0$, 矛盾.

我们完成了命题 4.2 的证明.

最后, 结合命题 4.1 和命题 4.2, 便完成了定理 1.1 的证明.

5　定理 1.2 的证明

证　根据定理 1.1, (2.7) 式可简化为

$$\varepsilon_{n+1}\|A_{n+1}\|^2-nc=0. \tag{5.1}$$

注意到形状算子 A_{n+1} 是如下 3 种可能的形式之一:

$$\text{(I)}: \begin{pmatrix}\lambda&0&\cdots&0\\1&\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda\end{pmatrix},\quad \text{(II)}: \begin{pmatrix}\lambda&0&\cdots&0\\0&\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda\end{pmatrix},\quad \text{(III)}: \begin{pmatrix}\lambda \mathrm{I}_{n_1}&0\\0&\mu \mathrm{I}_{n-n_1}\end{pmatrix}(\lambda\neq\mu).$$

下面, 将分别根据形式 (I), (II) 或 (III) 来完成定理 1.2 的证明.

情形 (i)　形状算子具有形式 (I).

首先, 容易计算得 $\mu_{A_{n+1}}(x)=(x-\lambda)^2$, 即 M_1^n 是 $N_1^{n+1}(c)$ 中的一个广义脐超曲面. 则利用类似于例 3.1 中的方法, 可选取适当的伪黎曼标准正交基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$, 其中 e_2

是类时的, 其余是类空的, 使得 A_{n+1} 具有以下形式:

$$\overline{(\mathrm{I})}:\begin{pmatrix} \lambda+\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \lambda-\dfrac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix},$$

注意到 $\varepsilon_{n+1}=1$, 则

$$\|A_{n+1}\|^2=n\lambda^2,$$

将其代入 (5.1) 式有

$$\lambda^2=c. \tag{5.2}$$

断言 $c>0$. 否则 $c=0$, 结合 (2.8) 和 (5.2) 式可知 $H=0$, 矛盾. 因为 $c>0$, 所以由 (5.2) 式得到 $\lambda=\pm\sqrt{c}$.

情形 (ii) 形状算子具有形式 (II).

根据 (5.1) 式可得

$$\varepsilon_{n+1}\lambda^2-c=0. \tag{5.3}$$

断言 $c\neq 0$. 反设 $c=0$, 则由 (5.3) 式可知 $\lambda=0$, 这意味着 $H=0$, 矛盾.

如果 $c>0$, 那么由 (5.3) 式得 $\varepsilon_{n+1}=1$(即 $r=1$) 和 $\lambda^2=c$ (非零常数). 则根据 [15, 定理 5.1] 中情形 (I) 可知 M_1^n 是 $\mathbb{S}_1^n(2c)$ 的一个开部分.

如果 $c<0$, 那么由 (5.3) 式得 $\varepsilon_{n+1}=-1$(即 $r=0$) 和 $\lambda^2=-c$(非零常数). 则根据 [15, 定理 5.1] 中情形 (I) 可知 M^n 是 $\mathbb{H}^n(2c)$ 的一个开部分.

情形 (iii) 形状算子具有形式 (III).

根据 (5.1) 式得到

$$\varepsilon_{n+1}\left(n_1\lambda^2+(n-n_1)\mu^2\right)=nc. \tag{5.4}$$

利用与情形 (ii) 类似的讨论可知 $c\neq 0$.

如果 $c>0$, 那么利用 (5.4) 式可得 $\varepsilon_{n+1}=1$(即 $r=1$), 以及

$$n_1\lambda^2+(n-n_1)\mu^2=nc. \tag{5.5}$$

另外, 由 (2.8) 式可知

$$n_1\lambda+(n-n_1)\mu=nH(\neq 0). \tag{5.6}$$

以上事实表明 λ 和 μ 是常数. 因此, 根据 [15, 定理 5.1] 中情形 (II) 便知 M_1^n 是 $\mathbb{S}_{r_1}^{n_1}(c_1)\times\mathbb{S}_{1-r_1}^{n-n_1}(c_2)$ 的一个开部分, 其中 $c_1=c+\lambda^2$, $c_2=c+\mu^2$ 和 $c+\lambda\mu=0$, 结合 (5.5) 和 (5.6) 式可以得到 $n_1c_1+(n-n_1)c_2=2nc$ 和 $n_1^2c_1+(n-n_1)^2c_2\neq n^2c$.

事实上, $n_1\neq n-n_1$. 否则, 利用 (5.5) 和 (5.6) 式易得 $\lambda^2+\mu^2=2c$ 和 $\lambda+\mu=2H$, 注意到 $c+\lambda\mu=0$, 简单计算可得 $H=0$, 矛盾.

如果 $c<0$, 那么由 (5.4) 式得到 $\varepsilon_{n+1}=-1$, 即 $r=0$. 经过与情形 $c>0$ 类似的分析, 由 [15, 定理 5.1] 中的情形 (II) 可知 M^n 是 $\mathbb{H}^{n_1}(\widetilde{c}_1)\times\mathbb{H}^{n-n_1}(\widetilde{c}_2)$ 的一个开部分, 其中 $c_1=c-\lambda^2$, $c_2=c-\mu^2$ 和 $c-\lambda\mu=0$. 因为 $\varepsilon_{n+1}=-1$, 所以 (5.5) 和 (5.6) 式变为

$$n_1\lambda^2+(n-n_1)\mu^2=-nc,\quad n_1\lambda+(n-n_1)\mu=-nH(\neq 0).$$

利用上述两个方程, 不难计算得 $n_1\widetilde{c}_1+(n-n_1)\widetilde{c}_2=2nc$, $n_1^2\widetilde{c}_1+(n-n_1)^2\widetilde{c}_2\neq n^2c$ 和 $n_1\neq n-n_1$.

我们完成了定理 1.2 的证明.

参　考　文　献

[1] 姜国英. 2-调和映照及其第一、二变分公式 [J]. 数学年刊, 1986, 7A:389–402.

[2] Sasahara T. Quasi-minimal Lagrangian surfaces whose mean curvature vectors are eigenvectors [J]. *Demonstratio Math*, 2005, 38:185–196.

[3] Arvanitoyeorgos A, Defever F, Kaimakamis F G, Papantoniou V J. Biharmonic Lorentz hypersurfaces in E_1^4[J]. *Pacific J Math*, 2007, 229:293–305.

[4] Chen B Y, Ishikawa S. Biharmonic surfaces in pseudo-Euclidean spaces [J]. *Mem Fac Sci Kyushu Univ Ser A*, 1991, 45:323–347.

[5] Chen B Y, Ishikawa S. Biharmonic pseudo-Riemannian submanifolds in pseudo-Euclidean spaces [J]. *Kyushu J Math*, 1998, 52:167–185.

[6] Defever F, Kaimakamis G, Papantoniou V. Biharmonic hypersurfaces of the 4-dimensional semi-Euclidean space E_s^4[J]. *J Math Anal Appl*, 2006, 315:276–286.

[7] 独力, 张娟. 伪黎曼空间型中的 2-调和类空子流形 [J]. 数学杂志, 2013, 33:147–152.

[8] Liu Jiancheng, Du Li, Zhang Juan. Minimality on biharmonic space-like submanifolds in pseudo-Riemannian space forms [J]. *J Geom Phys*, 2015, 92:69–77.

[9] 欧阳崇珍. 伪黎曼空间型的 2-调和类空子流形 [J]. 数学年刊, 2000, 21A:649–654.

[10] Liu Jiancheng, Du Li. Classification of proper biharmonic hypersurfaces in pseudo-Riemannian space forms [J]. *Diff Geom Appl*, 2015, 41:110–122.

[11] Sasahara T. Biharmonic submanifolds in nonflat Lorentz 3-space forms [J]. *Bull Aust Math Soc*, 2012, 85:422–432.

[12] Ferrández A, Lucas P. Classifying hypersurfaces in the Lorentz–Minkowski space with a characteristic eigenvector [J]. *Tokyo J Math*, 1992, 15:451–459.

[13] Magid M A. Lorentzian isoparametric hypersurfaces [J]. *Pacific J Math*, 1985, 118:164–197.

[14] Ferrández A, Lucas P. Hypersurfaces in the non-flat Lorentzian space forms with a characteristic eigenvector field [J]. *J Geom*, 1995, 52:10–24.

[15] Abe N, Koike N, Yamaguchi S. Congruence theorems for proper semi-Riemannian hypersurfaces in a real space form [J]. *Yokohama Math J*, 1987, 35:123–136.

[16] Chen B Y. Pseudo-Riemannian geometry, δ-invariants and applications [M]. Hackensack, NJ: World Scientific, 2011.

[17] Ou Yelin. Biharmonic hypersurfaces in Riemannian manifolds [J]. *Pacific J Math*, 2010, 248:217–232.

Classification of Proper Biharmonic Hypersurfaces in Lorentz Space Forms

DU Li[1] LIU Jiancheng[2]

[1]School of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China. E-mail: duli820210@163.com

[2]Corresponding author. College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China. E-mail: liujc@nwnu.edu.cn

Abstract In this paper, the authors classify completely proper biharmonic hypersurfaces with the minimal polynomial of the shape operator being at most of degree two in Lorentz space forms.

Keywords Lorentz space forms, Proper biharmonic hypersurfaces, Minimal polynomial, Generalized umbilical hypersurfaces

2000 MR Subject Classification 53C50

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 39 No. 1, 2018
by ALLERTON PRESS, INC., USA