数学年刊 A 辑
2018, 39(1):53–62
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2018.0006

$C_2(4,k)$ 中的强支撑可迹图*

余爱梅[1]　马仁森[1]　王可可[2]　孔将旭[3]

提要 设 $2 \leqslant h \leqslant 3$, $l > 0$, $k \geqslant 0$ 是整数, $C_h(l,k)$ 是由 h-边连通简单图组成的集合. 图 $G \in C_h(l,k)$ 当且仅当对图 G 的任意一个二边割或三边割 X, 图 $G-X$ 的每个分支都至少有 $\frac{|V(G)|-k}{l}$ 个点. 设 $e = u_1v_1$ 和 $e' = u_2v_2$ 是图 G 的两条边. 若 $e \neq e'$, $G(e,e')$ 是将图 G 中的边 $e = u_1v_1$ 和 $e' = u_2v_2$ 分别用路 $u_1v_ev_1$ 和 $u_2v_{e'}v_2$ 替换得到的图 (其中, $v_e, v_{e'}$ 是不在 $V(G)$ 中的两个新的点). 若 $e = e'$, $G(e,e')$ 是将图 G 中的边 $e = u_1v_1$ 用路 $u_1v_ev_1$ 替换得到的图, 也记作 $G(e)$. 若对任意的 $e, e' \in E(G)$, $G(e,e')$ 都有支撑 $(v_e, v_{e'})$-迹, 则称图 G 是强支撑可迹的. 作者证明了, 若图 $G \in C_2(4,k)$ 且 $|V(G)| > 5k$, 则要么图 G 是强支撑可迹图, 要么存在 $e, e' \in E(G)$, 使得 $G(e,e')$ 可以收缩成一个有限图类 $\mathcal{F}$ 中的图. 当 $k = 4$ 时, $\mathcal{F}$ 被完全确定了.

关键词 强支撑可迹图, 可折叠图, 简化图
MR (2000) 主题分类 05C
中图法分类 O157.5
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2018)01-0053-10

1 引 言

本文研究有限无环图, 未定义的符号和术语参见 [1]. 设 G 是一个图. 我们用 $\kappa'(G)$ 表示 G 的边连通度. 对于整数 $i \geqslant 1$, 令 $D_i(G) = \{v \in V(G) \mid d_G(v) = i\}$ 和 $d_i(G) = |D_i(G)|$. 若 $X \subseteq E(G)$, 则 G/X 表示把 G 中属于 X 的每条边的两个端点重合, 再删除环得到的图. 设 $G/\emptyset = G$. 若 H 是 G 的子图, 则 $G/E(H)$ 简记为 G/H. 若 H 是 G 的连通子图, 且 G/H 中的点 v_H 是收缩 H 得到的, 那么称 H 为 v_H 的原象, 记作 $PI_G(v_H)$.

设 $O(G)$ 是图 G 中所有奇度点组成的集合. 若 G 是连通的且 $O(G) = \emptyset$, 则称 G 是欧拉图. 若 G 有支撑欧拉子图, 则称 G 超欧拉图. 超欧拉图与哈密尔顿线图的研究有着非常密切的关系. 若对于 G 中的任意包含偶数个点的子集 R, G 都有一个支撑连通子图 H 使得 $O(H) = R$, 则称 G 是可折叠图. 根据定义, 若 G 是可折叠图, 则 G 也是超欧拉图且 $\kappa'(G) \geqslant 2$. 在 [2] 中, Catlin 证明了对于任意图 G, G 的每一个点都在一个唯一的极大可折叠子图中. 图 G 的简化图是将 G 中所有的非平凡的可折叠子图收缩后得到的图, 记作 G'. 如果一个图是某个图的简化, 则称这个图是简化的. 显然, 若 G 是简化的, 则 G 的任意子图也是简化的.

本文 2015 年 7 月 23 日收到, 2017 年 1 月 17 日收到修改稿.
[1]北京交通大学数学系, 北京 100044. E-mail: yuaimeimath@163.com; 14121548@bjtu.edu.cn
[2]Department of Mathematics, Embry-Riddle Aeronautical University, Precott, Arizona 86301, USA. E-mail: wangkk87@gmail.com
[3]中国计量大学理学院, 杭州 310018. E-mail: kongjiangxu@163.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11371193, No. 11701541), 北京交通大学基本科研业务费 (No. 2015JBM107), 北京高等学校青年英才计划项目 (No. YETP0573), 高等学校学科创新引智计划 (No. B16002) 和浙江省自然科学基金 (No. LQ17A010005) 的资助.

对于 G 的任意两个点 u 和 v, (u,v)-迹指的是 G 的一条从点 u 到点 v 的迹. 若 $u=v$, 则 (u,v)-迹是 G 的一个欧拉子图. 对于 G 的任意两条边 e 和 e', (e,e')-迹指的是 G 的一条从边 e 出发到边 e' 结束的迹. 若一条 (e,e')-迹包含了 G 的所有的点, 则称该 (e,e')-迹是支撑的. 若对于图 G 的任意两条边 e_1 和 e_2, G 都有一条支撑的 (e_1,e_2)-迹, 则称 G 是支撑可迹图.

设 $e=u_1v_1$ 和 $e'=u_2v_2$ 是图 G 的两条边. 若 $e\neq e'$, 则 $G(e,e')$ 是将图 G 中的边 $e=u_1v_1$ 和 $e'=u_2v_2$ 分别用路 $u_1v_ev_1$ 和 $u_2v_{e'}v_2$ 替换得到的图 (其中, $v_e,v_{e'}$ 是不在 $V(G)$ 中的两个新的点). 若 $e=e'$, $G(e,e')$ 是将图 G 中的边 $e=u_1v_1$ 用路 $u_1v_ev_1$ 替换得到的图, 也记作 $G(e)$. 若对于任意的 $e,e'\in E(G)$, $G(e,e')$ 都有支撑 $(v_e,v_{e'})$-迹, 则称 G 是强支撑可迹图. 因为 e 和 e' 可能相同, 所以强支撑可迹图是一类特殊的超欧拉图. 根据定义, 强支撑可迹图也是支撑可迹图. Luo 等人在 [3](也可参见 [4] 的定理 8) 中证明了, 任意的 4-边连通图都是强支撑可迹图. 因此, 对强支撑可迹图的研究应该集中于边连通度小于 4 的图. 因为 Wagner 图 W_8 是支撑可迹图但不是强支撑可迹图 [5], 所以对边连通度不超过 3 的图来说, 强支撑可迹图和支撑可迹图是不等价的.

强支撑可迹图有很多应用. Shao 在 [6] 中说明了强支撑可迹图在哈密尔顿连通线图的研究中的应用. 对于任意的 $e,e'\in E(G)$, 图 $G^*(e,e')$ 是在图 $G(e,e')$ 中添加一个新的点 z 和两条新边 zv_e,$zv_{e'}$ 得到的图. 因此, $G(e,e')$ 有支撑 $(v_e,v_{e'})$-迹当且仅当 $G^*(e,e')$ 是超欧拉图. Pulleyblank 在 [7] 中证明了, 判断 3-边连通图是否是超欧拉图是 NP- 完全问题. 因此, 判断 3-边连通图是否是强支撑可迹图至少跟判断它是否是超欧拉图一样困难.

因为判断一个图是否是超欧拉图是 NP-完全问题, 所以研究那些能完全刻画其中的超欧拉图的图类是非常重要的. Catlin 和 Li 最早开始这方面的研究 [8]. 设 $2\leqslant h\leqslant 3$,$l>0$,$k\geqslant 0$ 是整数, $C_h(l,k)$ 是 h-边连通简单图组成的集合. 图 $G\in C_h(l,k)$ 当且仅当对于 G 的任意一个二边割或三边割 X, $G-X$ 的每个分支都至少有 $\frac{|V(G)|-k}{l}$ 个顶点. 关于该图类, 已有一系列的研究论文发表, 这些论文的发表不断地推动着对该图类深入的研究 (参见 [8–14]).

本文主要研究 $C_2(4,k)$ 中的强支撑可迹图. 为了证明我们的结论, 先给出一些定义和符号.

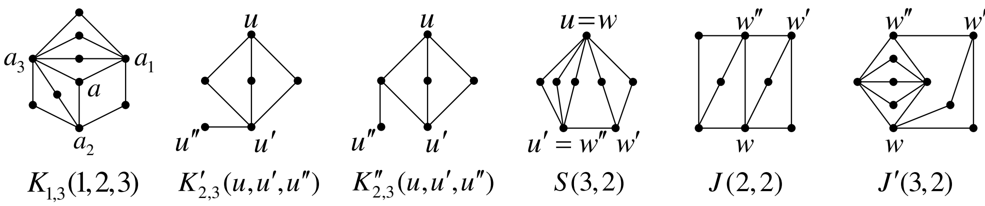

图 1 定义 1.1 中的图的特例

定义 1.1 设 s_1,s_2,s_3,t,m,l 是非负整数且 $t,m,l\geqslant 1$. 设 $M\cong K_{1,3}$ 且 $V(M)=\{a,a_1,a_2,a_3\}$, 其中 a 为中心点. 图 $K_{1,3}(s_1,s_2,s_3)$ 是在 M 中增加 s_i 个以 $\{a_i,a_{i+1}\}$ 为邻点的点得到的图, 其中 $i\equiv 1,2,3(\mathrm{mod}\ 3)$. 图 $K_{2,t}(u,u')$ 表示 $K_{2,t}$, 其中两个不相邻的 t 度点分别记为 u,u'. 图 $K'_{2,t}(u,u',u'')$ 是在 $K_{2,t}(u,u')$ 中增加一个新的点 u'' 和一条新的边 $u'u''$ 得到的图. 因此, 在 $K'_{2,t}(u,u',u'')$ 中, 点 u'' 的度是 1, 点 u 的度是 t. 图 $K''_{2,t}(u,u',u'')$ 是在 $K_{2,t}(u,u')$ 中增加一个新的点 u'', 并且将它与 $K_{2,t}$ 中的一个 2 度点相连得到的图. 因此, 在 $K''_{2,t}(u,u',u'')$ 中, 点 u'' 的度是 1, 点 u 和 u' 的度都是 t. 图 $S(m,l)$ 是将 $K_{2,m}(u,u')$ 和 $K'_{2,l}(w,w',w'')$ 的点 u 和 w, w'' 和 u' 分别重合得到的图. 图 $J(m,l)$ 是把 $K_{2,m+1}$ 中一条边的两个端点和 $K'_{2,l}(w,w',w'')$ 中的两个点 w,w'' 分别重合得到的图. 图 $J'(m,l)$ 是

把 $K_{2,m+2}$ 中的两个 2 度点和 $K'_{2,l}(w,w',w'')$ 中的点 w,w'' 分别重合得到的图. 我们把 $K'_{2,t}(u,u',u'')$ 和 $K''_{2,t}(u,u',u'')$ 简写为 $K'_{2,t}$ 和 $K''_{2,t}$. 图 1 给出了定义 1.1 中图的一些特例.

设 $B>0$ 是整数, $\mathcal{S}_1(B)$ 是简化图 G 组成的集合. 图 G 满足以下条件: $|V(G)|\leqslant B$, $|D_2(G)\cup D_3(G)|\leqslant 6$ 且存在 $u,v\in V(G)$ 使得 G 没有支撑 (u,v)-迹. 此外, 若 $|D_2(G)\cup D_3(G)|=5$, 则 $|\{u,v\}\cap D_2(G)|\geqslant 1$; 若 $|D_2(G)\cup D_3(G)|=6$, 则 $|\{u,v\}\cap D_2(G)|=2$. 设 $\mathcal{S}(B)=\{G: 存在\ e,e'\in E(G), 使得\ (G(e,e'))'\in\mathcal{S}_1(B)\}$. 设 $L_1,L_2,\cdots,L_5$ 为图 2 中的图, 令

$$\mathcal{F}=\{K_{2,2},\ K_{2,3},\ K_{2,4},\ K_{2,5}\}\cup\{S(1,1),\ S(3,1),\ S(2,2),\ K_{1,3}(1,1,0)\}\cup\{C_6,\ L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_5\}.$$

本文的主要结论如下.

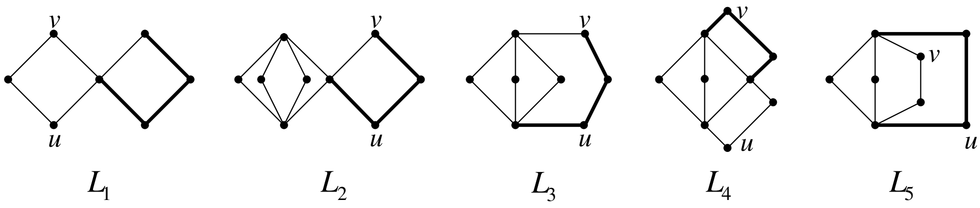

图 2　图 L_1, L_2, L_3, L_4, L_5

定理 1.1　设 $G\in C_2(4,k)$ 是简单图, 且其阶数 $n>5k$. 那么, 要么 G 是强支撑可迹图, 要么 $G\in\mathcal{S}(B)$, 其中 $B=\max\{7,6+k\}$.

定理 1.2　设 $G\in C_2(4,4)$ 是简单图, 且其阶数 $n>20$. 那么, 要么 G 是强支撑可迹图, 要么存在 $e,e'\in E(G)$, 使得 $G(e,e')$ 的简化属于 $\mathcal{F}$.

2　引　理

用 $F(G)$ 表示使得 G 满足增加边后有两个边不交的支撑树时需要增加的最少的边数. 下面的引理总结了可折叠图和简化图的一些性质.

引理 2.1　设 G 是一个连通图, G' 是 G 的简化图. 那么下面的结论成立.

(i) (见文 [2])　完全图 K_n ($n=1$ 或 $n\geqslant 3$) 和 C_2 都是可折叠图.

(ii) (见文 [2] 中的定理 3 和 8)　设 H 是图 G 的可折叠子图, 则 G 是可折叠图当且仅当 G/H 是可折叠图. 特别地, G 是可折叠图当且仅当 $G'=K_1$.

(iii) (见文 [15] 中的引理 2.3)　若图 G 是简化的, 则 $F(G)=2|V(G)|-|E(G)|-2$.

(iv) (见文 [15] 中的定理 1.3)　若 $F(G)\leqslant 2$, 则 $G'\in\{K_1,K_2\}\cup\{K_{2,t}\,|\,t\geqslant 1\}$. 其中, $F(K_1)=0$, $F(K_2)=1$ 和 $F(K_{2,t})=2$.

引理 2.2 [5]　设 $e,e'\in E(G)$, H 是图 $G(e,e')$ 的可折叠子图, v_H 表示 $G(e,e')/H$ 中由 H 收缩得到的点. 令

$$v'_e=\begin{cases}v_e, & 若 v_e\notin V(H),\\ v_H, & 若 v_e\in V(H)\end{cases}\quad 和\quad v'_{e'}=\begin{cases}v_{e'}, & 若 v_{e'}\notin V(H),\\ v_H, & 若 v_{e'}\in V(H).\end{cases}$$

若 $G(e,e')/H$ 有一条支撑 $(v'_e,v'_{e'})$-迹, 则 $G(e,e')$ 一定有一条支撑 $(v_e,v_{e'})$-迹.

引理 2.3 [11,引理 2.2]　若图 G 是可折叠图, 那么对于任意的两个点 $u,v\in V(G)$, G 都有一条支撑 (u,v)-迹.

若图 G 至少含有一条边, 则称 G 是非平凡的. 若 X 是图 G 的边割集, 且 $G-X$ 至少有两个非平凡的分支, 则称 X 为 G 的基本边割集. 若 G 没有边数小于 k 的基本边割集, 则称 G 为基本 k-边连通的.

引理 2.4 [16,定理 3.1(iii)] 设 G 是基本 4-边连通图且 G 满足 $\delta(G)\geqslant 2$ 和 $|D_2(G)\cup D_3(G)|\leqslant 5$. 若 $|D_2(G)|\geqslant 2$, 那么对于 $D_2(G)$ 的任意两个不同的点 u,v, G 有一条支撑 (u,v)-迹.

设 $\mathcal{H}=\{K_1,\ K_2,\ K_{2,t},\ K'_{2,t},\ K''_{2,t},\ K_{1,3}(s_1,s_2,s_3),\ S(m,l),\ J(m,l),\ J'(m,l),\ P(10)\}$, 其中 s_1,s_2,s_3,t,m,l 是非负整数且 $t,m,l\geqslant 1$, $P(10)$ 是 Petersen 图. 令 $\mathcal{F}_0=\{K_{1,3}(2,1,0),$ $K_{1,3}(3,1,0),\ K_{1,3}(2,1,1),\ K_{1,3}(2,2,1)\}\cup\{S(2,1),\ S(4,1),\ S(3,2),\ S(3,3)\}\cup\{J(2,2),\ J(3,2),$ $J(3,3)\}\cup\{J'(2,1),\ J'(2,2),\ J'(2,3)\}$, $\mathcal{F}_1=\{S(1,1),\ S(3,1),\ S(2,2),\ K_{1,3}(1,1,0)\}$.

引理 2.5 [17] 设 G 是连通简化图. 若 $|V(G)|\leqslant 11$, $F(G)\leqslant 3$, 则 $G\in\mathcal{H}$.

引理 2.6 设 G 是 2-边连通简化图且 $|V(G)|\leqslant 10$, $F(G)=3$. 若

$$d_2(G)\geqslant 4 \text{ 且 } d_2(G)+d_3(G)\leqslant 6, \tag{2.1}$$

则 $G\in\mathcal{F}_0\cup\mathcal{F}_1$.

证 设 G 是满足引理 2.6 假设的图. 由引理 2.5, $G\in\mathcal{H}$. 由 $F(G)=3$ 和引理 2.1(iv), $G\notin\{K_1,K_2,K_{2,t}\,|\,t\geqslant 1\}$. 因为 $\kappa'(G)\geqslant 2$, 所以 $G\notin\{K'_{2,t},K''_{2,t}\,|\,t\geqslant 1\}$. 因为 $d_2(G)\geqslant 4$, 所以 $G\neq P(10)$. 因此, $G\in\{K_{1,3}(s_1,s_2,s_3),\ S(m,l),\ J(m,l),\ J'(m,l)\}$. 下面我们分 4 种情况讨论.

情况 1 $G\in\{K_{1,3}(s_1,s_2,s_3)\mid s_1\geqslant s_2\geqslant s_3\geqslant 0\}$.

注意 $\kappa'(G)\geqslant 2$. 若 $s_3=0$, 则 $s_1\geqslant s_2\geqslant 1$. 若 $s_3=0$ 且 $s_2\geqslant 2$, 则 $d_2(G)+d_3(G)>6$, 与 (2.1) 矛盾. 若 $s_3=0$ 且 $s_2=1$, 由 (2.1) 知 $s_1\leqslant 3$. 因此, $G\in\{K_{1,3}(1,1,0),K_{1,3}(2,1,0),$ $K_{1,3}(3,1,0)\}$.

若 $s_3=1$ 且 $s_2=1$, 由 (2.1) 知 $s_1=2$. 因此, $G=K_{1,3}(2,1,1)$. 若 $s_3=1$, $s_2\geqslant 2$, 由 (2.1) 知 $s_2=s_1=2$. 因此, $G=K_{1,3}(2,2,1)$. 若 $s_3\geqslant 2$, 则 $d_2(G)+d_3(G)>6$, 与 (2.1) 矛盾.

因此, 若 $G\in\{K_{1,3}(s_1,s_2,s_3)\,|\,s_1\geqslant s_2\geqslant s_3\geqslant 0\}$, 则

$$G\in\{K_{1,3}(1,1,0),\ K_{1,3}(2,1,0),\ K_{1,3}(3,1,0),\ K_{1,3}(2,1,1),\ K_{1,3}(2,2,1)\}.$$

情况 2 $G\in\{S(m,l)\mid m\geqslant l\geqslant 1\}$.

由 (2.1), 若 $l=1$, 则 $1\leqslant m\leqslant 4$; 若 $l=2$, 则 $2\leqslant m\leqslant 3$; 若 $l\geqslant 3$, 则 $l=m=3$. 因此, 在这种情况下,

$$G\in\{S(1,1),\ S(2,1),\ S(3,1),\ S(4,1),\ S(2,2),\ S(3,2),\ S(3,3)\}.$$

情况 3 $G\in\{J(m,l)\mid m\geqslant l\geqslant 1\}$.

由 (2.1), 若 $l=1$, 则 $1\leqslant m\leqslant 3$; 若 $l=2$, 则 $2\leqslant m\leqslant 3$; 若 $l\geqslant 3$, 则 $l=m=3$. 因此, 在这种情况下,

$$G\in\{J(1,1),\ J(2,1),\ J(3,1),\ J(2,2),\ J(3,2),\ J(3,3)\}.$$

注意 $J(1,1)\cong K_{1,3}(1,1,0)$, $J(2,1)\cong K_{1,3}(2,1,0)$, $J(3,1)\cong K_{1,3}(3,1,0)$.

情况 4 $G\in\{J'(m,l)\mid m,l\geqslant 1\}$.

若 $m=1$ 或 $m\geqslant 3$, 则 $d_2(G)+d_3(G)>6$, 与 (2.1) 矛盾. 因此, $m=2$. 由 (2.1) 知 $1\leqslant l\leqslant 3$. 因此, $G\in\{J'(2,1),\ J'(2,2),\ J'(2,3)\}$. 证毕.

引理 2.7 设 G 是 2-边连通的简化图且 $|V(G)| \leqslant 10$,

$$V(G) = D_2(G) \cup D_4(G) \text{ 和 } d_2(G) = 6. \tag{2.2}$$

设 $\mathcal{F}_2 = \{C_6, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5\}$. 若存在 $D_2(G)$ 中的两个不相邻的点 $u, v(u \neq v)$, 使得 G 没有支撑 (u,v)-迹, 则 $G \in \mathcal{F}_2$.

证 设 G 是满足引理 2.7 假设的图. 下面我们分两种情况证明.

情况 1 $D_2(G)$ 不是独立集.

设 $x, y \in D_2(G)$, $xy \in E(G)$. 设 $x', y' \in V(G)$, $xx', yy' \in E(G)$. 因为 G 是简化的, 由引理 2.1(i), G 不含子图 K_3. 因此, $x' \neq y'$. 设 $G_1 = G[\{x,y\}] = K_2$, G_2 表示图 $G - \{xx', yy'\}$ 的两个分支. 由 (2.2) 知 $d_{G_2}(x')$ 和 $d_{G_2}(y')$ 都是奇数. 因为连通图的奇度点的个数一定是偶数, 所以 G_2 是一个连通图. 由引理 2.1(iii), $F(G_1) = F(K_2) = 1$ 且 $F(G_1) + F(G_2) = 2|V(G)| - |E(G)| - 2 = F(G) = 4$. 因此, G_2 是一个简化图且满足 $F(G_2) = 3$ 和 $|V(G_2)| \leqslant 8$.

子情况 1.1 $d_G(x') = d_G(y') = 2$.

在这种子情况下, $V(G_2) = D_1(G_2) \cup D_2(G_2) \cup D_4(G_2)$, $d_1(G_2) = 2$, $d_2(G_2) = 2$, $d_4(G_2) \leqslant 4$. 由引理 2.5, $G_2 = K'_{2,1}$. 因此, $G = C_6$. 容易证明, 存在两个不相邻的点 $u, v \in D_2(C_6)$ $(u \neq v)$, 使得 C_6 没有支撑 (u,v)-迹.

子情况 1.2 $d_G(x') = 2$, $d_G(y') = 4$.

在这种子情况下, $V(G_2) = \bigcup\limits_{i=1}^{4} D_i(G_2)$, $d_1(G_2) = 1$, $d_2(G_2) = 3$, $d_3(G_2) = 1$ 且 $d_4(G_2) \leqslant 3$. 由引理 2.5, $G_2 \in \{K_{1,3}(1,0,0), K_{1,3}(3,0,0), K'_{2,3}, K''_{2,4}\}$.

子情况 1.3 $d_G(x') = d_G(y') = 4$.

在这种子情况下,

$$V(G_2) = \bigcup_{i=2}^{4} D_i(G_2), \quad d_2(G_2) = 4, \quad d_3(G_2) = 2 \text{ 且 } d_4(G_2) \leqslant 2. \tag{2.3}$$

由引理 2.5, $G_2 \in \{K_{1,3}(s_1,s_2,s_3), S(m,l), J(m,l), J'(m,l)\}$, 其中 s_1, s_2, s_3, m 和 l 都是非负整数且 $s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3 \geqslant 0$, $m, l \geqslant 1$. 由引理 2.6 的证明, $G_2 \in \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$. 由 (2.3), 容易验证

$$G_2 \in \{K_{1,3}(1,1,0), K_{1,3}(2,1,0), K_{1,3}(2,1,1), S(2,1), S(2,2), J(2,2), J'(2,1)\}.$$

对于情况 1.2 和 1.3, G 是将 G_2 的点 x' 和 y' 用一条长为 3 的路连接得到的图. 容易证明, 存在两个不相邻的点 $u, v \in D_2(G)$ $(u \neq v)$, 使得 G 没有支撑 (u,v)-迹. 经验证可知 $G \in \mathcal{F}_2$.

情况 2 $D_2(G)$ 是独立集.

在这种情况下, $G_2 = G - D_2(G)$ 是简化图且 $|V(G_2)| \leqslant 4$. 由引理 2.1(iii), $F(G_2) = F(G) = 4$. 由引理 2.1(i), G 和 G_2 都是不含子图 K_3 的简单图. 因此, 由引理 2.1(iii), 经验证可知 $G_2 \in \{3K_1, K_1 \cup K_{1,2}, 2K_2\}$.

设 $D_2(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$. 由 (2.2), 对任意的 $v \in V(G_2)$, $d_G(v) = 4$. 设 H_1,H_2,H_3 和 H_4 是如图 3 所示的图. 下面我们分 3 种子情况证明.

子情况 2.1 $G_2 = 3K_1$.

设 $V(G_2) = \{v_7, v_8, v_9\}$, $N_G(v_7) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. 因为 G 是简单图, 所以 $|N_G(v_7) \cap N_G(v_8)| = 2$. 不失一般性, 我们设 $N_G(v_8) = \{v_1, v_2, v_5, v_6\}$. 那么 $N_G(v_9) = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$. 因此, $G = H_1$.

子情况 2.2 $G_2 = K_1 \cup K_{1,2}$.

设 $V(G_2)=\{v_7,v_8,v_9,v_{10}\}$, $d_{G_2}(v_7)=0$, $d_{G_2}(v_8)=d_{G_2}(v_{10})=1$, $d_{G_2}(v_9)=2$. 假设 $N_G(v_8)\cap D_2(G)=\{v_1,v_2,v_3\}$. 因为 G 不含子图 K_3, 设 $N_G(v_9)\cap D_2(G)=\{v_4,v_5\}$. 若 $v_6\notin N_G(v_{10})$, 那么 G 不是简单图, 与 G 是一个简化图矛盾. 因此 $v_6\in N_G(v_{10})$. 不失一般性, 设 $N_G(v_{10})\cap D_2(G)=\{v_2,v_3,v_6\}$, 则 $N_G(v_7)=\{v_1,v_4,v_5,v_6\}$. 因此, $G=H_2$.

子情况 2.3 $G_2=2K_2$.

设 $V(G_2)=\{v_7,v_8,v_9,v_{10}\}$ 且对任意的 $7\leqslant i\leqslant 10$, $d_{G_2}(v_i)=1$. 设 $v_7v_8,v_9v_{10}\in E(G_2)$, $N_G(v_7)\cap D_2(G)=\{v_1,v_2,v_3\}$. 因为 G 不含子图 K_3, 所以 $N_G(v_8)\cap D_2(G)=\{v_4,v_5,v_6\}$. 由对称性, $|N_G(v_7)\cap N_G(v_9)|=3$ 或 2. 若 $|N_G(v_7)\cap N_G(v_9)|=3$, 则 $G=H_3$. 若 $|N_G(v_7)\cap N_G(v_9)|=2$, 则 $G=H_4$.

经验证可知, 对于任意两个不相邻的点 $u,v\in D_2(G)$ $(u\neq v)$, G 都有支撑 (u,v)-迹. 根据假设, $G\neq H_i$ $(1\leqslant i\leqslant 4)$. 证毕.

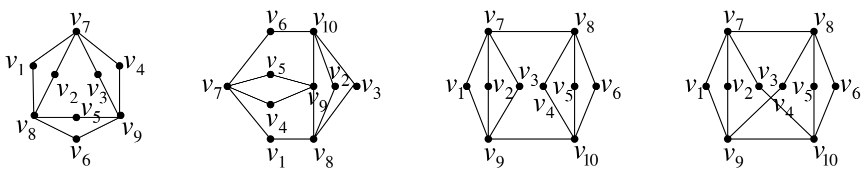

图 3 图 H_1,H_2,H_3,H_4

引理 2.8 设图 G 是一个 2-边连通的简化图, 则 G 一定有一个基本边割集.

证 设 G 是满足引理 2.8 假设的图. 由引理 2.1(i), G 是不含子图 K_3 的简单图且 $\kappa'(G)\geqslant 2$. 设 $u\in V(G)$, 则存在 G 中的三个不同的顶点 v,w,x 使得 $uv,uw,xv\in E(G)$. 易知 $wuvx$ 是 G 中的与 P_4 同构的子图. 因此, $E(G)-\{uw,vx\}$ 是 G 的一个基本边割集. 证毕.

3 定理 1.1 和 1.2 的证明

在这部分中, 若 $G\in C_2(4,k)$ 是简单图且阶数 $n>5k$, 则对于任意的 $e,e'\in E(G)$, 我们总是用 G' 表示图 $G(e,e')$ 的简化图且令 $n'=|V(G')|$. 假设 v'_e 和 $v'_{e'}$ 如引理 2.2 中所定义. 若 v_e(或 $v_{e'}$) 不在 $G(e,e')$ 的可折叠子图中, 则 $v'_e=v_e$(或 $v'_{e'}=v_{e'}$). 若 $e\neq e'$, $v'_e=v_e$ 且 $v'_{e'}=v_{e'}$, 则 v'_e 和 $v'_{e'}$ 是不相邻的 2 度点且 $v'_e\neq v'_{e'}$. 令 $c=|(D_2(G')\cup D_3(G'))-\{v_e,v_{e'}\}|$ 且 $(D_2(G')\cup D_3(G'))-\{v_e,v_{e'}\}=\{v_1,v_2,\cdots,v_c\}$. 设 $H[v_i]=V(PI_{G(e,e')}(v_i))$ 且 $H(v_i)=H[v_i]-\{v_e,v_{e'}\}$. 为了简化, 在这一部分中我们记 $d_i=d_i(G')=|D_i(G')|$.

引理 3.1 设 $G\in C_2(4,k)$ 是简单图且其阶数 $n>5k$. 那么, 下面的结论成立:

(i) G' 是不含 K_3 的简单图, 且 $\kappa'(G')\geqslant 2$;

(ii) $c\leqslant 4$ 和 $|H(v_i)|\geqslant \frac{n-k}{4}$, 其中 $1\leqslant i\leqslant c$.

(iii) $d_2+d_3\leqslant 6$. 若 $d_2+d_3=6$, $|\{v_e,v_{e'}\}\cap D_2(G')|=2$. 若 $d_2+d_3=5$, $|\{v_e,v_{e'}\}\cap D_2(G')|\geqslant 1$.

证 由 $G\in C_2(4,k)$ 和引理 2.1(i), (i) 成立. 由 $d_{G(e,e')}(v_e)=d_{G(e,e')}(v_{e'})=2$, 若 (ii) 成立, 则 (iii) 成立. 现在证明 (ii) 成立. 对任意的 $1\leqslant i\leqslant c$, 设 $X_i=\{xy\in E(G')\,|\,x\in H[v_i],\,y\in V(G')-H[v_i]\}$. 选取任意的 $xy\in X_i$ 满足 $x\in H[v_i]$ 和 $y\in V(G')-H[v_i]$. 注意 $d_{G(e,e')}(v_e)=d_{G(e,e')}(v_{e'})=2$. 若 $x\in\{v_e,v_{e'}\}$, 则 $\kappa'(PI_{G(e,e')}(v_i))=1$, 与 $PI_{G(e,e')}(v_i)$

是一个可折叠图矛盾. 因此, $x \notin \{v_e, v_{e'}\}$. 对任意的 $xy \in X_i$, 若 $y \in \{v_e, v_{e'}\}$, 选取 $y' \in V(G')$ 使得 $yy' \in E(G')$, 并用 xy' 代替 xy. 那么, 我们从 X_i 得到 G 的 2-边割或 3-边割. 因为 $G \in C_2(4,k)$, 所以 $|H(v_i)| \geqslant \frac{n-k}{4}$. 若 $c \geqslant 5$, 由 $n > 5k$, 则

$$n \geqslant \sum_{i=1}^{c} |H(v_i)| \geqslant \frac{5(n-k)}{4} = n + \frac{n-5k}{4} > n + \frac{5k-5k}{4} = n,$$

矛盾. 因此, $c \leqslant 4$. 证毕.

定理 1.1 的证明 设 $G \in C_2(4,k)$ 是简单图且其阶数 $n > 5k$. 假设 G 不是强支撑可迹图. 那么存在 $e, e' \in E(G)$ 使得 $G(e,e')$ 没有支撑的 $(v_e, v_{e'})$-迹. 由引理 2.2,

$$G'\text{没有支撑的}(v'_e, v'_{e'})\text{-迹}. \tag{3.1}$$

注意若 v_e(或 $v_{e'}$) 不在 $G(e,e')$ 的可折叠子图中, 那么 $v'_e = v_e$(或 $v'_{e'} = v_{e'}$). 由引理 3.1(iii), 只需要证明 $n' \leqslant B$, 其中 $B = \max\{7, 6+k\}$.

论断 1 设 $\mathcal{F}_3 = \{K_{2,2}, K_{2,3}, K_{2,4}, K_{2,5}\}$. 若 $F(G') \leqslant 2$, 则 $G' \in \mathcal{F}_3 \subseteq \mathcal{S}_1(7)$.

若 $F(G') \leqslant 2$, 由引理 2.1(iv), $G' \in \{K_1, K_2\} \cup \{K_{2,t} \,|\, t \geqslant 1\}$. 若 $G' = K_1$, 由引理 2.1(ii), $G(e,e')$ 是可折叠图. 那么由引理 2.3, $G(e,e')$ 有一条支撑的 $(v'_e, v'_{e'})$-迹, 与 (3.1) 矛盾. 因此, $G' \neq K_1$. 由引理 3.1(i), $\kappa'(G') \geqslant 2$. 因此, $G' \notin \{K_2, K_{2,1}\}$. 又由引理 3.1(iii), $G' \in \{K_{2,t} \,|\, 2 \leqslant t \leqslant 6\}$. 若 $G' = K_{2,6}$, 由引理 3.1(iii), $|\{v_e, v_{e'}\} \cap D_2(G')| = 2$. 容易证明, G' 有一条支撑的 $(v_e, v_{e'})$-迹, 与 (3.1) 矛盾. 因此, $G' \neq K_{2,6}$, $G' \in \mathcal{F}_3$. 容易验证 $\mathcal{F}_3 \subseteq \mathcal{S}_1(7)$. 论断 1 证毕.

论断 2 若 $F(G') \geqslant 3$, 则 $d_2 + d_3 \leqslant 6$, $d_2 \geqslant 4$ 且对任意的 $i = 1$ 或 $i \geqslant 7$, $d_i = 0$, 而且 $(d_2, d_3, d_5, d_6) \in \{(4,2,0,0), (5,0,0,0), (5,1,1,0), (6,0,0,0), (6,0,2,0), (6,0,0,1)\}$.

由引理 2.1(iii), $F(G') = 2|V(G')| - |E(G')| - 2$. 因为 $\kappa'(G') \geqslant 2$, 所以 $d_1 = 0$, $|V(G')| = \sum\limits_{i \geqslant 2} d_i$ 且 $2|E(G')| = \sum\limits_{i \geqslant 2} i d_i$. 由 $F(G') \geqslant 3$,

$$2F(G') = 4|V(G')| - 2|E(G')| - 4 = 4\sum_{i \geqslant 2} d_i - \sum_{i \geqslant 2} i d_i - 4 \geqslant 6,$$

以及

$$2d_2 + d_3 \geqslant 10 + \sum_{i \geqslant 5} (i-4) d_i.$$

因此

$$2d_2 + d_3 \geqslant 10 \text{ 且 } \sum_{i \geqslant 5} (i-4) d_i \leqslant 2d_2 + d_3 - 10. \tag{3.2}$$

由引理 3.1(iii) 和 (3.2), $d_2 + d_3 \leqslant 6$, $d_2 \geqslant 4$ 且对任意的 $i \geqslant 7$, $d_i = 0$, 而且 $(d_2, d_3, d_5, d_6) \in \{(4,2,0,0), (5,0,0,0), (5,1,1,0), (6,0,0,0), (6,0,2,0), (6,0,0,1)\}$. 论断 2 证毕.

由论断 2, 引理 2.1(iii) 和 3.1(iii), 立刻得到下面的论断.

论断 3 若 $F(G') \geqslant 3$, 则 G' 一定属于以下四种类型之一:

类型 A: $V(G') = D_2(G') \cup D_4(G')$, $d_2 = 5$, $F(G') = 3$ 且 $|\{v_e, v_{e'}\} \cap D_2(G')| = 2$;

类型 B: $V(G') = D_2(G') \cup D_4(G')$, $d_2 = 5$, $F(G') = 3$ 且 $|\{v_e, v_{e'}\} \cap D_2(G')| = 1$;

类型 C: $V(G') = D_2(G') \cup D_4(G')$, $d_2 = 6$, $F(G') = 4$ 且 $|\{v_e, v_{e'}\} \cap D_2(G')| = 2$;

类型 D: $V(G') = \bigcup\limits_{i=2}^{6} D_i(G')$, $d_2 \geqslant 4$, $d_2 + d_3 = 6$, $F(G') = 3$ 且 $|\{v_e, v_{e'}\} \cap D_2(G')| = 2$.

论断 4 若 G' 属于类型 A, 则 $G' = S(1,1)$.

假设 G' 满足论断 4 的条件, 则

$$V(G')=D_2(G')\cup D_4(G'),\quad |D_2(G')|=5\text{且}|\{v_e,v_{e'}\}\cap D_2(G')|=2. \tag{3.3}$$

因为 G' 没有支撑的 $(v_e,v_{e'})$-迹, 由引理 2.4, G' 不是基本 4-边连通图. 因为 G' 是一个 2-边连通的简化图, 由引理 2.8, G' 有一个基本 2-边割或 3-边割. 由 (3.3), G' 是欧拉图, 从而 G' 没有基本 3-边割. 因此, G' 中至少存在一个基本 2-边割.

设 X 是 G' 的基本 2-边割. 设 G_1 和 G_2 是 $G'-X$ 的两个连通分支. 设 $k\in\{1,2\}$. 由 (3.3), G_k 是 G' 的连通简化子图且满足 $|E(G_k)|\geqslant 1$. 根据引理 2.1(iii),

$$\begin{aligned}F(G_1)+F(G_2)&=\sum_{i=1}^{2}(2|V(G_i)|-|E(G_i)|-2)\\&=2(|V(G_1)|+|V(G_2)|)-(|E(G_1)+|E(G_2)|+2)-2\\&=2|V(G')|-|E(G')|-2\\&=F(G')\\&=3.\end{aligned}$$

假设 $F(G_1)\leqslant F(G_2)$. 那么, $F(G_1)=0$ 或 1. 根据引理 2.1(iv), $G_1\in\{K_1,K_2\}$. 因为 $|E(G_1)|\geqslant 1$, 所以 $G_1=K_2$. 因此, $F(G_1)=1$, $F(G_2)=2$. 由引理 2.1(iv), $G_2=K_{2,t}$, 其中 $t\geqslant 1$.

设 $V(G_1)=\{x,y\}$ 且 $xy,xx',yy'\in E(G)$. 因为 G' 不含子图 K_3, 所以 $x'\neq y'$. 因此, G_2 恰有两个奇度点, 且奇度点的度是 1 或 3. 因此, $G_2\in\{K_{2,1},K_{2,3}\}$, 从而 $G'\in\{S(1,1),S(3,1)\}$. 经验证可知, 存在两个不相邻的点 $u,v\in D_2(S(1,1))$ $(u\neq v)$ 使得 $S(1,1)$ 没有支撑的 (u,v)-迹, 且对任意两个不相邻的顶点 $u,v\in D_2(S(3,1))$ $(u\neq v)$, $S(3,1)$ 有一条支撑的 (u,v)-迹. 因此, $G'=S(1,1)$. 论断 4 证毕.

论断 5 若 G' 属于类型 B,C 或 D, 则 $n'=|V(G')|\leqslant 6+k$.

设 $c=|(D_2(G')\cup D_3(G'))-\{v_e,v_{e'}\}|$, $c'=d_4+d_5+d_6$. 若 G' 属于类型 B,C 或 D, 则 $c=4$. 由引理 3.1(ii),

$$n\geqslant\sum_{i=1}^{4}|H(v_i)|+c'\geqslant\frac{4(n-k)}{4}+c'=n-k+c'.$$

因此, $c'\leqslant k$. 那么, $n'\leqslant\sum\limits_{i=2}^{6}d_i=6+c'\leqslant 6+k$. 论断 5 证毕.

根据论断 1,3,4 和 5, 下面的论断成立.

论断 6 要么 $G'\in\{K_{2,2},K_{2,3},K_{2,4},K_{2,5},\ S(1,1)\}$, 要么 G' 属于类型 B,C 或 D 且 $n'\leqslant 6+k$.

若 $G'\in\{K_{2,2},\ K_{2,3},K_{2,4},\ K_{2,5},\ S(1,1)\}$, 则 $n'\leqslant 7$. 因此, $n'\leqslant B=\max\{7,6+k\}$. 定理 1.1 证毕.

定理 1.2 的证明 设 G 满足定理 1.2 的假设. 由定理 1.1 和 $k=4$, 若 G 不是强支撑可迹图, 则存在 $e,e'\in E(G)$ 使得, 要么 $G'\in\{K_{2,2},K_{2,3},K_{2,4},K_{2,5},\ S(1,1)\}=\mathcal{F}_3\cup\{S(1,1)\}$, 要么 G' 属于类型 B,C 或 D 且 $n'\leqslant 6+k=10$. 而且,

若 G' 属于类型 B, 则存在 $u\in D_2(G')$ 和 $v\in V(G')$ 使得 G' 没有支撑的 (u,v)-迹; 若 G' 属于类型 C 或 D, 则存在两个不相邻的点 $u,v\in D_2(G')$ $(u\neq v)$ 使得 G' 没有支撑的 (u,v)-迹. $(*)$

若 G' 属于类型 C, 由引理 2.7, $G' \in \mathcal{F}_2 = \{C_6, L_1, L_2, \cdots, L_5\}$. 若 G' 属于类型 B 或 D, 由引理 2.6, $G' \in \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$. 根据 (∗), 经验证知 $G' \in \mathcal{F}_1$. 因此, $G' \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$. 证毕.

参 考 文 献

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory [M]. New York: Springer, 2008.

[2] Catlin P A. A reduction methods to find spanning eulerian subgraphs [J]. *J Graph Theory*, 1988, 12:29–44.

[3] Luo W, Chen Z-H, Chen W-G. Spanning trails containing given edges [J]. *Discrete Math*, 2006, 306:87–98.

[4] Catlin P A, Lai H-J. Spanning trails joining two given edges [M]. Y. Alavi et al (Eds.), Graph Theory, Combinatorics, and Applications, Vol. 1, Kalamazoo, MI. 1988, New York: Wiley, 1991:207–222.

[5] Wang K. Spanning trailable graphs and hamiltonian-connected line graphs [D]. West Virginia: West Virginia University, 2015.

[6] Shao Y. Claw-free graphs and line graphs [D]. West Virginia: West Virginia University, 2005.

[7] Pulleyblank W R. A note on graphs spanned by eulerian graphs [J]. *J. Graph Theory*, 1979, 3:309–310.

[8] Catlin P A, Li X W. Supereulerian graphs of minimum degree at least 4 [J]. *Adv Math* (China), 1999, 28:65–69.

[9] Broersma H J, Xiong L. A note on minimum degree conditions for supereulerian graphs [J]. *Discrete Appl Math*, 2002, 120:35–43.

[10] Lai H-J, Liang Y. Supereulerian graphs in the graph family $C_2(6,k)$ [J]. *Discrete Appl Math*, 2011, 159:467–477.

[11] Li D X, Lai H-J, Zhan M Q. Eulerian subgraphs and Hamilton-connected line graphs [J]. *Discrete Appl Math*, 2005, 145:422–428.

[12] Li X, Li D, Lai H-J. On 3-edge-connected supereulerian graphs in graph family $C(l,k)$ [J]. *Discrete Math*, 2010, 310:2455–2459.

[13] Li X, Wang C, Fan Q, et al. Spanning Eulerian subgraphs of 2-edge-connected graphs [J]. *Graphs and Combin*, 2013, 29:275–280.

[14] Niu Z, Xiong L. Supereulerianity of k-edge-connected graphs with a restriction on small bonds [J]. *Discrete Appl Math*, 2010, 158:37–43.

[15] Catlin P A, Han Z, Lai H-J. Graphs without spanning closed trails [J]. *Discrete Math*, 1996, 160:81–91.

[16] Xu J Q, Chen Z-H, Lai H-J, Zhang M. Spanning trails in essentially 4-edge-connected graphs [J]. *Discrete Appl Math*, 2014, 162:306–313.

[17] Chen Z-H, Lai H-J. Supereulerian graphs and the Petersen graph II [J]. *Ars Combinatoria*, 1998, 48:271–282.

Strongly Spanning Trailable Graphs in Graph Family $C_2(4, k)$

YU Aimei[1] MA Rensen[1] WANG Keke[2] KONG Jiangxu[3]

[1]Department of Mathematics, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China. E-mail: yuaimeimath@163.com; 14121548@bjtu.edu.cn

[2]Department of Mathematics, Embry-Riddle Aeronautical University, Precott, Arizona 86301, USA. E-mail: wangkk87@gmail.com

[3]School of Sciences, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China. E-mail: kongjiangxu@163.com

Abstract For integers h, l and k with $2 \leqslant h \leqslant 3$, $l > 0$ and $k \geqslant 0$, let $C_h(l,k)$ denote the family of h-edge-connected simple graphs such that $G \in C_h(l,k)$ if and only if for every edge cut $X \subseteq E(G)$ with size 2 or 3, each component of $G - X$ has at least $\frac{|V(G)|-k}{l}$ vertices. Suppose that $e = u_1v_1$ and $e' = u_2v_2$ are two edges of G. If $e \neq e'$, then $G(e,e')$ is the graph obtained from G by replacing $e = u_1v_1$ with a path $u_1v_ev_1$ and by replacing $e' = u_2v_2$ with a path $u_2v_{e'}v_2$, where $v_e, v_{e'}$ are two new vertices being not in $V(G)$. If $e = e'$, then $G(e,e')$, also denoted by $G(e)$, is obtained from G by replacing $e = u_1v_1$ with a path $u_1v_ev_1$. A graph G is strongly spanning trailable if for any $e, e' \in E(G)$, $G(e,e')$ has a spanning $(v_e, v_{e'})$-trail. The authors prove that if $G \in C_2(4,k)$ and $|V(G)| > 5k$, either G is strongly spanning trailable, or there exist $e, e' \in E(G)$ such that $G(e,e')$ is contractible to a member in a finite family $\mathcal{F}$. When $k = 4$, $\mathcal{F}$ is determined.

Keywords Strongly spanning trailable graphs, Collapsible graphs, Reduction

2000 MR Subject Classification 05C

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 39 No. 1, 2018
by ALLERTON PRESS, INC., USA