数 学 年 刊
2011,32A(6):679–686

常曲率空间中具正 Ricci 曲率的子流形*

何太平[1] 罗 宏[1]

提要 设 $S^{n+p}(1)$ 是一单位球面, M^n 是浸入 $S^{n+p}(1)$ 的具有非零平行平均曲率向量的 n 维紧致子流形. 证明了当 $n\geqslant 4$, $p\geqslant 2$ 时, 如果 M^n 的 Ricci 曲率不小于 $(n-2)(1+H^2)$, 则 M^n 是全脐的或者 M^n 的 Ricci 曲率等于 $(n-2)(1+H^2)$, 进而 M^n 的几何分类被完全给出.

关键词 Ricci 曲率, 伪脐, 直积
MR (2000) 主题分类 53C42
中图法分类 O180.12
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2011)06-0679-08

1 引 言

设 $S^{n+p}(1)$ 是一单位球面, M^n 是浸入 $S^{n+p}(1)$ 的具有平行平均曲率向量的 n 维紧致子流形. 研究 M^n 的刚性定理一直是一个有吸引力的问题. 文 [1–4] 等给出了数量曲率和截面曲率的严格条件, 并进行了几何分类. 对 Ricci 曲率的情形, 当 M^n 是 $S^{n+p}(1)$ 的极小子流形时, 文 [5] 给出了以下引理.

引理 1.1[5] 如果 $n\geqslant 4$, M^n 是浸入 $S^{n+p}(1)$ 的紧致单连通的 n 维极小子流形, 且浸入是满的, 其 Ricci 曲率不小于 $n-2$, 则 M^n 是 $S^n(1)$ 或者是 $S^m\big(\sqrt{\frac{1}{2}}\big)\times S^m\big(\sqrt{\frac{1}{2}}\big)\subset S^{n+1}(1)$ $(n=2m)$, 或者是 $S^7(1)$ 中的 $P^2_{\frac{4}{3}}$, 其中 $S^m\big(\sqrt{\frac{1}{2}}\big)$ 是半径为 $\frac{1}{2}$ 的球面, $P^2_{\frac{4}{3}}$ 是一个全纯曲率为 $\frac{4}{3}$ 的二维复射影空间.

当 $n=2m$ 时, 上述条件是严格的.

众所周知, 具有平行平均曲率向量的子流形是极小子流形的一个自然推广. 对于这样的子流形, 是否存在类似于引理 1.1 的定理是一个非常有趣的问题. 许多作者沿用文 [5] 的主要方法对此进行了研究. 较好的结果是孙志琪得到的[6], 他证明了, 如果 M^n 的 Ricci 曲率不小于 $(n-2)-\frac{1}{2}(7n+8)H^2+\frac{1}{2}[8(n^2+144n)H^4+36nH^2]^{\frac{1}{2}}$ 或 $\frac{n(n-2)}{n-1}(1+H^2)$, 则 M^n 是全脐的, 其中 $n\geqslant 4$, H 是 M^n 的中曲率. 但是, 当 M^n 全脐时, M^n 的 Ricci 曲率为 $(n-1)(H^2+1)$, 故文 [6] 的条件不是严格的. 因此, 探讨 M^n 的 Ricci 曲率达到下界的条件是有意义的.

本文采用不同于文 [5] 的方法, 对文 [2] 中的一个关于 M^n 的第二基本形式长度平方的 Laplace 式, 比较精细地从该式和 M^n 的 Ricci 曲率式中分离出形如 λ_i-H (λ_i 为 M^n 的中曲率向量的主曲率) 的因式. 以此为基础, 我们证明了 $S^{n+p}(1)$ 中具有平行平均曲率向量的子流形 M^n 的 Ricci 曲率取得下界的条件 (见定理 2.1), 它是引理 1.1 的自然推广.

至此, 关于 M^n 的数量曲率、截面曲率和 Ricci 曲率的刚性定理的严格条件被完全给出.

本文 2011 年 1 月 19 日收到, 2011 年 6 月 22 日收到修改稿.
[1]四川师范大学数学与软件科学学院, 成都 610066. E-mail: hetaiping86@hotmail.com; lhscnu@163.com
*国家自然科学基金 (No. 11071177) 资助的项目.

2 主要定理

定理 2.1 设 $S^{n+p}(1)$ 是一个 $n+p$ 维的单位球面， $n\geqslant 4$, M^n 是浸入 $S^{n+p}(1)$ 的具有非零平行平均曲率向量的 n 维紧致连通子流形，且浸入是满的．设 M^n 的 Ricci 曲率不小于 $(n-2)(1+H^2)$, 其中 H 为 M^n 的中曲率，则

(1) 当 $p=1$ 时， M^n 是全脐的，即 M^n 为一个 n 维球面；

(2) 当 $p\geqslant 2$ 时， M^n 是全脐的或者 M^n 的 Ricci 曲率等于 $(n-2)(1+H^2)$, 此时 M^n 为 $M_m\times M_m\subset S^{n+1}(1+H^2)$, $n=2m$, 或为 $S^7(1+H^2)$ 中的 $P^2_{\frac{4(1+H^2)}{3}}$, 其中 M_m 是一个具有截面曲率为 $2(1+H^2)$ 的 m 维流形， $P^2_{\frac{4(1+H^2)}{3}}$ 是全纯截曲率为 $\frac{4(1+H^2)}{3}$ 的二维复射影空间.

3 预备知识

设 $S^{n+p}(1)$ 是一个单位球面， M^n 是浸入 $S^{n+p}(1)$ 的 n 维子流形．选择 $S^{n+p}(1)$ 的一组局部正规标架场 $e_1,e_2,\cdots,e_{n+p}$, 使得限制于 M^n 时，向量 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 与 M^n 相切．以下约定指标的取值范围为

$$\begin{aligned}&1\leqslant A,B,C,\cdots\leqslant n+p,\\&1\leqslant i,j,k,\cdots\leqslant n,\\&n+1\leqslant \alpha,\beta,\gamma,\cdots\leqslant n+p.\end{aligned}$$

设 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n+p}$ 为 $e_1,e_2,\cdots,e_{n+p}$ 的对偶标架场， $\{\omega_{AB}\}$ 为 $S^{n+p}(1)$ 的联络形式，则有[2]

$$\mathrm{d}\omega_i=\sum_j\omega_{ij}\wedge\omega_j,\quad \omega_{ij}+\omega_{ji}=0.$$

$$\mathrm{d}\omega_{ij}=\sum_k\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}+\Omega_{ij},\quad \Omega_{ij}=-\frac12\sum_{k,l}R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l,$$

$$R_{ijkl}=\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}+\sum_\alpha(h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl}-h^\alpha_{il}h^\alpha_{jk}),\tag{3.1}$$

$$\mathrm{d}\omega_{\alpha\beta}=\sum_\gamma\omega_{\alpha\gamma}\wedge\omega_{\gamma\beta}+\Omega_{\alpha\beta},\quad \Omega_{\alpha\beta}=-\frac12\sum_{k,l}R_{\alpha\beta kl}\omega_k\wedge\omega_l,\tag{3.2}$$

$$R_{\alpha\beta kl}=\sum_i(h^\alpha_{ik}h^\beta_{il}-h^\alpha_{il}h^\beta_{ik}).\tag{3.3}$$

定义 h^α_{ijk} 为

$$\sum_k h^\alpha_{ijk}\omega_k=dh^\alpha_{ij}+\sum_l h^\alpha_{il}\omega_{lj}+\sum_l h^\alpha_{lj}\omega_{li}-\sum_\beta h^\beta_{ij}\omega_{\alpha\beta},\tag{3.4}$$

则有 $h^\alpha_{ijk}=h^\alpha_{ikj}$.

设 R_{ii} 是 M^n 在 e_i 方向的 Ricci 曲率， R 是 M^n 的数量曲率．由 (3.1), 有

$$R_{ii}=n-1+\sum_{\alpha,k}(h^\alpha_{kk}h^\alpha_{ii}-(h^\alpha_{ik})^2),\tag{3.5}$$

$$R=n(n-1)+n^2H^2-S,$$

其中 H 是中曲率向量 $\eta=\sum\limits_{\alpha}\frac{1}{n}(\mathrm{tr}A_{\alpha})e_{\alpha}$ 的长度，叫做 M^n 的中曲率，$S=\sum\limits_{\alpha}(\mathrm{tr}A_{\alpha}^2)$ 是 M^n 的第二基本形式 $\sum\limits_{i,j,\alpha}h_{ij}^{\alpha}\omega_i\omega_j e_{\alpha}$ 长度的平方，此处 $A_{\alpha}=(h_{ij}^{\alpha})$, tr 表示矩阵的迹.

如果 $H\neq 0$, 令 $e_{n+1}=\frac{\eta}{\|\eta\|}$, 则

$$\mathrm{tr}A_{\alpha}=0,\quad \alpha\neq n+1,$$
$$\mathrm{tr}A_{n+1}=nH.$$

如果 M^n 具有非零平行平均曲率向量，则 $H=$ 常数 $\neq 0$ 且

$$\omega_{\alpha n+1}=0. \tag{3.6}$$

从而，有 $A_{\alpha}A_{n+1}=A_{n+1}A_{\alpha}$.

由文 [2], 有

$$\Delta h_{ij}^{n+1}=\sum_{k,m}(h_{km}^{n+1}R_{mijk}+h_{mi}^{n+1}R_{mkjk}), \tag{3.7}$$
$$\Delta h_{ij}^{\beta}=\sum_{k,m}(h_{km}^{\beta}R_{mijk}+h_{mi}^{\beta}R_{mkjk})-\sum_{\gamma,k}h_{ki}^{\gamma}R_{\beta\gamma jk},\quad \beta\neq n+1.$$

4　定理 2.1 的证明

设 $u^2=\mathrm{tr}A_{n+1}^2-nH^2$, $\lambda_i=h_{ii}^{n+1}$. 选择一组合适的切标架对角化 $A_{n+1}=(h_{ij}^{n+1})$. 由 (3.1) 和 (3.7), 有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta u^2&=\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{n+1})^2+\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i-\lambda_j)^2R_{ijij}\\
&\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i-H+H-\lambda_j)^2R_{ijij}\\
&=\sum_{i,j}(\lambda_i-H)^2R_{ijij}-\sum_{i\neq j}(\lambda_i-H)(\lambda_j-H)\Big(1+\lambda_i\lambda_j+\sum_{\alpha\neq n+1}h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha}-(h_{ij}^{\alpha})^2\Big)\\
&=\sum_{i}(\lambda_i-H)^2R_{ii}-\sum_{i\neq j}(\lambda_i-H)(\lambda_j-H)(1+\lambda_i\lambda_j)\\
&\quad-\sum_{\substack{i\neq j\\ \alpha\neq n+1}}(\lambda_i-H)(\lambda_j-H)(h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha}-(h_{ij}^{\alpha})^2),
\end{aligned}\tag{4.1}$$

其中

$$\begin{aligned}
&-\sum_{i\neq j}(\lambda_i-H)(\lambda_j-H)(1+\lambda_i\lambda_j)\\
&=-\sum_{i,j}(\lambda_i-H)(\lambda_j-H)-\sum_{i,j}(\lambda_i-H)(\lambda_j-H)\lambda_i\lambda_j+\sum_{i}(\lambda_i-H)^2+\sum_{i}(\lambda_i-H)^2\lambda_i^2\\
&=-\Big(\sum_{i}(\lambda_i-H)\Big)^2-\Big(\sum_{i}(\lambda_i^2-\lambda_iH)\Big)^2+u^2+\sum_{i}(\lambda_i-H)^2(\lambda_i-H+H)^2\\
&=0-u^4+u^2+\sum_{i}(\lambda_i-H)^4+2\sum_{i}H(\lambda_i-H)^3+H^2u^2\\
&=-u^4+(1+H^2)u^2+\sum_{i}(\lambda_i-H)^4+2\sum_{i}H(\lambda_i-H)^3.
\end{aligned}\tag{4.2}$$

由 (3.5), 对 $i=1,2,\cdots n$, 有

$$R_{ii}=n-1-\lambda_i^2+nH\lambda_i-\sum_{j,\alpha\neq n+1}(h_{ij}^\alpha)^2$$
$$=-(\lambda_i-H)^2+(n-2)H(\lambda_i-H)+(n-1)(1+H^2)-\sum_{j,\alpha\neq n+1}(h_{ij}^\alpha)^2. \tag{4.3}$$

不妨设存在 Q, 对 $i=1,2,\cdots n$, 有 $R_{ii}\geqslant Q$. 由 (4.3), 有

$$-u^2\geqslant nQ-n(n-1)(1+H^2)+\sum_{i,j,\alpha\neq n+1}(h_{ij}^\alpha)^2, \tag{4.4}$$

$$H(\lambda_i-H)\geqslant\frac{Q-(n-1)(1+H^2)+(\lambda_i-H)^2+\sum\limits_{j,\alpha\neq n+1}(h_{ij}^\alpha)^2}{n-2}. \tag{4.5}$$

在 (4.5) 两边同时乘以 $2(\lambda_i-H)^2$ 并对 i 求和，有

$$2\sum_i H(\lambda_i-H)^3\geqslant\frac{2}{n-2}\Big((Q-(n-1)(1+H^2))u^2+\sum_i(\lambda_i-H)^4+\sum_{i,j,\alpha\neq n+1}(h_{ij}^\alpha)^2(\lambda_i-H)^2\Big). \tag{4.6}$$

由 (4.1)–(4.2) 及 (4.6), 可以得到

$$\frac12\Delta u^2\geqslant\frac{n(Q-(1+H^2))u^2}{n-2}-u^4+\frac{n}{n-2}\sum_i(\lambda_i-H)^4+\frac{2}{n-2}\sum_{i,j,\alpha\neq n+1}(h_{ij}^\alpha)^2(\lambda_i-H)^2$$
$$-\sum_{\substack{i\neq j\\ \alpha\neq n+1}}(\lambda_i-H)(\lambda_j-H)(h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha-(h_{ij}^\alpha)^2). \tag{4.7}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$\sum_i(\lambda_i-H)^4\geqslant\frac{u^4}{n}, \tag{4.8}$$

其中等号成立的充要条件为 $(\lambda_1-H)^2=\cdots=(\lambda_n-H)^2$.

进一步地，由 (4.4) 和 (4.8) 可以得到

$$-u^4+\frac{n}{n-2}\sum_i(\lambda_i-H)^4\geqslant-\frac{(n-3)u^4}{n-2}$$
$$\geqslant\frac{(n-3)\Big(nQ-n(n-1)(1+H^2)+\sum\limits_{i,j,\alpha\neq n+1}(h_{ij}^\alpha)^2\Big)u^2}{n-2}.$$

因此，得

$$\frac12\Delta u^2\geqslant n(Q-(n-2)(1+H^2))u^2+\frac{(n-3)u^2}{n-2}\sum_{i,j,\alpha\neq n+1}(h_{ij}^\alpha)^2$$
$$+\frac{2}{n-2}\sum_{i,j,\alpha\neq n+1}(h_{ij}^\alpha)^2(\lambda_i-H)^2$$
$$-\sum_{\substack{i\neq j\\ \alpha\neq n+1}}(\lambda_i-H)(\lambda_j-H)(h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha-(h_{ij}^\alpha)^2). \tag{4.9}$$

用 L 表示 (4.9) 右边的最后 3 项，则

$$\begin{aligned}\mathrm{L}=&\Big(\frac{(n-3)u^2}{n-2}\sum_{i,\alpha\neq n+1}(h_{ii}^{\alpha})^2+\frac{2}{n-2}\sum_{i,\alpha\neq n+1}(h_{ii}^{\alpha})^2(\lambda_i-H)^2\\&-\sum_{\substack{i\neq j\\ \alpha\neq n+1}}(\lambda_i-H)(\lambda_j-H)h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha}\Big)+\Big(\frac{(n-3)u^2}{n-2}\sum_{\substack{i\neq j\\ \alpha\neq n+1}}(h_{ij}^{\alpha})^2\\&+\frac{2}{n-2}\sum_{\substack{i\neq j\\ \alpha\neq n+1}}(h_{ij}^{\alpha})^2(\lambda_i-H)^2+\sum_{\substack{i\neq j\\ \alpha\neq n+1}}(\lambda_i-H)(\lambda_j-H)(h_{ij}^{\alpha})^2\Big).\end{aligned}$$

用 L* 表示 L 的第 2 项，则

$$\begin{aligned}\mathrm{L}^*\geqslant&\frac{(n-3)}{n-2}\sum_{\substack{i\neq j\\ \alpha\neq n+1}}((\lambda_i-H)^2+(\lambda_j-H)^2)(h_{ij}^{\alpha})^2\\&+\frac{1}{n-2}\sum_{\substack{i\neq j\\ \alpha\neq n+1}}((\lambda_i-H)^2+(\lambda_j-H)^2)(h_{ij}^{\alpha})^2+\sum_{\substack{i\neq j\\ \alpha\neq n+1}}(\lambda_i-H)(\lambda_j-H)(h_{ij}^{\alpha})^2\\=&\sum_{\substack{i\neq j\\ \alpha\neq n+1}}((\lambda_i-H)^2+(\lambda_j-H)^2+(\lambda_i-H)(\lambda_j-H))(h_{ij}^{\alpha})^2\geqslant 0.\end{aligned}\tag{4.10}$$

用 L** 表示 L 的第 1 项，则

$$\begin{aligned}\mathrm{L}^{**}=&\frac{1}{n-2}\Big((n-3)\sum_{i,j,\alpha\neq n}(\lambda_j-H)^2(h_{ii}^{\alpha})^2+2\sum_{i,\alpha\neq n+1}(h_{ii}^{\alpha})^2(\lambda_i-H)^2\\&-\sum_{\substack{i\neq j\\ \alpha\neq n+1}}(n-2)(\lambda_i-H)(\lambda_j-H)h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha}\Big).\end{aligned}$$

对 L** 中每个固定 α, 记

$$f_\alpha=\sum_i\Big((n-3)\sum_j(\lambda_j-H)^2+2(\lambda_i-H)^2\Big)(h_{ii}^{\alpha})^2-\sum_{i\neq j}(n-2)(\lambda_i-H)(\lambda_j-H)h_{ii}^{\alpha}h_{jj}^{\alpha}.$$

f_α 是关于 h_{ii}^{α} $(i=1,2,\cdots,n)$ 的实二次型，其矩阵是

$$\begin{pmatrix}(n-3)\sum\limits_j(\lambda_j-H)^2+2(\lambda_1-H)^2 & \cdots & -(n-2)(\lambda_1-H)(\lambda_n-H)\\ -(n-2)(\lambda_2-H)(\lambda_1-H) & \cdots & -(n-2)(\lambda_2-H)(\lambda_n-H)\\ \vdots & & \vdots\\ -(n-2)(\lambda_n-H)(\lambda_1-H) & \cdots & (n-3)\sum\limits_j(\lambda_j-H)^2+2(\lambda_n-H)^2\end{pmatrix}.$$

上述矩阵的 k 阶主子式为

$$D_k=\begin{vmatrix}(n-3)\sum\limits_j(\lambda_j-H)^2+2(\lambda_{i_1}-H)^2 & \cdots & -(n-2)(\lambda_{i_1}-H)(\lambda_{i_k}-H)\\ -(n-2)(\lambda_{i_2}-H)(\lambda_{i_1}-H) & \cdots & -(n-2)(\lambda_{i_2}-H)(\lambda_{i_k}-H)\\ \vdots & & \vdots\\ -(n-2)(\lambda_{i_k}-H)(\lambda_{i_1}-H) & \cdots & (n-3)\sum\limits_j(\lambda_j-H)^2+2(\lambda_{i_k}-H)^2\end{vmatrix},$$

其中 $k=1,2,\cdots,n$, $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$.

下证 $D_k \geqslant 0$. 不失一般性，不妨设 $(n-3)\sum\limits_j(\lambda_j-H)^2\neq 0$, 则

$$D_k=\begin{vmatrix} 1 & (n-2)(\lambda_{i_1}-H) & \cdots & (n-2)(\lambda_{i_k}-H) \\ 0 & (n-3)\sum\limits_j(\lambda_j-H)^2+2(\lambda_{i_1}-H)^2 & \cdots & -(n-2)(\lambda_{i_1}-H)(\lambda_{i_k}-H) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -(n-2)(\lambda_{i_k}-H)(\lambda_{i_1}-H) & \cdots & (n-3)\sum\limits_j(\lambda_j-H)^2+2(\lambda_{i_k}-H)^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & (n-2)(\lambda_{i_1}-H) & \cdots & (n-2)(\lambda_{i_k}-H) \\ \lambda_{i_1}-H & G_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{i_k}-H & 0 & \cdots & G_k \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1-\sum\limits_{p=1}^{k}\frac{(n-2)(\lambda_{i_p}-H)^2}{G_p} & (n-2)(\lambda_{i_1}-H) & \cdots & (n-2)(\lambda_{i_k}-H) \\ 0 & G_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_k \end{vmatrix},$$

其中 $G_p=(n-3)\sum\limits_j(\lambda_j-H)^2+n(\lambda_{i_p}-H)^2$, $p=1,2,\cdots,k$. 因此 $D_k\geqslant 0$ 的充要条件是 $1-\sum\limits_{p=1}^{k}\frac{(n-2)(\lambda_{i_p}-H)^2}{G_p}\geqslant 0$. 注意到 $1-\sum\limits_{p=1}^{k}\frac{(n-2)(\lambda_{i_p}-H)^2}{G_p}\geqslant 1-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(n-2)(\lambda_k-H)^2}{G_k}$.

设 $m=(n-3)\sum\limits_j(\lambda_j-H)^2$, $f(x)=\frac{(n-2)x}{m+nx}$, 则当 $x\geqslant 0$ 时， $f''(x)=-\frac{2nm(n-2)}{(m+nx)^3}\leqslant 0$.

于是,当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)$ 是凸函数. 因此 $\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))\leqslant f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})$. 特别地,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-2)(\lambda_k-H)^2}{(n-3)\sum\limits_j(\lambda_j-H)^2+n(\lambda_k-H)^2}\leqslant n\frac{\frac{(n-2)}{n}\sum\limits_j(\lambda_j-H)^2}{(n-3)\sum\limits_j(\lambda_j-H)^2+\sum\limits_j(\lambda_j-H)^2}=1.$$

所以 $D_k\geqslant 0$. 因此 f_α 是半正定的二次型. 从而 L^{**} 是非负的.

由假设， $R_{ii}\geqslant(n-2)(1+H^2)$ $(i=1,2,\cdots,n)$, (4.9) 及 L^* 和 L^{**} 非负，可以得到 $\frac{1}{2}\Delta u^2\geqslant 0$. 根据 Hopf 极大值原理， u^2 是一个常数.

由 (4.1) 及 (4.8) 可以得到

$$h_{ijk}^{n+1}=0,\quad i,j,k=1,2,\cdots,n, \tag{4.11}$$

$$(\lambda_1-H)^2=\cdots=(\lambda_n-H)^2. \tag{4.12}$$

进一步地， (4.1)–(4.10) 中的每一个 “$\geqslant 0$” 变为 “$=0$” 且 $\mathrm{L}^*=0$, $\mathrm{L}^{**}=0$.

当 $i=j$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 时，由 (3.4), (3.6) 及 (4.11), 可得 $0=\mathrm{d}\lambda_i+2h_{ii}^{n+1}\omega_{ii}=\mathrm{d}\lambda_i$, 因此 λ_i 是常数.

当 $i\neq j$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 时，由 (3.4) 和 (3.6), 可得

$$0=0+h_{ii}^{n+1}\omega_{ij}+h_{jj}^{n+1}\omega_{ji}-0=(\lambda_i-\lambda_j)\omega_{ij}. \tag{4.13}$$

易知 $u^2=0$ 当且仅当 $\lambda_1-H=\lambda_2-H=\cdots=\lambda_n-H=0$. 我们将证明在 M^n 上有 $u^2=0$. 否则，在 M^n 的某一点 P_0 的邻域内有 $u^2\neq 0$.

以下的讨论限制在 P_0 的邻域内.

由 (4.12) 知, $(\lambda_1-H)^2=(\lambda_2-H)^2=\cdots=(\lambda_n-H)^2\neq 0$. 由于 $\lambda_1-H+\lambda_2-H+\cdots+\lambda_n-H=0$, 所以 n 是偶数. 令 $n=2m$. 选择适当的顺序, 则有 $\lambda\neq 0$ 满足 $\lambda_1-H=\lambda_2-H=\cdots=\lambda_m-H=\lambda$, $\lambda_{m+1}-H=\lambda_{m+2}-H=\cdots=\lambda_{2m}-H=-\lambda$.

由 (4.1), (4.4)–(4.7) 和 (4.9), 有

$$R_{ii}=(n-2)(1+H^2),\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{4.14}$$

由 (4.10), 可得 $\sum\limits_{\substack{i\neq j\\ \alpha\neq n+1}}((\lambda_i-H)^2+(\lambda_j-H)^2+(\lambda_i-H)(\lambda_j-H))(h_{ij}^\alpha)^2=0$, 于是

$$h_{ij}^\alpha=0,\quad i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n,\ \alpha\neq n+1. \tag{4.15}$$

从而

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}^{**}&=\frac{(n-3)n\lambda^2}{n-2}\sum_{i,\alpha\neq n+1}(h_{ii}^\alpha)^2+\frac{2\lambda^2}{n-2}\sum_{i,\alpha\neq n+1}(h_{ii}^\alpha)^2-\sum_{\substack{i\neq j\\ \alpha\neq n+1}}(\lambda_i-H)(\lambda_j-H)h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha\\
&=(n-1)\lambda^2\sum_{i,\alpha\neq n+1}(h_{ii}^\alpha)^2-\sum_{\substack{i\neq j\\ \alpha\neq n+1}}(\lambda_i-H)(\lambda_j-H)h_{ii}^\alpha h_{jj}^\alpha\\
&=\frac14\sum_{i,j,\alpha\neq n+1}(((\lambda_i-H)h_{jj}^\alpha-(\lambda_j-H)h_{ii}^\alpha)^2+((\lambda_i-H)h_{ii}^\alpha-(\lambda_j-H)h_{jj}^\alpha)^2)=0.
\end{aligned}$$

则对所有的 $i,j=1,2,\cdots,n,\ \alpha\neq n+1$, 有

$$(\lambda_i-H)h_{jj}^\alpha=(\lambda_j-H)h_{ii}^\alpha, \tag{4.16}$$

$$(\lambda_i-H)h_{ii}^\alpha=(\lambda_j-H)h_{jj}^\alpha. \tag{4.17}$$

由 (4.16) 或 (4.17) 知, 在 M^n 上点 P_0 的邻域内和所有 $\alpha\ (\geqslant n+2)$, 存在 h^α, 使得

$$h_{11}^\alpha=h_{22}^\alpha=\cdots=h_{mm}^\alpha=h^\alpha, \tag{4.18}$$

$$h_{(m+1)(m+1)}^\alpha=h_{(m+2)(m+2)}^\alpha=\cdots=h_{(2m)(2m)}^\alpha=-h^\alpha. \tag{4.19}$$

由 (4.13) 知, 当 $i=1,2,\cdots,m,\ j=m+1,\cdots,2m$ 时, 有 $\omega_{ij}=0$. 再由 (3.1) 可得

$$0=\mathrm{d}\omega_{ij}=\sum_k\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}-\frac12\sum_{k,l}R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l,$$

其中 $\sum\limits_k\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}$ 必然为 0. 事实上, 假如 $\omega_{ik}\neq 0,\ \omega_{kj}\neq 0$, 由 (4.13) 可得 $\lambda_i=\lambda_k=\lambda_j$, 与 $\lambda_i\neq\lambda_j$ 相矛盾. 因此 $\sum\limits_{k,l}R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l=0$. 易知对所有 $k,\ l$, 有

$$R_{ijkl}=0. \tag{4.20}$$

从 (3.1), (4.15) 及 (4.18)–(4.20) 可知, 对 $i=1,2,\cdots,m$, 有

$$\begin{aligned}
R_{ii}&=\sum_{k=1}^{2m}R_{ikik}=\sum_{k=1}^{m}R_{ikik}+\sum_{k=m+1}^{2m}R_{ikik}=\sum_{k=1}^{m}R_{ikik}\\
&=m-1+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{m}\Big(\lambda_i\lambda_k+\sum_{\alpha\neq n+1}(h^\alpha)^2-0\Big)\\
&=m-1+(m-1)(\lambda+H)^2+(m-1)\sum_{\alpha\neq n+1}(h^\alpha)^2\\
&=(m-1)\Big(1+(\lambda+H)^2+\sum_{\alpha\neq n+1}(h^\alpha)^2\Big).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

类似地，对 $j=m+1,\cdots,2m$, 有

$$R_{jj}=(m-1)\Big(1+(-\lambda+H)^2+\sum_{\alpha\neq n+1}(h^\alpha)^2\Big). \tag{4.22}$$

由 (4.14) 及 (4.21)–(4.22), 可得 $0=(m-1)(\lambda+H)^2-(-\lambda+H)^2)=4(m-1)\lambda H$. 由于 $H\neq 0$, 则 $\lambda=0$, 这与 $\lambda\neq 0$ 矛盾. 因此 $u^2\neq 0$ 为假. 所以，在 M^n 的任一点上，$u^2=0$, $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=H$, M^n 是伪脐子流形. 从而

(1) 当 $p=1$ 时， M^n 是全脐的，即 M^n 为一个 n 维球面;

(2) 当 $p\geqslant 2$ 时，由文 [2] 的定理 1 和文 [3] 的定理 9, M^n 是具有截面曲率为 $1+H^2$ 的流形 N^{n+p-1} 的极小子流形. 因为 $1+H^2>0$, 所以 N^{n+p-1} 是半径为 $\frac{1}{(1+H^2)^{\frac12}}$ 的球面 $S^{n+p-1}(\frac{1}{(1+H^2)^{\frac12}})$.

由引理 1.1 可知，定理 2.1 中的 (1) 和 (2) 为真.

参 考 文 献

[1] Chern S S, Do Carmo M, Kobayashi S. Minimal submanifolds of a sphere with second fundemental form of constant length [M]//Shing Shen Chern Selected Papers. New York: Springer-Verlag, 1978:393–409.

[2] Yau S T. Submanifolds with constant mean curvature I [J]. *Amer J Math*, 1974, 96: 346–366.

[3] Yau S T. Submanifolds with constant mean curvature II [J]. *Amer J Math*, 1975, 97: 76–100.

[4] 何太平. 一个 Simons 型 Pinching 常数的最佳值 [J]. 科学通报, 1995, 40(21):1929–1933.

[5] Ejiri N. Compact minimal submanifolds of a sphere with positive Ricci curvature [J]. *J Math Soc Japan*, 1979, 31(2):251–256.

[6] 孙志琪. 球面上具有常数中曲率的子流形 [J]. 数学进展, 1987, 16(1):91–96.

Submanifolds with Positive Ricci Curvature in the Constant Curvature Space

HE Taiping[1] LUO Hong[1]

[1]College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China. E-mail: hetaiping86@hotmail.com; lhscnu@163.com

Abstract Let $S^{n+p}(1)$ be a unit sphere, M^n an n-dimensional compact submanifold immersed in $S^{n+p}(1)$ with non-zero parallel mean curvature vector . It is proved that when $n\geqslant 4$ and $p\geqslant 2$, if the Ricci curvature of M^n is not less than $(n-2)(1+H^2)$, then M^n is totally umbilical, or the Ricci curvature of M^n equals to $(n-2)(1+H^2)$, and so the geometry classification of M^n is given.

Keywords Ricci curvature, Pseudo-umbilicus, Direct product
2000 MR Subject Classification 53C42