数 学 年 刊
2011,32A(1):27–32

有限群的素数幂阶 S-拟正规嵌入子群*

李世荣[1] 杜 妮[2] 钟祥贵[3]

提要 设 G 为有限 p-可解群, 其中 p 为 $|G|$ 的奇素因子. 若 P 为 G 的 Sylow p-子群且最小生成系含 d 个元素. 考虑集合 $\mathcal{M}_d(P)=\{P_1,\cdots,P_d\}$, 其中 $P_1,\cdots,P_d$ 是 P 的极大子群且满足 $\bigcap\limits_{i=1}^{d} P_i=\Phi(P)$. 证明了若 $\mathcal{M}_d(P)$ 中每个元在 G 中是 S-拟正规嵌入的, 则 G 为 p-超可解群. 作为应用, 还得到了一些进一步的结论.

关键词 饱和群系, S-拟正规嵌入子群
MR (2000) 主题分类 20D10
中图法分类 O152.1
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2011)01-0027-06

1 引 言

本文所考虑的群均为有限群. H_G 表示子群 H 在群 G 中的核, 即包含在 H 中的 G 的极大正规子群. G_p 表示 G 的一个 Sylow p-子群. 其他未说明的符号均是标准的.

群 G 的子群 H 称为 S-拟正规的, 若 H 与 G 的每个 Sylow 子群都可置换, 即 $HS=SH$ 对所有 G 的 Sylow 子群 S 均成立. 该定义由 Kegel 在文 [1] 中给出, Deskins[2] 及 Schmid[3] 都做了更深入的研究. 最近, Ballester-Bolinches 与 Pedraza-Aquilera[4] 将 S-拟正规子群推广至 S-拟正规嵌入子群. 群 G 的子群 H 称为 S-拟正规嵌入的, 若 H 的每个 Sylow 子群 H_p 也是 G 的某个 S-拟正规子群 M 的 Sylow p-子群. 许多学者利用该定义研究了有限群的结构.

为方便起见, 我们用 $\mathcal{M}(G)$ 表示 G 的所有 Sylow 子群的极大子群的集合, $\mathcal{F}$ 表示包含所有超可解群的饱和群系. 在文 [4] 中, Ballester-Bolinches 与 Pedraza-Aquilera 证明了若 $\mathcal{M}(G)$ 中所有元在 G 中是 S-拟正规嵌入的, 则 G 是超可解群. Assad 与 Heliel 在文 [5] 中证明了若 p 是 $|G|$ 的最小素因子, 则群 G 为 p-幂零群的充要条件是 $\mathcal{M}(G_p)$ 中的所有元均是 G 的 S-拟正规嵌入子群. 在同一篇文章中, 他们还证明了 $G\in\mathcal{F}$ 的充要条件是存在正规子群 H, 满足 $G/H\in\mathcal{F}$ 且 $\mathcal{M}(H)$ 中的每个元在 G 中是 S-拟正规嵌入子群. 在文 [6] 中, 李世荣与何宣丽利用下面的定义得到了许多相关结果.

定义 1.1[6] 设 d 为 p-群 P 的最小生成系所含元素个数. 定义集合 $\mathcal{M}_d(P)=\{P_1,\cdots,P_d\}$, 其中 $P_1,\cdots,P_d$ 是 P 的极大子群且满足 $\bigcap\limits_{i=1}^{d} P_i=\Phi(P)$, $\Phi(P)$ 为 P 的 Frattini 子群.

本文 2010 年 7 月 17 日收到.
[1]广西大学数学与信息科学学院, 南宁 530004. E-mail: shirong@gxu.edu.cn
[2]通讯作者. 厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005. E-mail: duni@xmu.edu.cn
[3]广西师范大学数学科学学院, 广西 桂林 541004. E-mail: xgzhong@gxnu.edu.cn
*国家自然科学基金 (No. 0249001, No. 10961007), 中央高校基本科研业务费专项资金 (No. 2010121003) 和广西省自然科学基金 (No. 0575050) 资助的项目.

群类 $\mathcal{F}$ 被称为群系，若 $G \in \mathcal{F}$ 与 $N \trianglelefteq G$ 能推出 $G/N \in \mathcal{F}$, 且 $G/N_i(i=1,2) \in \mathcal{F}$ 能推出 $G/N_1 \cap N_2 \in \mathcal{F}$. 进一步地，若由 $G/\Phi(G) \in \mathcal{F}$ 能得到 $G \in \mathcal{F}$, 则称 $\mathcal{F}$ 为饱和群系. 所有超可解群组成的群类记为 $\mathcal{U}$, 这是个饱和群系[7]. 下面的定义 1.2 也是一个饱和群系的例子，这在本文中会用到.

定义 1.2 设 $\mathcal{X}$ 是具有下列性质的群构成的群类： G 的所有非交换 p-主因子 K/L 满足 $|K/L|_p = p$, 其中 p 为某素数.

本文主要考察 $\mathcal{M}_d(G_p)$ 对群 G 结构的影响. 1988 年陈重穆证明了下面定理：设 p 是 $|G|$ 的最小素因子， G 为 p-可解群，若 G_p 的所有极大子群均正规，则 G 是 p-超可解群[8] 定理 8.7. 我们首先推广了该定理，然后将所得结果应用到群系理论.

2 预备知识

引理 2.1[1] (a) S-拟正规子群必为次正规子群;
(b) 若 $H \leqslant K \leqslant G$ 且 H 是 G 的 S-拟正规子群，则 H 是 K 的 S-拟正规子群.

引理 2.2[2] 若 H 是 G 的 S-拟正规子群，则 H/H_G 幂零.

引理 2.3[3] 对于 G 的幂零子群 H, 以下论述等价：
(a) H 是 G 的 S-拟正规子群;
(b) H 的 Sylow 子群是 G 的 S-拟正规子群.

引理 2.4[5] 设 G_p 为 G 的 Sylow p-子群， P 是 G_p 的一个极大子群. 则以下论述等价：
(a) P 正规于 G;
(b) P 是 G 的 S-拟正规子群.

引理 2.5[4] 设 U 是 G 的 S-拟正规嵌入子群， K 是 G 的正规子群，则
(a) 只要 $U \leqslant H \leqslant G$, 则 U 是 H 的 S-拟正规嵌入子群;
(b) UK 是 G 的 S-拟正规嵌入子群， UK/K 是 G/K 的 S-拟正规嵌入子群.

引理 2.6[9] 若 P 是 G 的 Sylow p-子群， $N \trianglelefteq G$ 且 $P \cap N \leqslant \Phi(P)$, 则 N 是 p-幂零群.

引理 2.7[6] 设 p 是 $|G|$ 的最小素因子， G_p 为 G 的 Sylow p-子群，则以下论述等价：
(a) G 是 p-幂零群;
(b) $\mathcal{M}_d(G_p)$ 中的每个元均是 G 的 S-拟正规嵌入子群.

引理 2.8[6] 设 $\mathcal{F}$ 是包含 $\mathcal{U}$ 的饱和群系，则以下论述等价：
(a) $G \in \mathcal{F}$;
(b) 存在 G 的可解正规子群 H, 使得 $G/H \in \mathcal{F}$ 且对于 $F(H)$ (即 H 的 Fitting 子群) 的每个 Sylow 子群 P, $\mathcal{M}_d(P)$ 中的每个元在 G 中是正规嵌入的.

引理 2.9[6] 以下论述等价：
(a) G 为超可解群;
(b) 存在正规子群 H, 使得 G/H 超可解且对于 H 的每个非循环 Sylow 子群 P, $\mathcal{M}_d(P)$ 中的每个元都是 G 的 S-拟正规嵌入子群.

3 主要定理

我们首先推广文 [8] 中的定理 8.7. 注意到 $X \in \mathcal{X}$ 的充要条件是 X 的所有非交换 p-主因子有 p 阶 Sylow 子群.

定理 3.1 设 p 为素数. 若 $\mathcal{M}_d(G_p)$ 中的每个元都是 G 的 S-拟正规嵌入子群, 则

(1) $G \in \mathcal{X}$;

(2) 若 G 是 p-可解群或 p 是 $|G|$ 的最小素因子, 则 G 是 p-超可解群.

证 首先证明 (1). 假设结论不真且 G 为极小阶反例. 令 $\mathcal{M}_d(G_p) = \{P_1, \cdots, P_d\}$. 由假设知, 每个 P_i 均是 G 的 S-拟正规嵌入子群. 我们有如下断言:

(1.1) $O_{p'}(G) = 1$.

令 $N = O_{p'}(G)$, 则 G_pN/N 为 G/N 的 Sylow p-子群, 由于 $G_pN/N \cong G_p$, 因此 G_pN/N 与 G_p 的最小生成系中所含元素个数相同且 $\mathcal{M}_d(G_pN/N) = \{P_1N/N, \cdots, P_dN/N\}$. 由引理 2.5, P_iN/N 在 G/N 中是 S-拟正规嵌入的, 因此 G/N 满足条件. 若 $N > 1$, 则由 G 的选择可知 $G/N \in \mathcal{X}$. 由于 N 是 p'-群, 则 $G \in \mathcal{X}$, 矛盾, 因此 $N = 1$.

由 S-拟正规嵌入子群的定义, 对于每个 P_i, 存在 G 的 S-拟正规子群 M_i, 使得 P_i 为 M_i 的 Sylow p-子群.

(1.2) $G/(M_i)_G \in \mathcal{X}$.

事实上, 由于 M_i 在 G 中是 S-拟正规的, 则 $M_i/(M_i)_G$ 在 $G/(M_i)_G$ 中是 S-拟正规的, 由引理 2.2 还有 $M_i/(M_i)_G$ 幂零. 因此 $M_i/(M_i)_G$ 为 $G/(M_i)_G$ 的 S-拟正规幂零子群. 由引理 2.3 知 $M_i/(M_i)_G$ 的每个 Sylow 子群在 $G/(M_i)_G$ 中是 S-拟正规的. 因此 $P_i(M_i)_G/(M_i)_G$ 在 $G/(M_i)_G$ 中是 S-拟正规的. 由引理 2.4, $P_i(M_i)_G/(M_i)_G$ 在 $G/(M_i)_G$ 中正规. 于是 $(M_i)_G$ 包含 M_i 的 Sylow p-子群 P_i, 从而 $|G/(M_i)_G|_p = p$. 于是 $G/(M_i)_G \in \mathcal{X}$.

(1.3) 令 $N = \bigcap\limits_{i=1}^{d} (M_i)_G$, 则 N 为 p-幂零群.

由于 $(M_i)_G$ 在 G 中正规, 因此 $N \trianglelefteq G$. 考虑子群 $G_p \cap N$. 由于 P_i 是 $(M_i)_G$ 的 Sylow p-子群且 $P_i \leqslant G_p$, 因此 $G_p \cap (M_i)_G = P_i$, 于是 $G_p \cap N = G_p \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{d} (M_i)_G) = \bigcap\limits_{i=1}^{d} (G_p \cap (M_i)_G) = \bigcap\limits_{i=1}^{d} P_i = \Phi(G_p)$. 所以 $G_p \cap N \leqslant \Phi(G_p)$ 且 $N \trianglelefteq G_pN$. 由引理 2.6 知 N 为 p-幂零群.

(1.4) 极小阶反例 G 不存在.

可见, 存在 N 的正规 Hall p' 子群 U, 使得 $N = N_pU$, 其中 N_p 为 N 的 Sylow p-子群. 因此 U 正规于 G 且 $U \leqslant O_{p'}(G) = 1$(见断言 (1.1)), 从而 $U = 1$. 于是, N 是 G 的正规 p-子群. 所以 $N = G_p \cap N = \Phi(G_p)$. 由于 $\mathcal{X}$ 是饱和群系且 $G/(M_i)_G \in \mathcal{X}$, 有 G/N 为 $\mathcal{X}$-群. 又 $N = \Phi(G_p)$, 因此 $G/\Phi(G_p)$ 也是 $\mathcal{X}$-群. 根据文 [10] 第 III 节中命题 3.3, 有 $\Phi(G_p) \leqslant \Phi(G)$, 因此 $G/\Phi(G) \in \mathcal{X}$, 从而 $G \in \mathcal{X}$. 这与 G 的选取矛盾. 结论 (1) 证毕.

下面证明定理的结论 (2): 两种情况下 G 都是 p-可解群. 注意到所有 p-超可解群构成饱和群系, 余下的证明同结论 (1).

定理 3.2 设 G 为 p-可解群, p 为素数, $H = F_p(G)$ 为 G 的最大 p-幂零正规子群, P 为 H 的 Sylow p-子群. 若 $\mathcal{M}_d(P)$ 中的每个元均在 G 中是正规嵌入的, 则 G 为 p-超可解群.

证 若 $P = 1$, 则 G 是 p'-群, 结论平凡成立. 假设 $P > 1$, 则 $\mathcal{M}_d(P) = \{P_1, P_2, \cdots, P_d\}$ 非空. 对 $|G|$ 用归纳法.

(1) $O_{p'}(G)=1$.

否则，令 $N=O_{p'}(G)$, 考虑商群 $\overline{G}=G/N$. 由于 $F_p(\overline{G})=F_p(G)/N$, 因此 $\overline{H}=H/N$ 且 $\mathcal{M}_d(\overline{P})=\{\overline{P}_1,\overline{P}_2,\cdots,\overline{P}_d\}$. 由于 $\overline{P}_i$ 在 G/N 中是正规嵌入的，因此 G/N 满足假设. 由归纳法， G/N 是 p-超可解的. 又 N 是 p'-群，因此 G 是 p-超可解群，结论成立.

(2) $F_p(G)=P$ 为初等交换 p-群.

由 (1) 知 $F_p(G)=P$. 假设 $\Phi(P)\neq 1$. 由于 $\Phi(P)\leqslant\Phi(G)$, 因此 $F_p(G/\Phi(P))=F_p(G)/\Phi(P)$ 且 $\mathcal{M}_d(P/\Phi(P))=\{P_1/\Phi(P),\cdots,P_d/\Phi(P)\}$. 由于 $P_i/\Phi(P)$ 在 $G/\Phi(P)$ 中是正规嵌入的，通过归纳知 $G/\Phi(P)$ 是 p-超可解群，因此 G 也是 p-超可解群.

(3) $P=\langle X_1,\cdots,X_d\rangle$, 其中 X_i 是 p 阶 G-不变子群.

事实上，由假设， P_i 在 G 中是正规嵌入的. 因此对于每个 P_i, 存在 G 的正规子群 K_i, 使得 P_i 为 K_i 的 Sylow p-子群. 所以 $P_i=P\cap K_i\trianglelefteq G$. 令 $X_i=\bigcap\limits_{j\neq i}P_j$, 则 X_i 正如所需.

(4) 完成证明.

令 $L=\bigcap\limits_{i=1}^{d}C_G(X_i)=C_G(P)$, 则 $P\leqslant L$. 另一方面，由 p-可解群的性质[11] 命题 9.3.1, 有 $C_G(P)\leqslant P$, 因此 $L\leqslant P$, 从而 $L=P$. 又对于每个 i, $G/C_G(X_i)$ 是阶整除 $p-1$ 的循环群，因此 G/L 为超可解群，即有 G/P 是超可解群. 由 (3) 可知， G 的每个含于 P 的主因子均循环，因此 G 是 p-超可解群.

下面将所得结果应用到群系理论.

定理 3.3 设 $\mathcal{F}$ 为包含 $\mathcal{U}$ 的饱和群系， G 为群， H 为正规 $\pi-\{2\}$-可解子群且 $G/H\in\mathcal{F}$. 假设对于每个素数 $p\in\pi$ 及 H 的 Sylow p-子群 P, $\mathcal{M}_d(P)$ 中的每个元在 G 中是正规嵌入的，则 $G^{\mathcal{F}}$ 是 H 的 π' 子群.

证 对 $|G|$ 用归纳法. 由 $G/H\in\mathcal{F}$, 有 $G^{\mathcal{F}}\leqslant H$. 往证 $G^{\mathcal{F}}$ 为 π'-群. 当 $\pi=\{p\}$ 时，即要证 $G^{\mathcal{F}}$ 是 p'-群. 设 P 为 H 的 Sylow p-子群. 由假设， $\mathcal{M}_d(P)=\{P_1,P_2,\cdots,P_d\}$ 中的每个元 P_i 在 G 中是正规嵌入的. 若 $p=2$, 由引理 2.7 知 H 是 2-幂零群. 当然 H 是 2-超可解的. 若 $p>2$, 由假设， H 是 p-可解群. 因此 H 满足定理 3.1 的条件，因此 H 是 p-超可解群. 总之， H 是 p-超可解的.

(1) $O_{p'}(H)=1$.

令 $N=O_{p'}(H)$, 则 PN/N 是 H/N 的 Sylow p-子群， $PN/N\cong P$ 且 $\mathcal{M}_d(PN/N)=\{P_1N/N,\cdots,P_rN/N\}$. 由于 P_iN/N 在 G/N 中是正规嵌入的，因此 $(G/N,H/N)$ 满足定理条件，由归纳知 $(G/N)^{\mathcal{F}}$ 是 p'-群. 由于 $(G/N)^{\mathcal{F}}=G^{\mathcal{F}}N/N$ 且 N 是 p'-群，则 $G^{\mathcal{F}}$ 是 p'-群.

(2) H 是可解群.

由于 H 是 p-超可解群且 $O_{p'}(H)=1$, 因此 $H=O_{p,p'}(H)$. 所以 H 的 Sylow p-子群 P 在 G 中正规. 另一方面， H' 是 p-幂零群. 又 $O_{p'}(H)=1$, 因此 $O_{p'}(H')=1$. 于是 H' 是 p-群，从而 H 是可解群.

(3) $F(H)=P$.

由于 P 在 H 中正规且 H' 为 p-群，因此 $H'\leqslant P\leqslant F(H)$. 又 $F(H)$ 的 Hall p'-子群在 H 中正规且 $O_{p'}(H)=1$, 因此 $F(H)=P$ 是 p-群.

(4) $G^{\mathcal{F}}=1$.

从 (2) 和 (3) 可知 (G,H) 满足引理 2.8 的条件，因此 $G\in\mathcal{F}$. 于是 $G^{\mathcal{F}}$ 是 p'-群. 当 $\pi=\{p\}$ 时定理证毕.

考虑 π 的一般情况. 对于任意 $p\in\pi$, 由上可知 $G^{\mathcal{F}}$ 是 p'-群. 则 $G^{\mathcal{F}}$ 是 π'-群.

推论 3.1 设 $\mathcal{F}$ 是包含 $\mathcal{U}$ 的饱和群系，H 为 G 的正规子群. 若对于 H 的每个 Sylow 子群 P, $\mathcal{M}_d(P)$ 中的每个元正规嵌入于 G, 则只要 W 是 G 的 $\mathcal{F}$-子群，就有 WH 也是 $\mathcal{F}$-子群.

作为定理 3.3 的注记，我们给出下面的例子[8] 例 3.5.

例 3.1 存在包含 $\mathcal{U}$ 的饱和群系 $\mathcal{F}$, 可解群 G 和它的正规子群 H, 虽然满足 $G/H\in\mathcal{F}$ 且对于 H 的每个 Sylow 子群 P, $\mathcal{M}_d(P)$ 中的每个元在 G 中是 S-拟正规的，但 $G\notin\mathcal{F}$.

证 设 f 是一个群系函数. 对于素数 p, 以 $f(p)$ 表示 p'-群构成的群类，$\mathcal{F}$ 为由 $\{f(p)\}$ 局部定义的群系. 若 Y 是超可解群，则 Y 的任意 p-主因子 K/N 为 p 阶循环群，于是 $Y/C_Y(K/N)$ 为阶整除 $p-1$ 的循环群，因此 $Y/C_Y(K/N)\in f(p)$. 由定义， $Y\in\mathcal{F}$, 因此 $\mathcal{F}\supset\mathcal{U}$. 同样地， $A_4\in\mathcal{F}$.

令 $V=\langle a,b,c\rangle$ 是 3^3 阶初等交换群，令 α,β 是如下定义的 V 的两个自同构

$$\alpha=\begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix} a & b & c\\ b & c^{-1} & a^{-1}\end{pmatrix},$$

可见 $\alpha^3=\beta^3=(\alpha\beta)^2=1$, 于是 $A=\langle\alpha,\beta\rangle\cong A_4$. 此时 A 依自同构作用在 V 上. 令 $G=VA$ 是相应的半直积. V 是忠实的不可约 A_4-模，因此 V 是 G 的极小正规子群且 $C_A(V)=1$. 由于 $A_4\in\mathcal{F}$ 且 $G/V\cong A=A_4$, 因此 $G/V\in\mathcal{F}$. 令 $H=VT$, 其中 T 是 G 的 Sylow 2-子群，则 $O^3(G)\leqslant H\trianglelefteq G$. 由于 T 是 4 阶初等交换群，因此含于 V 中的 H 的极小正规子群是 3 阶的. 由 Maschke 定理， V 作为 T-模是完全可约的. 因此 $V=\langle a_1\rangle\times\langle a_2\rangle\times\langle a_3\rangle$, 其中 $\langle a_i\rangle(i=1,2,3)$ 都是 T-不变的. 令 $V_i=\langle a_j\mid j\neq i\rangle$, 则 V_i 是 G 的 S-拟正规子群[3] 引理 B 且 $\mathcal{M}_d(V)=\{V_1,V_2,V_3\}$. 另一方面， V 是 G 的 3-主因子且 $G/C_G(V)=G/V\cong A_4$ 不是 $3'$-群，因此 $G\notin\mathcal{F}$.

在定理 3.2 中，若我们以 $\mathcal{M}(P)$ 代替 $\mathcal{M}_d(P)$, 依类似证明，可以得到下列结果：

定理 3.4 设 $\mathcal{F}$ 为包含 $\mathcal{U}$ 的饱和群系， G 为群， H 为正规 $\pi-\{2\}$-可解子群且 $G/H\in\mathcal{F}$. 假设对于每个素数 $p\in\pi$ 及 H 的 Sylow p-子群 P, $\mathcal{M}(P)$ 中的每个元在 G 中是 S-拟正规嵌入的，则 $G^{\mathcal{F}}$ 是 H 的 π' 子群.

推论 3.2[5] 设 $\mathcal{F}$ 为包含 $\mathcal{U}$ 的饱和群系， G 为群， H 为正规子群且 $G/H\in\mathcal{F}$. 假设对于 H 的 Sylow 子群 P, $\mathcal{M}(P)$ 中的每个元在 G 中是 S-拟正规嵌入的，则 $G\in\mathcal{F}$.

致谢 衷心感谢审稿人提出的宝贵意见.

参 考 文 献

[1] Kegel O H. Sylow-gruppen und subnormalteiler endlicher gruppen [J]. *Math Z*, 1962, 78:205–221.

[2] Deskins W E. On quasinormal subgroups of finite groups [J]. *Math Z*, 1963, 82:125–132.

[3] Schmid P. Subgroups permutable with all Sylow subgroups [J]. *J Algebra*, 1998, 207:285–293.

[4] Ballester-Bolinches A, Pedraza-Aquilera M C. Sufficient conditions for supersolvability of finite groups [J]. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 1998, 127:118–123.

[5] Assad M, Heliel A A. On S-quasinormal embedded subgroups of finite groups [J]. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2001, 165:129–135.

[6] Li Shirong, He Xuanli. On normally embedded subgroups of finite groups [J]. *Comm Algebra*, 2008, 36:2333–2340.

[7] Doerk R, Hawkes T. Finite soluble groups [M]. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.

[8] 陈重穆．内外 Σ-群及极小非 Σ-群 [M]. 重庆：西南师大出版社， 1988.

[9] Tate J. Nilpotent quotient groups [J]. *Topology*, 1964, 3:109–111.

[10] Huppert B. Endliche gruppen I [M]. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1967.

[11] Robinson D J S. A course in the theory of groups [M]. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2003.

On S-Quasinormally Embedded Subgroups of Prime Power Order in Finite Groups

LI Shirong[1] DU Ni[2] ZHONG Xianggui[3]

[1]College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning 530004, China. E-mail: shirong@gxu.edu.cn
[2]Corresponding author. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, Fujian, China. E-mail: duni@xmu.edu.cn
[3]College of Mathematical Sciences, Guangxi Normal University, Guilin 541004, Guangxi, China. E-mail: xgzhong@mailbox.gxnu.edu.cn

Abstract Let G be a p-solvable finite group, where p is an odd prime divisor of $|G|$, and P be a Sylow p-subgroup of G with the smallest generator number d. Consider the set $\mathcal{M}_d(P) = \{P_1, \cdots, P_d\}$, where $P_1, \cdots, P_d$ are the maximal subgroups of P such that $\bigcap\limits_{i=1}^{d} P_i = \Phi(P)$. It is shown that if every member of $\mathcal{M}_d(P)$ is S-quasinormally embedded in G, then G is p-supersolvable. As its applications, some further results are obtained.

Keywords Saturated formation, S-quasinormally embedded subgroup
2000 MR Subject Classification 20D10

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 32 No. 1, 2011
by ALLERTON PRESS, INC. NEW YORK, USA