数 学 年 刊 A 辑
2021, 42(4):359–378
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2021.0028

# 五次完全幂的少位数三进制展开*

罗家贵[1] 李 想[2]

**摘要** 本文讨论了 Michael Bennett 在 [Bennett M, Bugeaud Y, Mignotte M. Perfect powers with few binary digits and related Diophantine problem [J]. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci*, 2013, XII:941–953.] 中提出的一类丢番图方程, 即五次完全幂的少位数三进制展开. 作者证明了丢番图方程

$$3^a+3^b+2=n^5,\quad a\geqslant b>0$$

有唯一的正整数解 $(a,b,n)=(3,1,2)$.

**关键词** 丢番图方程, 三进制, 同余, 正整数解
**MR (2000) 主题分类** 11D41, 11D61
**中图法分类** O156.7
**文献标志码** A
**文章编号** 1000-8314(2021)04-0359-20

## 1 引 言

设 $N$ 表示全体正整数组成的集合.

2013 年, Bennett, Bugeaud 和 Mignotte[1] 利用对数线性形研究了形如 $x^a+y^b+1=z^q$ 的丢番图方程, 得到许多结论, 其中 $x,y,z,a,b,q\in N$.

众所周知, 任何正整数 $n$ 可以唯一地表示为

$$n=a_0+a_1b+\cdots+a_mb^m,$$

其中整数 $b>1$ 为整数基, $a_i\in\{0,1,\cdots,b-1\}$, $0\leqslant i\leqslant m$ 称为位数. 对给定的一个整数基 $b>1$, 令 $B_k(b)$ 表示 $b$ 进制展开式中至多有 $k$ 个非零位数的正整数集合. 标准密度论证表明, 对于特定的正整数序列 $S$, 一般来说, 交集 $S\cap B_k(b)$ 是一个有限集, 但要证明这一结论是非常困难的. 若 $S$ 由平方数全体构成, 则 $S\cap B_3(b)$ 不是有限集 (因为 $((1+b^l)^2=1+2b^l+b^{2l},l\geqslant 1)$). 2002 年 Szalay[2] 证明了若 $S$ 是奇平方数全体构成的集合, 则 $S\cap B_3(2)=\{7^2,23^2,(2^t+1)^2,t\in N\}$. 令 $S$ 是与 3 互素的正整数平方全体构成的集合, 2012 年 Bennett[3] 证明了 $S\cap B_3(3)=\{1^2,5^2,8^2,13^2,(3^t+1)^2\}$, 这里 $t$ 是一个正整数. 同时文 [3] 也证明了 $S\cap B_3(3)=\{13^3\}$, 这里 $S$ 是与 3 互素的正整数 $q$ 次幂全体构成

本文 2020 年 4 月 10 日收到, 2021 年 7 月 23 日收到修改稿.
[1]西华师范大学数学与信息学院, 四川 南充 637009. E-mail: luojg62@aliyun.com
[2]西华师范大学附属小学, 四川 眉山 620575. E-mail: lixiang851005@163.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11871058) 和四川省教育厅重大专项 (No. 16ZA0173) 的资助.

的集合, 素数 $q=3$ 或 $7 \leqslant q < 1000$ . 若 $S$ 是正整数 $q$ 次幂全体构成的集合 $(q \geqslant 2)$, 则 $\{7^2, 13^3, 23^2, 3^4, 9^2, (2^t+1)^2\} \subset (S \cap B_3(2)) \cup (S \cap B_3(3))$. Bennett 证明了如下定理.

**定理 1.1**[3] 若存在整数 $a > b > 0$, $q \geqslant 2$ 满足 $x^a + x^b + 1 = y^q$, $x \in \{2,3\}$, 则 $(x,a,b,y,q) = (2,5,4,7,2), (2,9,4,23,2), (3,7,2,13,3), (2,6,4,3,4), (4,3,2,9,2), (4,3,2,3,4)$ 或 $(x,a,b,y,q) = (2,2t,t+1,2^t+1,2)$, 其中 $t=2$ 或 $t \geqslant 4$.

在对 $n^5$ 的三进制展开式进行分类时, Bennett 研究了方程

$$2^{\delta_1}3^a + 2^{\delta_2} = n^5, \quad a > 0,\ \delta_i \in \{0,1\}$$

和

$$2^{\delta_1}3^a + 2^{\delta_2}3^b + 2^{\delta_3} = n^5, \quad a > b > 0,\ \delta_i \in \{0,1\},$$

证明除情形 $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = (0,0,1)$ 外, 上述方程均无解. 2018 年, Singh[4] 研究了丢番图方程

$$3^a + 3^b + 2 = n^5, \tag{1.1}$$

并得到了以下结论.

**定理 1.2**[4] 若 $a \geqslant b > 0$, $n \in N$, 则当 $2 < n \leqslant 2+6(10^6)$ 时, 丢番图方程 $3^a+3^b+2=n^5$ 无正整数解.

在本文中, 我们将用因式分解、同余、三进制和丢番图逼近等初等方法完全地解决方程 (1.1), 我们证明了如下定理.

**定理 1.3** 若 $a \geqslant b > 0$, $n \in N$, 则方程

$$3^a + 3^b + 2 = n^5$$

的唯一正整数解是 $(a,b,n) = (3,1,2)$ .

本文的结构如下: 在第二节中, 我们给出了定理 1.3 的证明中所需要的一些引理. 在第三节中, 我们给出了定理 1.3 的证明.

## 2 引 理

本节, 主要介绍定理的证明中需要用到的引理.

**引理 2.1** 若 $ab$ 都是偶数, 或者一奇一偶, 则丢番图方程 (1.1) 无正整数解.

**证** 分两种情形证明.

**情形 1**　$a$,$b$ 均为偶数, 对方程 (1.1) 取模 8, 得

$$4 \equiv 3^a + 3^b + 2 \equiv n^5 \equiv 0 \pmod 8, \tag{2.1}$$

矛盾.

**情形 2**　$a$ 为奇数, $b$ 为偶数, 同理对方程 (1.1) 取模 8, 得

$$6 \equiv 3^a + 3^b + 2 \equiv n^5 \equiv 0 \pmod 8, \tag{2.2}$$

矛盾.

同理可证 $a$ 为偶数, $b$ 为奇数不成立. 因此方程 (1.1) 无正整数解.

**引理 2.2**　若方程 (1.1) 有正整数解, 则 $n \equiv 2 \pmod 6$.

**证**　对方程 (1.1) 取模 3, 得 $2 \equiv n^5 \pmod 3$. 由于 $(n,3)=1$, 有

$$n \equiv n^3 \equiv n^5 \equiv 2 \pmod 3.$$

令 $n = 3t+2$, $t$ 为非负整数. 由方程 (1.1) 可得 $n$ 为偶数, 所以 $t$ 为偶数, 因此 $n \equiv 3t+2 \equiv 2 \pmod 6$.

**引理 2.3**　若方程 (1.1) 有正整数解, 则 $a \equiv 1 \pmod 4$, $b \equiv 3 \pmod 4$ 或 $a \equiv 3 \pmod 4$, $b \equiv 1 \pmod 4$.

**证**　由引理 2.2, $n \equiv 2 \pmod 6$, 因此可设 $n = 6j+2$, 则方程 (1.1) 改写为

$$3^a + 3^b + 2 = (6t+2)^5. \tag{2.3}$$

对方程 (2.3) 取模 16, 得 $3^a + 3^b + 2 \equiv 0 \pmod{16}$. 由引理 2.1 知 $a$, $b$ 均为奇数.

若 $a \equiv b \equiv 3 \pmod 4$, 则 $8 \equiv 3^a + 3^b + 2 \equiv (6t+2)^5 \equiv 0 \pmod{16}$, 矛盾.

若 $a \equiv b \equiv 1 \pmod 4$, 则 $8 \equiv 3^a + 3^b + 2 \equiv (6t+2)^5 \equiv 0 \pmod{16}$, 矛盾.

从而可得 $a \equiv 1 \pmod 4$, $b \equiv 3 \pmod 4$ 或 $a \equiv 3 \pmod 4$, $b \equiv 1 \pmod 4$.

**引理 2.4**　方程 $3^a + 3^b + 2 = (6j+2)^5$ 有正整数解, 则 $5 \mid j$.

**证**　由引理 2.3, $a \equiv 1 \pmod 4$, $b \equiv 3 \pmod 4$, 或 $a \equiv 3 \pmod 4$, $b \equiv 1 \pmod 4$.

若 $a \equiv 1 \pmod 4$, $b \equiv 3 \pmod 4$, 则对方程 $3^a + 3^b + 2 = (6j+2)^5$ 取模 5, 得

$$2 \equiv 3^a + 3^b + 2 \equiv (6j+2)^5 \equiv 6j+2 \pmod 5,$$

因此 $5 \mid 6j$, 所以 $5 \mid j$. 同理可证 $a \equiv 3 \pmod 4), b \equiv 1 \pmod 4$ 时, $5 \mid j$.

**引理 2.5**　方程 (1.1) 有正整数解, 则

$$a \equiv 1 \pmod{20}, \quad b \equiv 3 \pmod{20};$$

或

$$a \equiv 3 \pmod{20}, \quad b \equiv 1 \pmod{20};$$

或

$$a \equiv 5 \pmod{20}, \quad b \equiv 7 \pmod{20};$$

或

$$a \equiv 7 \pmod{20}, \quad b \equiv 5 \pmod{20}.$$

**证** 由引理 2.2 及引理 2.4 得 $n^5 = (6j+2)^5 \equiv 7 \pmod{25}$. 由引理 2.3, $a \equiv 1 \pmod{4}$, $b \equiv 3 \pmod{4}$ 或 $a \equiv 3 \pmod{4}$, $b \equiv 1 \pmod{4}$.

若 $a \equiv 1 \pmod{4}$, $b \equiv 3 \pmod{4}$ , 则 $a \equiv 1 \pmod{20}$, $a \equiv 5 \pmod{20}$, $a \equiv 9 \pmod{20}$, $a \equiv 13 \pmod{20}$ 或 $a \equiv 17 \pmod{20}$.

(1) $a \equiv 1 \pmod{20}$. 由引理 2.4 得 $n = 6j+2$ 且 $5 \mid j$, 因此 $3 + 3^b + 2 \equiv 7 \pmod{25}$, 所以 $3^b \equiv 2 \pmod{25}$, 故 $b \equiv 3 \pmod{20}$.

(2) $a \equiv 5 \pmod{20}$. 同理可得 $18 + 3^b + 2 \equiv 7 \pmod{25}$, 故 $b \equiv 7 \pmod{20}$.

(3) $a \equiv 9 \pmod{20}$. 可得 $8 + 3^b + 2 \equiv 7 \pmod{25}$, 则 $b \equiv 11 \pmod{20}$. 此时, 有 $n^5 \equiv 3^9 + 3 + 2 \equiv 9 \pmod{11}$, 即 $1 \equiv n^{10} \equiv 9^2 \equiv 4 \pmod{11}$, 矛盾.

(4) $a \equiv 13 \pmod{20}$. 可得 $-2 + 3^b + 2 \equiv 7 \pmod{25}$, 则 $3^b \equiv 7 \pmod{25}$, 所以 $b \equiv 15 \pmod{20}$. 此时, $n^5 \equiv 3^3 + 3^5 + 2 \equiv 8 \pmod{11}$, 即 $1 \equiv n^{10} \equiv 8^2 \equiv 9 \pmod{11}$, 矛盾.

(5) $a \equiv 17 \pmod{20}$. 可得 $15 + 3^b \equiv 7 \pmod{25}$, 则 $b \equiv 19 \pmod{20}$. 此时, $n^5 \equiv 3^7 + 3^9 + 2 \equiv 4 \pmod{11}$, 即 $1 \equiv n^{10} \equiv 4^2 \equiv 5 \pmod{11}$, 矛盾.

类似可证 $a \equiv 3 \pmod{4}$, $b \equiv 1 \pmod{4}$.

**引理 2.6** 令

$$x_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 3^i, \quad a_i \in \{0,1,2\},\ 0 \leqslant i \leqslant k,\ a_k > 0,\ k \in N, \tag{2.4}$$

则有

$$160x_k + 320x_k^2 + 320x_k^3 + 160x_k^4 < 3^{4k+9},$$
$$2 \cdot 3^{5k} + 3^{5k+1} + 3^{5k+3} \leqslant 32x_k^5 < 2 \cdot 3^{5k+8}.$$

**证** 因为 $3^k \leqslant x_k < 3^{k+1}$, 所以

$$160x_k + 320x_k^2 + 320x_k^3 + 160x_k^4 < 2 \cdot 3^{k+5} + 2 \cdot 3^{2k+7} + 2 \cdot 3^{3k+8} + 2 \cdot 3^{4k+8} < 3^{4k+9},$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^{5k} + 3^{5k+1} + 3^{5k+3} &= 32 \cdot 3^{5k} \leqslant 32x_k^5 < 32 \cdot 3^{5k+5} \\ &= 2 \cdot 3^{5k+5} + 3^{5k+6} + 3^{5k+8} < 2 \cdot 3^{5k+8}. \end{aligned}$$

## 3　定理 1.3 的证明

设 $(a,b,n)$ 是方程 (1.1) 的一个任意的正整数解. 由引理 2.5 知 $a \equiv 1 \pmod{20}$, $b \equiv 3 \pmod{20}$ 或 $a \equiv 3 \pmod{20}, b \equiv 1 \pmod{20}$ 或 $a \equiv 5 \pmod{20}$, $b \equiv 7 \pmod{20}$ 或 $a \equiv 7 \pmod{20}$, $b \equiv 5 \pmod{20}$. 因此 $a \neq b$, 有 $a \geqslant b+2$. 由引理 2.2 知 $n = 6j+2$, $j \in N$, 故方程 (1.1) 等价于

$$3^a + 3^b + 2 = (6j+2)^5. \tag{3.1}$$

我们首先考虑情形: $a \equiv 3 \pmod{20}$, $b \equiv 1 \pmod{20}$.

若 $a=3$ 且 $b=1$, 则 $2^5 = 3^3+3+2 = n^5$, 所以 $(a,b,n)=(3,1,2)$ 是方程 (1.1) 的一个正整数解.

若 $a>3$ 且 $b=1$, 则令 $a = 20k+3$, $k \in N$, 将方程 (3.1) 左右两边同时减去 32, 可得

$$3^3(3^{20k}-1) = 2^5((3j)^5 + 5(3j)^4 + 10(3j)^3 + 10(3j)^2 + 15j). \tag{3.2}$$

因此 $3^2 \mid j$. 在方程 (3.2) 中用 $9h$ 替换 $j$, 并在方程两侧同除以 $3^3$, 可得

$$3^{20k} = 1 + 32(3^{12}\cdot h^5 + 5\cdot 3^9 \cdot h^4 + 10\cdot 3^6\cdot h^3 + 10\cdot 3^2\cdot h^2 + 5\cdot h). \tag{3.3}$$

设正整数 $h$ 的三进制展开式为

$$h = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot 3^i, \quad a_i \in \{0,1,2\},\ 0 \leqslant i \leqslant m-1,\ a_m \in \{1,2\},\ m \in N. \tag{3.4}$$

记

$$h_r = \sum_{i=0}^{r} a_i \cdot 3^i, \quad r \leqslant m.$$

由方程 (3.3) 可得

$$3^{20k} = 1 + 32\cdot 3^{12}\cdot h_m^5 + 160\cdot 3^9\cdot h_m^4 + 320\cdot 3^6\cdot h_m^3 + 320\cdot 3^3\cdot h_m^2 + 160\cdot h_m. \tag{3.5}$$

由引理 2.6 可得

$$2\cdot 3^{5m+12} + 3^{5m+13} + 3^{5m+15} \leqslant 32\cdot 3^{12}\cdot h_m^5 < 2\cdot 3^{5m+20},$$

且

$$\begin{aligned} & 1 + 160\cdot 3^9\cdot h_m^4 + 320\cdot 3^6\cdot h_m^3 + 320\cdot 3^3\cdot h_m^2 + 160\cdot h_m \\ < {} & 3^9\cdot(160\cdot h_m^4 + 320\cdot h_m^3 + 320\cdot h_m^2 + 160\cdot h_m) \\ < {} & 3^{4m+18}. \end{aligned}$$

于是由方程 (3.5) 可得

$$2\cdot 3^{5m+12} + 3^{5m+13} + 3^{5m+15} \leqslant 3^{20k} < 3^{4m+18} + 2\cdot 3^{5m+20}.$$

因此 $5m+16 \leqslant 20k \leqslant 5m+20$, 所以 $20k=5m+20$. 令

$$1+160\cdot 3^9\cdot h_m^4+320\cdot 3^6\cdot h_m^3+320\cdot 3^3\cdot h_m^2+160\cdot h_m=\sum_{i=0}^{u} x_i\cdot 3^i,$$

$$x_i\in\{0,1,2\},\ 0\leqslant i\leqslant u-1,\ x_u\in\{1,2\},\ u\leqslant 4m+17.$$

则由方程 (3.5) 可得

$$32\cdot 3^{12}\cdot h_m^5=\sum_{i=0}^{u} b_i\cdot 3^i+\sum_{i=u+1}^{5m+19} 2\cdot 3^i. \tag{3.6}$$

如果

$$h_m\leqslant 2\cdot 3^{m-7}+3^{m-6}+2\cdot 3^{m-5}+2\cdot 3^{m-2}+2\cdot 3^{m-1}+2\cdot 3^m=6341\cdot 3^{m-7},$$

则

$$32\cdot 3^{12}\cdot h_m^5\leqslant 32\cdot 6341^5\cdot 3^{5m-23}<2\cdot 3^{5m+12}+3^{5m+13}+\sum_{i=5m+14}^{5m+19} 2\cdot 3^i.$$

根据定理 1.2 的结论可得 $5m+13>4m+17\geqslant u$, 与方程 (3.6) 矛盾.

如果

$$h_m\geqslant 2\cdot 3^{m-6}+2\cdot 3^{m-5}+2\cdot 3^{m-2}+2\cdot 3^{m-1}+2\cdot 3^m=2114\cdot 3^{m-6},$$

则

$$32\cdot 3^{12}\cdot h_m^5>32\cdot 2114^5\cdot 3^{5m-18}>3^{5m+12}+3^{5m+20},$$

这也与方程 (3.6) 矛盾. 因此得到

$$a_{m-3}=a_{m-4}=0,\quad a_{m-6}=1,\quad a_{m-7}=a_{m-5}=a_{m-2}=a_{m-1}=a_m=2.$$

设

$$x=2\cdot 3^{m-2}+2\cdot 3^{m-1}+2\cdot 3^m=3^{m-2}(2+2\cdot 3+2\cdot 3^2)=26\cdot 3^{m-2},$$

则 $h_m=h_{m-3}+x$. 如果

$$h_{m-3}\leqslant \frac{5}{2}\cdot 3^{m-5},$$

那么

$$h_m^2=(h_{m-3}+x)^2=h_{m-3}^2+2xh_{m-3}+x^2=U+x^2,$$

其中

$$U\leqslant\Big(\Big(\frac{5}{2}\Big)^2+2\cdot\frac{5}{2}\cdot 26\cdot 3^3\Big)\cdot 3^{2m-10}=\frac{14065}{4}\cdot 3^{2m-10}.$$

因此

$$h_m^3=(U+x^2)(h_{m-3}+x)=U\cdot h_{m-3}+U\cdot x+x^2\cdot h_{m-3}+x^3=V+x^3,$$

其中

$$V \leqslant \Big(\frac{14065}{4}\cdot\frac{5}{2}+\frac{14065}{4}\cdot 26\cdot 3^3+26^2\cdot\frac{5}{2}\cdot 3^6\Big)\cdot 3^{3m-15}=\frac{29673665}{8}\cdot 3^{3m-15}.$$

所以

$$h_m^4=(V+x^3)(h_{m-3}+x)=V\cdot h_{m-3}+V\cdot x+x^3\cdot h_{m-3}+x^4=W+x^4,$$

其中

$$W \leqslant \Big(\frac{29673665}{8}\cdot\frac{5}{2}+\frac{29673665}{8}\cdot 26\cdot 3^3+26^3\cdot\frac{5}{2}\cdot 3^9\Big)\cdot 3^{4m-20}=\frac{55648130305}{16}\cdot 3^{4m-20}.$$

于是

$$h_m^5=(W+x^3)(h_{m-3}+x)=W\cdot h_{m-3}+W\cdot x+x^4\cdot h_{m-3}+x^5=T+x^5,$$

其中

$$\begin{aligned}T &\leqslant \Big(\frac{55648130305}{16}\cdot\frac{5}{2}+26\cdot\frac{55648130305}{16}\cdot 3^3+26^4\cdot\frac{5}{2}\cdot 3^{12}\Big)\cdot 3^{5m-25}\\ &=3^{5m-25}\cdot\frac{97836678193025}{32}.\end{aligned}$$

注意到

$$32\cdot 3^{12}\cdot T\leqslant 3^{5m-13}\cdot 32\cdot\frac{97836678193025}{32}<3^{5m+14}+3^{5m+15}+3^{5m+16}$$

和

$$32\cdot 3^{12}\cdot x^5=32\cdot 26^5\cdot 3^{5m+2}<3^{5m+2}(3^{10}+3^{11}+3^{12}+3^{13}+3^{14}+2\cdot 3^{15}+2\cdot 3^{16}+2\cdot 3^{17}),$$

有

$$32\cdot 3^{12}\cdot h_m^5=32\cdot 3^{12}\cdot T+32\cdot 3^{12}\cdot x^5\leqslant 3^{5m+12}+3^{5m+13}+\sum_{i=5m+14}^{5m+19}2\cdot 3^i,$$

由于 $5m+13>4m+17\geqslant u$, 故与方程 (3.6) 矛盾. 如果

$$h_{m-3}>\frac{5}{2}\cdot 3^{m-5},$$

则有

$$h_{m-6}>2\cdot 3^{m-7}+3^{m-6}+\Big(\frac{5}{2}-2\Big)3^{m-5}=\frac{19}{18}\cdot 3^{m-5}.$$

设

$$y=2\cdot 3^{m-5}+2\cdot 3^{m-2}+2\cdot 3^{m-1}+2\cdot 3^m=704\cdot 3^{m-5},$$

同理, 有

$$\begin{aligned}h_m^2&=(h_{m-6}+y)^2=h_{m-6}^2+2yh_{m-6}+y^2=U+y^2,\\ U&>\Big(\Big(\frac{19}{18}\Big)^2+2\cdot\frac{19}{18}\cdot 704\Big)\cdot 3^{2m-10}=\frac{481897}{18^2}\cdot 3^{2m-10}.\\ h_m^3&=(U+y^2)(h_{m-6}+y)=U\cdot h_{m-6}+U\cdot y+y^2\cdot h_{m-6}+y^3=V+y^3,\end{aligned}$$

$$V > \Big(\frac{481897}{18^2}\cdot\frac{19}{18}+704\cdot\frac{481897}{18^2}+\frac{19}{18}\cdot 704^2\Big)3^{3m-15}=\frac{9166766923}{18^3}\cdot 3^{3m-15}.$$

$$h_m^4=(V+y^3)(h_{m-6}+y)=V\cdot h_{m-6}+V\cdot y+y^3\cdot h_{m-6}+y^4=W+y^4,$$

$$\begin{aligned}W &> \Big(\frac{19}{18}\cdot\frac{9166766923}{18^3}+704\cdot\frac{9166766923}{18^3}+\frac{19}{18}\cdot 704^3\Big)\cdot 3^{4m-20}\\ &=\frac{155114063642018}{18^4}\cdot 3^{4m-20}.\end{aligned}$$

$$h_m^5=(W+y^4)(h_{m-6}+y)=W\cdot h_{m-6}+W\cdot y+y^4\cdot h_{m-6}+y^5=T+y^5,$$

$$\begin{aligned}T &> \Big(\frac{154997864300305}{18^4}\cdot\frac{19}{18}+704\cdot\frac{154997864300305}{18^4}+\frac{19}{18}\cdot 704^4\Big)3^{5m-25}\\ &=\frac{16899074411620502}{18^5}\cdot 3^{5m-25}.\end{aligned}$$

注意到

$$32\cdot 3^{12}\cdot T>3^{5m-13}\cdot 32\cdot\frac{2457008148989818819}{18^5}>3^{5m-13}\cdot(3^{25}+3^{26}+2\cdot 3^{28})$$

和

$$32\cdot 3^{12}\cdot y^5=32\cdot 704^5\cdot 3^{5m-13}=3^{5m-13}(1+\cdots+3^{28}+2\cdot 3^{29}+2\cdot 3^{30}+2\cdot 3^{31}+2\cdot 3^{32}),$$

有

$$32\cdot 3^{12}\cdot h_m^5=32\cdot 3^{12}\cdot T+32\cdot 3^{12}\cdot y^5>3^{5m+12}+3^{5m+13}+3^{5m+20},$$

也与方程 (3.6) 矛盾.

若 $a>b>5$, 则令 $a=20k+3$, $k\in N$, 将方程 (3.1) 左右两边同时减去 32 并除以 3, 可得

$$3^{20k+2}+3^{b-1}=1+3^2+32(3^4\cdot j^5+5\cdot 3^3\cdot j^4+10\cdot 3^2\cdot j^3+10\cdot 3\cdot j^2+5\cdot j).\tag{3.7}$$

设正整数 $j$ 的三进制展开式为

$$j=\sum_{i=0}^{m}a_i\cdot 3^i,\quad a_i\in\{0,1,2\},\quad 0\leqslant i\leqslant m-1,\ a_m\in\{1,2\},\ m\in N.\tag{3.8}$$

记

$$h_r=\sum_{i=0}^{r}a_i\cdot 3^i,\quad r\leqslant m.$$

由方程 (3.7) 可得

$$\begin{aligned}3^{20k+2}+3^{b-1}&=1+3^2+32\cdot 3^4\cdot h_m^5+160\cdot 3^3\cdot h_m^4\\ &\quad+320\cdot 3^2\cdot h_m^3+320\cdot 3\cdot h_m^2+160\cdot h_m.\end{aligned}\tag{3.9}$$

由引理 2.6 可得

$$2\cdot 3^{5m+4}+3^{5m+5}+3^{5m+7}\leqslant 32\cdot 3^4\cdot h_m^5<2\cdot 3^{5m+12},$$

且

$$\begin{aligned}&1+3^2+160\cdot 3^3\cdot h_m^4+320\cdot 3^2\cdot h_m^3+320\cdot 3\cdot h_m^2+160\cdot h_m\\ <\ &3^3(160\cdot h_m^4+320\cdot h_m^3+320\cdot h_m^2+160\cdot h_m)\\ <\ &3^{4m+12}.\end{aligned}$$

于是由方程 (3.9) 可得

$$2\cdot 3^{5m+4}+3^{5m+5}+3^{5m+7}<3^{20k+2}+3^{b-1}<3^{4m+12}+2\cdot 3^{5m+12}.$$

又由 $b-1\leqslant 20k$, 因此 $5m+8\leqslant 20k+2\leqslant 5m+12$, 所以 $20k+2=5m+12$. 令

$$1+3^2+160\cdot 3^3\cdot h_m^4+320\cdot 3^2\cdot h_m^3+320\cdot 3\cdot h_m^2+160\cdot h_m=\sum_{i=0}^{u}x_i\cdot 3^i,$$

$$x_i\in\{0,1,2\},\ 0\leqslant i\leqslant u-1,\ x_u\in\{1,2\},\ u\leqslant 4m+11,$$

则由方程 (3.9) 可得:

若 $3^{b-1}\leqslant x_u\cdot 3^u$, 则

$$32\cdot 3^4\cdot h_m^5=\sum_{i=0}^{u}b_i\cdot 3^i+\sum_{i=u+1}^{5m+11}2\cdot 3^i;\tag{3.10}$$

若 $3^{b-1}>x_u\cdot 3^u$, 则

$$32\cdot 3^4\cdot h_m^5=\sum_{i=0}^{u}b_i\cdot 3^i+\sum_{i=u+1}^{b-2}2\cdot 3^i+3^{5m+12}.\tag{3.11}$$

如果

$$h_m\leqslant 2\cdot 3^{m-7}+3^{m-6}+2\cdot 3^{m-5}+2\cdot 3^{m-2}+2\cdot 3^{m-1}+2\cdot 3^m=6341\cdot 3^{m-7},$$

则

$$32\cdot 3^4\cdot h_m^5\leqslant 32\cdot 6341^5\cdot 3^{5m-31}<2\cdot 3^{5m+4}+3^{5m+5}+\sum_{i=5m+6}^{5m+11}2\cdot 3^i.$$

根据定理 1.2 的结论可得 $5m+5>4m+11\geqslant u$, 与方程 (3.10) 及方程 (3.11) 矛盾.

如果

$$h_m\geqslant 2\cdot 3^{m-6}+2\cdot 3^{m-5}+2\cdot 3^{m-2}+2\cdot 3^{m-1}+2\cdot 3^m=2114\cdot 3^{m-6},$$

则

$$32\cdot 3^4\cdot h_m^5>32\cdot 2114^5\cdot 3^{5m-26}>3^{5m+4}+3^{5m+12},$$

这也与方程 (3.10) 和方程 (3.11) 矛盾. 因此得到

$$a_{m-3}=a_{m-4}=0,\quad a_{m-6}=1,\quad a_{m-7}=a_{m-5}=a_{m-2}=a_{m-1}=a_m=2.$$

设

$$x=2\cdot 3^{m-2}+2\cdot 3^{m-1}+2\cdot 3^m=3^{m-2}(2+2\cdot 3+2\cdot 3^2)=26\cdot 3^{m-2},$$

则 $h_m = h_{m-3} + x$. 如果

$$h_{m-3} \leqslant \frac{5}{2} \cdot 3^{m-5},$$

那么

$$h_m^2 = (h_{m-3} + x)^2 = h_{m-3}^2 + 2xh_{m-3} + x^2 = U + x^2,$$

其中

$$U \leqslant \left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 26 \cdot 3^3\right) \cdot 3^{2m-10} = \frac{14065}{4} \cdot 3^{2m-10}.$$

因此

$$h_m^3 = (U + x^2)(h_{m-3} + x) = U \cdot h_{m-3} + U \cdot x + x^2 \cdot h_{m-3} + x^3 = V + x^3,$$

其中

$$V \leqslant \Big(\frac{14065}{4} \cdot \frac{5}{2} + \frac{14065}{4} \cdot 26 \cdot 3^3 + 26^2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 3^6\Big) \cdot 3^{3m-15} = \frac{29673665}{8} \cdot 3^{3m-15}.$$

所以

$$h_m^4 = (V + x^3)(h_{m-3} + x) = V \cdot h_{m-3} + V \cdot x + x^3 \cdot h_{m-3} + x^4 = W + x^4,$$

其中

$$W \leqslant \Big(\frac{29673665}{8} \cdot \frac{5}{2} + \frac{29673665}{8} \cdot 26 \cdot 3^3 + 26^3 \cdot \frac{5}{2} \cdot 3^9\Big) \cdot 3^{4m-20} = \frac{55648130305}{16} \cdot 3^{4m-20}.$$

于是

$$h_m^5 = (W + x^3)(h_{m-3} + x) = W \cdot h_{m-3} + W \cdot x + x^4 \cdot h_{m-3} + x^5 = T + x^5,$$

其中

$$T \leqslant \Big(\frac{55648130305}{16} \cdot \frac{5}{2} + \frac{55648130305}{16} \cdot 26 \cdot 3^3 + 26^4 \cdot \frac{5}{2} \cdot 3^{12}\Big) \cdot 3^{5m-25} = \frac{97836678193025}{32} \cdot 3^{5m-25}.$$

注意到

$$32 \cdot 3^4 \cdot T \leqslant 3^{5m-21} \cdot 32 \cdot \frac{97836678193025}{32} < 3^{5m+6} + 3^{5m+7} + 3^{5m+8}$$

和

$$32 \cdot 3^4 \cdot x^5 = 32 \cdot 26^5 \cdot 3^{5m-6} < 3^{5m-6}(3^{10} + 3^{11} + 3^{12} + 3^{13} + 3^{14} + 2 \cdot 3^{15} + 2 \cdot 3^{16} + 2 \cdot 3^{17}),$$

有

$$32 \cdot 3^4 \cdot h_m^5 = 32 \cdot 3^4 \cdot T + 32 \cdot 3^4 \cdot x^5 \leqslant 3^{5m+4} + 3^{5m+5} + \sum_{i=5m+6}^{5m+11} 2 \cdot 3^i,$$

由于 $5m + 5 > 4m + 11 \geqslant u$, 故与方程 (3.10) 和方程 (3.11) 矛盾. 如果

$$h_{m-3} > \frac{5}{2} \cdot 3^{m-5},$$

则有

$$h_{m-6} > 2\cdot 3^{m-7} + 3^{m-6} + \Big(\frac{5}{2} - 2\Big)3^{m-5} = \frac{19}{18}\cdot 3^{m-5}.$$

设

$$y = 2\cdot 3^{m-5} + 2\cdot 3^{m-2} + 2\cdot 3^{m-1} + 2\cdot 3^{m} = 704\cdot 3^{m-5},$$

同理, 有

$$\begin{aligned}
h_m^2 &= (h_{m-6}+y)^2 = h_{m-6}^2 + 2yh_{m-6} + y^2 = U + y^2,\\
U &> \Big(\Big(\frac{19}{18}\Big)^2 + 2\cdot\frac{19}{18}\cdot 704\Big)\cdot 3^{2m-10} = \frac{481897}{18^2}\cdot 3^{2m-10}.\\
h_m^3 &= (U+y^2)(h_{m-6}+y) = U\cdot h_{m-6} + U\cdot y + y^2\cdot h_{m-6} + y^3 = V + y^3,\\
V &> \Big(\frac{481897}{18^2}\cdot\frac{19}{18} + 704\cdot\frac{481897}{18^2} + \frac{19}{18}\cdot 704^2\Big)3^{3m-15} = \frac{9166766923}{18^3}\cdot 3^{3m-15}.\\
h_m^4 &= (V+y^3)(h_{m-6}+y) = V\cdot h_{m-6} + V\cdot y + y^3\cdot h_{m-6} + y^4 = W + y^4,\\
W &> \Big(\frac{19}{18}\cdot\frac{9166766923}{18^3} + 704\cdot\frac{9166766923}{18^3} + \frac{19}{18}\cdot 704^3\Big)\cdot 3^{4m-20}\\
&= \frac{154997864300305}{18^4}\cdot 3^{4m-20}.\\
h_m^5 &= (W+y^4)(h_{m-6}+y) = W\cdot h_{m-6} + W\cdot y + y^4\cdot h_{m-6} + y^5 = T + y^5,\\
T &> \Big(\frac{154997864300305}{18^4}\cdot\frac{19}{18} + 704\cdot\frac{154997864300305}{18^4} + \frac{19}{18}\cdot 704^4\Big)3^{5m-25}\\
&= \frac{2457008148989818819}{18^5}\cdot 3^{5m-25}.
\end{aligned}$$

注意到

$$32\cdot 3^4\cdot T > 3^{5m-21}\cdot 32\cdot\frac{2457008148989818819}{18^5} > 3^{5m-21}\cdot(3^{26} + 2\cdot 3^{27} + 3^{28})$$

和

$$32\cdot 3^4\cdot y^5 = 32\cdot 704^5\cdot 3^{5m-21} = 3^{5m-21}(2\cdot 3^{27} + 2\cdot 3^{28} + 2\cdot 3^{29} + 2\cdot 3^{30} + 2\cdot 3^{31}) + 2\cdot 3^{32},$$

有

$$32\cdot 3^4\cdot h_m^5 = 32\cdot 3^4\cdot T + 32\cdot 3^4\cdot y^5 > 3^{5m+5} + 3^{5m+6} + 3^{5m+12},$$

也与方程 (3.10) 和方程 (3.11) 矛盾.

其次我们考虑情形: $a \equiv 7 \pmod{20},\ b \equiv 5 \pmod{20}$.

令 $a = 20k+7$, $k \in N$, 将方程 (3.1) 左右两边同时减去 32 并除以 3, 可得

$$3^{20k+6} + 3^{b-1} = 1 + 3^2 + 32(3^4\cdot j^5 + 5\cdot 3^3\cdot j^4 + 10\cdot 3^2\cdot j^3 + 10\cdot 3\cdot j^2 + 5\cdot j). \tag{3.12}$$

设正整数 $j$ 的三进制展开式为

$$j = \sum_{i=0}^{m} a_i\cdot 3^i,\quad a_i \in \{0,1,2\},\ 0 \leqslant i \leqslant m-1,\ a_m \in \{1,2\},\ m \in N. \tag{3.13}$$

记

$$h_r=\sum_{i=0}^{r}a_i\cdot 3^i,\quad r\leqslant m.$$

由方程 (3.13) 可得

$$\begin{aligned}3^{20k+6}+3^{b-1}=1+3^2+32\cdot 3^4\cdot h_m^5+160\cdot 3^3\cdot h_m^4+320\cdot 3^2\cdot h_m^3\\ +320\cdot 3\cdot h_m^2+160\cdot h_m.\end{aligned}\tag{3.14}$$

由引理 2.6 可得

$$2\cdot 3^{5m+4}+3^{5m+5}+3^{5m+7}\leqslant 32\cdot 3^4\cdot h_m^5<2\cdot 3^{5m+12},$$

且

$$\begin{aligned}&1+3^2+160\cdot 3^3\cdot h_m^4+320\cdot 3^2\cdot h_m^3+320\cdot 3\cdot h_m^2+160\cdot h_m\\ &<3^3(160\cdot h_m^4+320\cdot h_m^3+320\cdot h_m^2+160\cdot h_m)\\ &<3^{4m+12}.\end{aligned}$$

于是由方程 (3.14) 可得

$$2\cdot 3^{5m+4}+3^{5m+5}+3^{5m+7}<3^{20k+6}+3^{b-1}<3^{4m+12}+2\cdot 3^{5m+12}.$$

又由 $b-1\leqslant 20k+4$, 因此 $5m+8\leqslant 20k+6\leqslant 5m+12$, 所以 $20k+6=5m+11$. 令

$$\begin{aligned}&1+3^2+160\cdot 3^3\cdot h_m^4+320\cdot 3^2\cdot h_m^3+320\cdot 3\cdot h_m^2+160\cdot h_m=\sum_{i=0}^{u}x_i\cdot 3^i,\\ &x_i\in\{0,1,2\},\ 0\leqslant i\leqslant u-1,\ x_u\in\{1,2\},\ u\leqslant 4m+11,\end{aligned}$$

则由方程 (3.14) 可得

若 $3^{b-1}\leqslant x_u\cdot 3^u$, 则

$$32\cdot 3^4\cdot h_m^5=\sum_{i=0}^{u}b_i\cdot 3^i+\sum_{i=u+1}^{5m+10}2\cdot 3^i;\tag{3.15}$$

若 $3^{b-1}>x_u\cdot 3^u$, 则

$$32\cdot 3^4\cdot h_m^5=\sum_{i=0}^{u}b_i\cdot 3^i+\sum_{i=u+1}^{b-2}2\cdot 3^i+3^{5m+11}.\tag{3.16}$$

如果

$$h_m\leqslant 2\cdot 3^{m-7}+3^{m-6}+3^{m-5}+2\cdot 3^{m-4}+2\cdot 3^{m-3}+2\cdot 3^{m-2}+2\cdot 3^m=5090\cdot 3^{m-7},$$

则

$$32\cdot 3^4\cdot h_m^5\leqslant 32\cdot 5090^5\cdot 3^{5m-31}<3^{5m+3}+3^{5m+4}+\sum_{i=5m+5}^{5m+10}2\cdot 3^i.$$

根据定理 1.2 的结论可得 $5m+4>4m+11\geqslant u$, 与方程 (3.15) 及方程 (3.16) 矛盾.

如果

$$h_m \geqslant 2\cdot 3^{m-6}+3^{m-5}+2\cdot 3^{m-4}+2\cdot 3^{m-3}+2\cdot 3^{m-2}+2\cdot 3^{m}=1697\cdot 3^{m-6},$$

则

$$32\cdot 3^4\cdot h_m^5>32\cdot 1697^5\cdot 3^{5m-26}>2\cdot 3^{5m}+3^{5m+3}+3^{5m+11},$$

这也与方程 (3.15) 和方程 (3.16) 矛盾. 因此我们得到

$$a_{m-6}=a_{m-5}=1,\quad a_{m-1}=0,\quad a_{m-7}=a_{m-4}=a_{m-3}=a_{m-2}=a_m=2.$$

如果

$$h_{m-1}\leqslant \frac{5}{2}\cdot 3^{m-2},$$

设 $x=2\cdot 3^m$, 那么

$$h_m^2=(h_{m-1}+x)^2=h_{m-1}^2+2xh_{m-1}+x^2=U+x^2,$$

其中

$$U\leqslant \left(\left(\frac{5}{2}\right)^2+4\cdot\frac{5}{2}\cdot 3^2\right)\cdot 3^{2m-4}=\frac{385}{4}\cdot 3^{2m-4}.$$

因此

$$h_m^3=(U+x^2)(h_{m-1}+x)=U\cdot h_{m-1}+U\cdot x+x^2\cdot h_{m-1}+x^3=V+x^3,$$

其中

$$V\leqslant\left(\frac{385}{4}\cdot\frac{5}{2}+\frac{385}{4}\cdot 2\cdot 3^2+2^2\cdot\frac{5}{2}\cdot 3^4\right)\cdot 3^{3m-6}=\frac{22265}{8}\cdot 3^{3m-6}.$$

所以

$$\begin{aligned} h_m^4&=(V+x^3)(h_{m-1}+x)=V\cdot h_{m-1}+V\cdot x+x^3\cdot h_{m-1}+x^4=W+x^4,\\ &=\sum_{i=0}^{4m+3} w_i\cdot 3^i+x^4,\quad w_i\in\{0,1,2\},\ 0\leqslant i\leqslant 4m+3,\end{aligned}$$

其中

$$\sum_{i=0}^{4m+3} w_i\cdot 3^i\leqslant\left(\frac{22265}{8}\cdot\frac{5}{2}+\frac{22265}{8}\cdot 2\cdot 3^2+2^3\cdot\frac{5}{2}\cdot 3^6\right)\cdot 3^{4m-8}=\frac{1146145}{16}\cdot 3^{4m-8}.$$

于是

$$h_m^5=(W+x^3)(h_{m-1}+x)=W\cdot h_{m-1}+W\cdot x+x^4\cdot h_{m-1}+x^5=T+x^5,$$

其中

$$T\leqslant\left(\frac{1146145}{16}\cdot\frac{5}{2}+\frac{1146145}{16}\cdot 2\cdot 3^2+2^4\cdot\frac{5}{2}\cdot 3^8\right)\cdot 3^{5m-10}=\frac{55390025}{32}\cdot 3^{5m-10}.$$

注意到

$$32\cdot 3^4\cdot T\leqslant 3^{5m-6}\cdot 32\cdot\frac{55390025}{32}<2\cdot 3^{5m+7}+2\cdot 3^{5m+8}+3^{5m+10}$$

和

$$32\cdot 3^4\cdot x^5=32^2\cdot 3^{5m+4}<3^{5m+4}(1+2\cdot 3+2\cdot 3^2+3^3+3^5+3^6),$$

有

$$32\cdot 3^4\cdot h_m^5=32\cdot 3^4\cdot T+32\cdot 3^4\cdot x^5<3^{5m+4}+2\cdot 3^{5m+5}+2\cdot 3^{5m+6}+2\cdot 3^{5m+9}+2\cdot 3^{5m+10}.$$

由于 $5m+8>4m+11\geqslant u$, 故与方程 (3.15) 和方程 (3.16) 矛盾. 如果

$$h_{m-1}>\frac{5}{2}\cdot 3^{m-2},$$

则有

$$h_{m-3}>2\cdot 3^{m-7}+3^{m-6}++3^{m-5}+2\cdot 3^{m-4}+2\cdot 3^{m-3}+\Big(\frac{5}{2}-2\Big)3^{m-2}=\frac{703}{486}\cdot 3^{m-2}.$$

设

$$y=2\cdot 3^{m-2}+2\cdot 3^m=20\cdot 3^{m-2},$$

同理, 有

$$\begin{aligned}
h_m^2&=(h_{m-3}+y)^2=h_{m-3}^2+2yh_{m-3}+y^2=U+y^2,\\
U&>\Big(\Big(\frac{703}{486}\Big)^2+2\cdot\frac{703}{486}\cdot 20\Big)\cdot 3^{2m-4}=\frac{14160529}{486^2}\cdot 3^{2m-4}.\\
h_m^3&=(U+y^2)(h_{m-3}+y)=U\cdot h_{m-3}+U\cdot y+y^2\cdot h_{m-3}+y^3=V+y^3,\\
V&>\Big(\frac{14160529}{486^2}\cdot\frac{703}{486}+20\cdot\frac{14160529}{486^2}+\frac{703}{486}\cdot 20^2\Big)\cdot 3^{3m-6}>1864\cdot 3^{3m-6}.\\
h_m^4&=(V+y^3)(h_{m-3}+y)=V\cdot h_{m-3}+V\cdot y+y^3\cdot h_{m-3}+y^4=W+y^4,\\
W&>\Big(1864\cdot\frac{703}{486}+20\cdot 1864+\frac{703}{486}\cdot 20^3\Big)\cdot 3^{4m-8}=\frac{25052472}{486}\cdot 3^{4m-8}.\\
h_m^5&=(W+y^4)(h_{m-3}+y)=W\cdot h_{m-3}+W\cdot y+y^4\cdot h_{m-3}+y^5=T+y^5,\\
T&>\Big(\frac{25052472}{486}\cdot\frac{703}{486}+20\cdot\frac{25052472}{486}+\frac{703}{486}\cdot 20^4\Big)\cdot 3^{5m-10}\\
&=\frac{315787195656}{486^2}\cdot 3^{5m-10}.
\end{aligned}$$

注意到

$$32\cdot 3^4\cdot T>3^{5m-6}\cdot 32\cdot\frac{315787195656}{486^2}>3^{5m-6}\cdot(2\cdot 3^{13}+2\cdot 3^{14}+2\cdot 3^{15})$$

和

$$32\cdot 3^4\cdot y^5=32\cdot 20^5\cdot 3^{5m-6}=3^{5m-6}(1+\cdots+2\cdot 3^8+2\cdot 3^{11}+3^{13}+3^{15}+2\cdot 3^{16}),$$

有

$$32\cdot 3^4\cdot h_m^5=32\cdot 3^4\cdot T+32\cdot 3^4\cdot y^5>2\cdot 3^{5m+5}+3^{5m+9}+3^{5m+11},$$

也与方程 (3.15) 和方程 (3.16) 矛盾.

考虑情形: $a\equiv 1\pmod{20},\ b\equiv 3\pmod{20}$.

令 $a = 20k + 1,\ k \in N$.

若 $b = 3$, 则将方程 (3.1) 两侧同时减 32 并除以 3, 可得

$$3^{20k} = 1 + 32(3^4 \cdot j^5 + 5 \cdot 3^3 \cdot j^4 + 10 \cdot 3^2 \cdot j^3 + 10 \cdot 3 \cdot j^2 + 5j). \tag{3.17}$$

设正整数 $j$ 的三进制展开式为

$$j = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot 3^i, \quad a_i \in \{0,1,2\},\ 0 \leqslant i \leqslant m-1,\ a_m \in \{1,2\},\ m \in N. \tag{3.18}$$

记

$$h_r = \sum_{i=0}^{r} a_i \cdot 3^i, \quad r \leqslant m,$$

则由方程 (3.17) 可得

$$3^{20k} = 1 + 32 \cdot 3^4 \cdot h_m^5 + 160 \cdot 3^3 \cdot h_m^4 + 320 \cdot 3^2 \cdot h_m^3 + 320 \cdot 3 \cdot h_m^2 + 160 \cdot h_m. \tag{3.19}$$

由引理 2.6 可得

$$2 \cdot 3^{5m+4} + 3^{5m+5} + 3^{5m+7} \leqslant 32 \cdot 3^4 \cdot h_m^5 < 2 \cdot 3^{5m+12},$$

且

$$1 + 160 \cdot 3^3 \cdot h_m^4 + 320 \cdot 3^2 \cdot h_m^3 + 320 \cdot 3 \cdot h_m^2 + 160 \cdot h_m < 3^{4m+12}.$$

于是由方程 (3.19) 可得

$$2 \cdot 3^{5m+4} + 3^{5m+5} + 3^{5m+7} < 3^{20k} < 3^{4m+12} + 2 \cdot 3^{5m+12},$$

因此 $5m + 8 \leqslant 20k \leqslant 5m + 12$, 所以 $20k = 5m + 10$. 令

$$1 + 160 \cdot 3^3 \cdot h_m^4 + 320 \cdot 3^2 \cdot h_m^3 + 320 \cdot 3 \cdot h_m^2 + 160 \cdot h_m = \sum_{i=0}^{u} x_i \cdot 3^i,$$

$$x_i \in \{0,1,2\},\ 0 \leqslant i < u-1,\ x_u \in \{1,2\},\ u \leqslant 4m+11,$$

则由方程 (3.19) 可得

$$32 \cdot 3^4 \cdot h_m^5 = \sum_{i=0}^{u} b_i \cdot 3^i + \sum_{i=u+1}^{5m+9} 2 \cdot 3^i. \tag{3.20}$$

如果

$$h_m \leqslant 3^{m-8} + 3^{m-5} + 3^{m-4} + 2 \cdot 3^{m-3} + 3^{m-2} + 2 \cdot 3^{m-1} + 3^m = 12259 \cdot 3^{m-8},$$

则

$$32 \cdot 3^4 \cdot h_m^5 \leqslant 32 \cdot 12259^5 \cdot 3^{5m-36} < 3^{5m-1} + 3^{5m+1} + \sum_{i=5m+3}^{5m+9} 2 \cdot 3^i.$$

根据定理 1.2 的结论可得: $5m + 2 > 4m + 11 \geqslant u$, 与方程 (3.20) 矛盾.

如果

$$h_m \geqslant 2\cdot 3^{m-8}+3^{m-5}+3^{m-4}+2\cdot 3^{m-3}+3^{m-2}+2\cdot 3^{m-1}+3^m=12260\cdot 3^{m-8},$$

则

$$32\cdot 3^4\cdot h_m^5>32\cdot 12260^5\cdot 3^{5m-36}>3^{5m-1}+3^{5m+1}+3^{5m+10},$$

这也与方程 (3.20) 矛盾. 因此我们得到

$$a_{m-8}=a_{m-5}=a_{m-4}=a_{m-2}=a_m=1,\quad a_{m-3}=a_{m-1}=2,\quad a_{m-7}=a_{m-6}=0.$$

设

$$x=2\cdot 3^{m-1}+3^m=5\cdot 3^{m-1},$$

则 $h_m=h_{m-2}+x$. 如果

$$h_{m-2}\leqslant \frac{11}{2}\cdot 3^{m-3},$$

那么

$$h_m^2=(h_{m-2}+x)^2=h_{m-2}^2+2xh_{m-2}+x^2=U+x^2,$$

其中

$$U\leqslant \Big(\Big(\frac{11}{2}\Big)^2+2\cdot\frac{11}{2}\cdot 5\cdot 3\Big)\cdot 3^{2m-6}=\frac{781}{4}\cdot 3^{2m-6}.$$

因此

$$h_m^3=(U+x^2)(h_{m-2}+x)=U\cdot h_{m-2}+U\cdot x+x^2\cdot h_{m-2}+x^3=V+x^3,$$

其中

$$V\leqslant \Big(\frac{781}{4}\cdot\frac{11}{2}+\frac{781}{4}\cdot 5\cdot 3+5^2\cdot\frac{11}{2}\cdot 3^2\Big)\cdot 3^{3m-9}=\frac{41921}{8}\cdot 3^{3m-9}.$$

所以

$$h_m^4=(V+x^3)(h_{m-2}+x)=V\cdot h_{m-2}+V\cdot x+x^3\cdot h_{m-2}+x^4=W+x^4,$$

其中

$$W\leqslant \Big(\frac{41921}{8}\cdot\frac{11}{2}+\frac{41921}{8}\cdot 5\cdot 3+5^3\cdot\frac{11}{2}\cdot 3^3\Big)\cdot 3^{4m-12}=\frac{2015761}{16}\cdot 3^{4m-12}.$$

于是

$$h_m^5=(W+x^3)(h_{m-2}+x)=W\cdot h_{m-2}+W\cdot x+x^4\cdot h_{m-2}+x^5=T+x^5,$$

其中

$$T\leqslant \Big(\frac{2015761}{16}\cdot\frac{11}{2}+\frac{2015761}{16}\cdot 5\cdot 3+5^4\cdot\frac{11}{2}\cdot 3^4\Big)\cdot 3^{5m-15}=\frac{91556201}{32}\cdot 3^{5m-15}.$$

注意到

$$32\cdot 3^4\cdot T\leqslant 3^{5m-11}\cdot 32\cdot\frac{91556201}{32}=3^{5m-11}\cdot 91556201<3^{5m+6}$$

和

$$32 \cdot 3^4 \cdot x^5 = 32 \cdot 5^5 \cdot 3^{5m-1} < 3^{5m-1}(1 + 2 \cdot 3^2 + 3^3 + 3^4 + 2 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^9 + 3^{10}),$$

有

$$32 \cdot 3^4 \cdot h_m^5 = 32 \cdot 3^4 \cdot T + 32 \cdot 3^4 \cdot x^5 \leqslant 3^{5m} + 2 \cdot 3^{5m+1} + 3^{5m+2} + 3^{5m+3} + 2 \cdot 3^{5m+5} + 3^{5m+6} + 2 \cdot 3^{5m+9},$$

由于 $5m + 6 > 4m + 11 \geqslant u$, 故与方程 (3.20) 矛盾. 如果

$$h_{m-3} > \frac{11}{2} \cdot 3^{m-3},$$

则有

$$h_{m-4} > 3^{m-5} + 3^{m-4} + \Big(\frac{11}{2} - 1\Big)3^{m-3} - 3^{m-2} = \frac{35}{18} \cdot 3^{m-3} > \frac{5}{3} \cdot 3^{m-3}.$$

设

$$y = 2 \cdot 3^{m-3} + 3^{m-2} + 2 \cdot 3^{m-1} + 3^m = 50 \cdot 3^{m-3},$$

同理, 有

$$\begin{aligned}
h_m^2 &= (h_{m-4} + y)^2 = h_{m-3}^2 + 2yh_{m-4} + y^2 = U + y^2, \\
U &> \Big(\Big(\frac{5}{3}\Big)^2 + 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot 50\Big) \cdot 3^{2m-6} = \frac{1525}{3^2} \cdot 3^{2m-6}. \\
h_m^3 &= (U + y^2)(h_{m-4} + y) = U \cdot h_{m-4} + U \cdot y + y^2 \cdot h_{m-4} + y^3 = V + y^3, \\
V &> \Big(\frac{1525}{3^2} \cdot \frac{5}{3} + 50 \cdot \frac{1525}{3^2} + \frac{5}{3} \cdot 50^2\Big)3^{3m-9} = \frac{348875}{3^3} \cdot 3^{3m-9}. \\
h_m^4 &= (V + y^3)(h_{m-4} + y) = V \cdot h_{m-4} + V \cdot y + y^3 \cdot h_{m-4} + y^4 = W + y^4, \\
W &> \Big(\frac{348875}{3^3} \cdot \frac{5}{3} + 50 \cdot \frac{348875}{3^3} + \frac{5}{3} \cdot 50^3\Big) \cdot 3^{4m-12} = \frac{70950625}{3^4} \cdot 3^{4m-12}. \\
h_m^5 &= (W + y^4)(h_{m-4} + y) = W \cdot h_{m-4} + W \cdot y + y^4 \cdot h_{m-4} + y^5 = T + y^5, \\
T &> \Big(\frac{70950625}{3^4} \cdot \frac{5}{3} + 50 \cdot \frac{70950625}{3^4} + \frac{5}{3} \cdot 50^4\Big)3^{5m-15} = \frac{13528596875}{3^5} \cdot 3^{5m-15}.
\end{aligned}$$

注意到

$$32 \cdot 3^4 \cdot T > 3^{5m-11} \cdot 32 \cdot \frac{13528596875}{3^5} > 3^{5m-16} \cdot (3^{22} + 3^{23} + 3^{24})$$

和

$$32 \cdot 3^4 \cdot y^5 = 32 \cdot 50^5 \cdot 3^{5m-11} = 3^{5m-11}(1 + \cdots + 3^{16} + 2 \cdot 3^{17} + 3^{18} + 2 \cdot 3^{19} + 2 \cdot 3^{20}),$$

有

$$32 \cdot 3^4 \cdot h_m^5 = 32 \cdot 3^4 \cdot T + 32 \cdot 3^4 \cdot y^5 > 3^{5m+8} + 3^{5m+10},$$

也与方程 (3.20) 矛盾.

若 $b > 3$, 则将方程 (3.1) 两侧同时减 32 并除以 3, 可得

$$3^{20k} + 3^{b-1} = 1 + 3^2 + 32(3^4 \cdot j^5 + 5 \cdot 3^3 \cdot j^4 + 10 \cdot 3^2 \cdot j^3 + 10 \cdot 3 \cdot j^2 + 5 \cdot j). \tag{3.21}$$

设正整数 $j$ 的三进制展开式为

$$j=\sum_{i=0}^{m}a_i\cdot 3^i,\quad a_i\in\{0,1,2\},\ 0\leqslant i\leqslant m-1,\ a_m\in\{1,2\},\ m\in N. \tag{3.22}$$

$$h_r=\sum_{i=0}^{r}a_i\cdot 3^i,\quad r\leqslant m.$$

由方程 (3.21) 可得

$$3^{20k}+3^{b-1}=1+3^2+32\cdot 3^4\cdot h_m^5+160\cdot 3^3\cdot h_m^4+320\cdot 3^2\cdot h_m^3 +320\cdot 3\cdot h_m^2+160\cdot h_m. \tag{3.23}$$

由引理 2.6 可得

$$2\cdot 3^{5m+4}+3^{5m+5}+3^{5m+7}\leqslant 32\cdot 3^4\cdot h_m^5<2\cdot 3^{5m+12},$$

且

$$1+3^2+160\cdot 3^3\cdot h_m^4+320\cdot 3^2\cdot h_m^3+320\cdot 3\cdot h_m^2+160\cdot h_m<3^{4m+12}.$$

于是由方程 (3.23) 可得

$$2\cdot 3^{5m+4}+3^{5m+5}+3^{5m+7}<3^{20k}+3^{b-1}<3^{4m+12}+2\cdot 3^{5m+12}.$$

又由 $b-1\leqslant 20k-2$, 因此 $5m+8\leqslant 20k\leqslant 5m+12$, 所以 $20k=5m+10$. 令

$$1+3^2+160\cdot 3^3\cdot h_m^4+320\cdot 3^2\cdot h_m^3+320\cdot 3\cdot h_m^2+160\cdot h_m=\sum_{i=0}^{u}x_i\cdot 3^i,$$

$$x_i\in\{0,1,2\},\ 0\leqslant i\leqslant u-1,\ x_u\in\{1,2\},\ u\leqslant 4m+11,$$

则由方程 (3.23) 可得:

若 $3^{b-1}\leqslant x_u\cdot 3^u$, 则

$$32\cdot 3^4\cdot h_m^5=\sum_{i=0}^{u}b_i\cdot 3^i+\sum_{i=u+1}^{5m+9}2\cdot 3^i; \tag{3.24}$$

若 $3^{b-1}>x_u\cdot 3^u$, 则

$$32\cdot 3^4\cdot h_m^5=\sum_{i=0}^{u}b_i\cdot 3^i+\sum_{i=u+1}^{b-2}2\cdot 3^i+3^{5m+10}. \tag{3.25}$$

同理可证方程 (3.24) 和方程 (3.25) 均不成立.

最后我们考虑情形: $a\equiv 5\pmod{20}$, $b\equiv 7\pmod{20}$.

令 $a=20k+5$, $k\in N$, 则将方程 (3.1) 两侧同时减 32 并除以 3, 可得

$$3^{20k+4}+3^{b-1}=1+3^2+32(3^4\cdot j^5+5\cdot 3^3\cdot j^4+10\cdot 3^2\cdot j^3+10\cdot 3\cdot j^2+5\cdot j). \tag{3.26}$$

令正整数 $j$ 的三进制表达式为

$$j=\sum_{i=0}^{m}a_i\cdot 3^i,\quad a_i\in\{0,1,2\},\ 0\leqslant i\leqslant m-1,\ a_m\in\{1,2\},\ m\in N. \tag{3.27}$$

记

$$h_r=\sum_{i=0}^{r}a_i\cdot 3^i,\quad r\leqslant m.$$

由方程 (3.26) 可得

$$3^{20k+4}+3^{b-1}=1+3^2+32\cdot 3^4\cdot h_m^5+160\cdot 3^3\cdot h_m^4+320\cdot 3^2\cdot h_m^3+320\cdot 3\cdot h_m^2+160\cdot h_m. \tag{3.28}$$

由引理 2.6 可得

$$2\cdot 3^{5m+4}+3^{5m+5}+3^{5m+7}\leqslant 32\cdot 3^4\cdot h_m^5<2\cdot 3^{5m+12},$$

$$1+3^2+160\cdot 3^3\cdot h_m^4+320\cdot 3^2\cdot h_m^3+320\cdot 3\cdot h_m^2+160\cdot h_m<3^{4m+12}.$$

由方程 (3.28) 可得

$$2\cdot 3^{5m+4}+3^{5m+5}+3^{5m+7}<3^{20k+4}+3^{b-1}<3^{4m+12}+2\cdot 3^{5m+12}.$$

又由 $b-1\leqslant 20k+2$, 因此 $5m+8\leqslant 20k+4\leqslant 5m+12$, 所以 $20k+4=5m+9$. 令

$$1+3^2+160\cdot 3^3\cdot h_m^4+320\cdot 3^2\cdot h_m^3+320\cdot 3\cdot h_m^2+160\cdot h_m=\sum_{i=0}^{u}x_i\cdot 3^i,$$

$$x_i\in\{0,1,2\},\quad 0\leqslant i\leqslant u-1,\ x_u\in\{1,2\},\ u\leqslant 4m+11,$$

则由方程 (3.28) 可得:

若 $3^{b-1}\leqslant x_u\cdot 3^u$, 则

$$32\cdot 3^4\cdot h_m^5=\sum_{i=0}^{u}b_i\cdot 3^i+\sum_{i=u+1}^{5m+8}2\cdot 3^i; \tag{3.29}$$

若 $3^{b-1}>x_u\cdot 3^u$, 则

$$32\cdot 3^4\cdot h_m^5=\sum_{i=0}^{u}b_i\cdot 3^i+\sum_{i=u+1}^{b-2}2\cdot 3^i+3^{5m+9}. \tag{3.30}$$

同理可证方程 (3.29) 和方程 (3.30) 不成立.

故而, 方程 (3.1) 有且仅有一个正整数解 $(a,b,n)=(3,1,2)$.

定理得证.

## 参　考　文　献


[1] Bennett M, Bugeaud Y. Mignotte M. Perfect powers with few binary digits and related Diophantine problem [J]. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci*, 2013, XII:941–953.

[2] Szalay L. The equations $2^n\pm 2^m\pm 2^l=z^2$ [J]. *Indag Math* (NSW), 2002, 13:131–142.

[3] Bennett M. Perfect powers with few ternary digits [J]. *Integers*, 2012, 12A:1–7.

[4] Singh S. Perfect powers of five with few ternary digits [J/OL]. https://arxiv.org/pdf/1304.5020V1.pdf.

[5] Bennett M, Bugeaud Y. Perfect powers with three digits [J]. *Mathematika*, 2014, 60:66–84.

[6] Ireland K, Rosen M. A classical introduction to modem number theory [M]. New York:Springer-Verlag, 1990.

# Perfect Powers of Five with Few Ternary Digits

LUO Jiagui[1] LI Xiang[2]

[1]School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong 637009, Sichuan, China.
E-mail: luojg62@aliyun.com

[2]Primary School Affiliated to China West Normal University, Meishan 620575, Sichuan, China. E-mail: lixiang851005@163.com

**Abstract** In this paper, the authors analyze a diophantine equation raised by Michael Bennett in [Bennett, M., Bugeaud, Y., and Mignotte, M., Perfect powers with few binary digits and related Diophantine problem, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci*, 2013, vol. XII, pp. 941–953.] that is pivotal in establishing that powers of five has few digits in its ternary expansion. They show that $(a, b, n) = (3, 1, 2)$ is the only positive integer solution of Diophantine equation $3^a + 3^b + 2 = n^5$ with $a \geqslant b > 0$.

**Keywords** Diophantine equations, 3-Adic, Congruence, Positive integer solution
**2000 MR Subject Classification** 11D41, 11D61

The English translation of this paper will be published in

**Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 42 No. 4, 2021**

by ALLERTON PRESS, INC., USA