数 学 年 刊 A 辑
2021, 42(4):419–426
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2021.0032

子群的核平凡或正规闭包极大的有限 p 群

赵立博[1] 龚 律[2] 郭秀云[3]

提要 称有限 p 群 G 为 ACT 群，如果对每个交换子群 H, 其正规核 $H_G=1$ 或 $H_G=H$. 又称 p 群 G 是 CC 群，如果对每个非正规交换子群 H, 有 $H_G=1$ 或 H^G 在 G 中的指数为 p. 本文分类了 ACT 群和 CC 群.

关键词 ACT 群，非 Dedekind 群，有限 p 群， CC 群
MR (2000) 主题分类 20D15
中图法分类 O152.2
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2021)04-0419-08

1 引 言

文中考虑的群均为有限群.

我们知道群 G 的子群 H 被称为 TI 子群，如果对所有的 $x\in G$, $H\cap H^x=1$ 或 $H\cap H^x=H$. 一个有趣的课题就是分类某些子群是 TI 子群的有限群. 在文 [1] 中， Walls 研究了所有子群都是 TI 子群的有限群. 在文 [2] 中, 李世荣分类了二极大子群是 TI 子群的非幂零群. 郭秀云，李世荣和 Flavell 在文 [3–4] 中，分类了所有交换子群都是 TI 子群的有限群. 我们感兴趣的是每一个交换子群的核 $H_G=\bigcap\limits_{g\in G}H^g=1$ 或 $H_G=\bigcap\limits_{g\in G}H^g=H$ 的有限 p 群的结构. 为了叙述方便，我们称这类群为 ACT 群. 我们证明了有限 p 群为 ACT 群当且仅当中心循环且导群阶为 p.

子群 H 的核 H_G 是包含在 H 中的最大的 G 的正规子群. 子群 H 的正规闭包 $H^G=\langle\bigcup\limits_{g\in G}H^g\rangle$ 是包含 H 的最小的 G 的正规子群. 用子群的核和正规闭包研究群结构是非常有趣的. 例如， Cutolo 等在文 [5] 中研究了满足对任意子群 H 都有 $|H:H_G|\leqslant p$ 的有限 p 群 G 的性质. 这类群被称为 p 核 p 群. 接着在文 [6] 中， Cutolo, Smith 和 Wiegold 继续研究了 2 核 2 群. Herzog 等在文 [7] 中研究了满足对任意非正规循环子群 $\langle a\rangle$ 和任意

本文 2019 年 12 月 9 日收到， 2021 年 3 月 29 日收到修改稿.
[1]广东第二师范学院数学学院，广州 510310. E-mail: zhaolibo1984@qq.com
[2]南通大学理学院，江苏 南通 226019. E-mail: lieningzai1917@126.com
[3]上海大学数学系，上海 200444. E-mail: xyguo@staff.shu.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 12071092, No. 12101135)，广东省基础研究及应用研究重大项目 (No. 2017KZDXM058)，广州市科技计划项目 (No. 201804010088) 和广东省普通高校特色创新类项目 (No. 2020KTSCX093) 的资助.

元素 $g \in G \setminus N_G(\langle a \rangle)$, 有 $\langle a, a^g \rangle = \langle a \rangle^G$ 的有限群. 他们称这类群为 J 群. 在文 [8] 中, 郭秀云, 赵立博继续研究了素数幂阶 J 群的结构. 吕恒, 周伟, 余大鹏等在文 [9] 中证明了当 G 的阶为奇素数幂时, G 为 J 群当且仅当对任意元素 $a \in G$, 有 $|\langle a \rangle^G : \langle a \rangle| \leqslant p$.

在文 [10] 的第 62 节, Janko 给出了满足对任意非正规循环子群 $\langle a \rangle$, 有 $|G : \langle a \rangle^G| = p$ 成立的 p 群的分类.

定理 1.1 (见 [10]) 设 G 为非 Dedekind p 群. 若对任意的非正规循环子群 H, 有 $|G : H^G| = p$ 成立, 则有下列结论之一成立: (a) $|G| = p^3$; (b) G 同构于 $M_p(2,2) = \langle a, b \mid a^{p^2} = b^{p^2} = 1, a^b = a^{1+p} \rangle$; (c) G 为极大类 2 群; (d) G 同构于 $\langle a, b \mid a^4 = 1, b^{2^n} = 1, [b,a] = b^{i2^{n-1}-2} \rangle$, 其中 $n > 2, i = 0, 1$.

所以研究满足对任意非正规交换子群 H, 有 $H_G = 1$ 或 H^G 为 G 的极大子群成立的有限 p 群是非常有趣的. 为叙述方便, 我们称这类群为 CC 群. 文章的第四部分, 在 Janko 的结果基础上, 我们给出了 CC 群的分类.

本文涉及到的术语和记号都是标准的. 群 G 的 Frattini 子群、导群和中心分别用 $\Phi(G)$, G' 和 $Z(G)$ 来表示. 并且 $G_3 = [G', G]$. 当 G 是有限 p 群, $\Omega(G) = \langle g \in G \mid g^p = 1 \rangle$.

2 预备知识

本部分, 我们列出文中证明过程中用到的一些结论.

引理 2.1 (见 [11, 定理 2.5.5]) 设 G 是有限 2 群, 则 G 为极大类 2 群当且仅当 $|G : G'| = 4$.

引理 2.2 (见 [12]) 设 G 是内交换 p 群, 则 G 同构于下列群之一:

(1) Q_8.

(2) $M_p(m,n) = \langle a, b \mid a^{p^m} = b^{p^n} = 1, a^b = a^{1+p^{m-1}} \rangle$, $m \geqslant 2, n \geqslant 1, |G| = p^{m+n}$ (G 亚循环).

(3) $M_p(m,n,1) = \langle a, b, c \mid a^{p^m} = b^{p^n} = c^p = 1, [a,b] = c, [c,a] = [c,b] = 1 \rangle$, $m \geqslant n, |G| = p^{m+n+1}$, 若 $p = 2$, 则 $n + m \geqslant 3$ (G 非亚循环).

引理 2.3 (见 [13, 定理 44.2]) 设 G 是有限 p 群, 则 G 亚循环当且仅当 $G/\Phi(G')G_3$ 亚循环.

引理 2.4 (见 [11, 引理 7.3.3]) 设 G 是有限 p 群. 若 G 是非 Dedkind 群, 则存在 $K \trianglelefteq G$, 满足 $|G' : K| = p$ 和 G/K 也是非 Dedkind 群.

3 ACT 群

这一部分，我们给出了 ACT 群的刻画．首先证明以下引理．

引理 3.1　设 G 是有限 p 群．若 $Z(G)$ 循环且 $|G'|=p$, 则 G 是 ACT 群．

证　设 H 为 G 的任意子群．若 $H_G\neq 1$, 则 $H_G\cap Z(G)\neq 1$, 于是 $G'\leqslant H_G\cap Z(G)$. 进而有 $G'\leqslant H_G\leqslant H$ 和 $H\trianglelefteq G$, 这意味着 $H_G=H$. 因此， G 是 ACT 群．

引理 3.2　设 G 为非 DedekindACT 群，则 $Z(G)$ 循环且 G' 阶为素数．

证　首先，断言 $Z(G)$ 有且只有一个极小子群．则 $Z(G)$ 循环．

若否，则在 $Z(G)$ 中存在两个不同的极小子群 N, M. 对任意元素 $a\in G$, 有 $\langle a\rangle\cap Z(G)\leqslant\langle a\rangle_G$. 因为 G 是 ACT 群，故 $\langle a\rangle_G=1$ 或者 $\langle a\rangle_G=\langle a\rangle$. 若 $\langle a\rangle\cap Z(G)>1$, 则 $\langle a\rangle_G=\langle a\rangle$, 于是 $\langle a\rangle\trianglelefteq G$. 若 $\langle a\rangle\cap Z(G)=1$, 则由 $N\leqslant(\langle a\rangle N)_G$ 知 $\langle a\rangle N\trianglelefteq G$. 类似地，有 $\langle a\rangle M\trianglelefteq G$. 这样就有 $\langle a\rangle=\langle a\rangle N\cap\langle a\rangle M\trianglelefteq G$. 所以 G 是 Dedekind 群，与条件矛盾．

假设 N 是 $Z(G)$ 的唯一极小子群， $|N|=p$. 对任意循环子群 $H\leqslant G$, 有 $1\neq N\leqslant(HN)_G$, 进而 $HN\trianglelefteq G$. 这样 G/N 就是 Dedekind 群．若 G/N 非交换，则 $p=2$,

$$G/N=\overline{A}\times\langle\overline{a},\overline{b}\mid\overline{a}^4=1,\overline{a}^2=\overline{b}^2,[\overline{a},\overline{b}]=\overline{a}^2\rangle$$

且 $G=NA\langle a,b\rangle$, 其中 $\overline{A}$ 是交换群．若 $a^4=1$, 则 $[a^2,b]=[a,b]^2=a^4=1$ 且 $[a^2,x]=[a,x]^2=1$, x 为 G 中任意元素．因此 $a^2\in Z(G)$. 进而，由上一段可知 $\langle a^2\rangle=N$, 矛盾．若 $a^4\neq 1$, 假设 $a^2=b^2n$ $(n\in N)$, 则 $a^4=[a^2,b]=[b^2n,b]=1$, 矛盾．

所以 G/N 交换， $G'=N$ 阶为 p. 结论得证．

现在，我们就得到了下面的定理．

定理 3.1　设 G 是非 Dedekind p 群, 则 G 是 ACT 群当且仅当 $Z(G)$ 循环且 $|G'|=p$.

4 CC 群

在这部分，我们开始研究 CC 群．易知，当群 G 的阶小于 p^5 时， G 一定是 CC 群．因此我们只需考虑阶大于 p^4 的非 Dedekind p 群．首先给出下面三个引理．

引理 4.1　设 G 是有限 p 群，且存在正规子群 N 满足 $|N|=p$ 和 $N\cap G'=1$. 若对任意的满足 $|N|=p$ 和 $N\cap G'=1$ 的正规子群 N, 都有 G/N 是 Dedekind 群，则 G 为 Dedekind 群．

证 令 $N=\langle x\rangle$ 是正规子群，且 N 满足 $|N|=p$ 和 $N\cap G'=1$. 由条件知 G/N 是 Dedekind 群. 若 G/N 交换，则 $G'\leqslant N$. 于是由 $N\cap G'=1$ 得 $G'=1$. 所以 G 为 Dedekind 群. 若 G/N 非交换，

$$\overline{G}=G/N\cong Q_8\times C_2^n=\langle\overline{a},\overline{b}\mid\overline{a}^4=1,\overline{a}^2=\overline{b}^2,[\overline{a},\overline{b}]=\overline{a^2}\rangle\times\times_{i=1}^n\overline{c}_i\ (\overline{c}_i^2=\overline{1}).$$

如果 $a^4\neq1$, 则 $1\neq a^4=[a^2,b]=[b^2x^i,b]=1$, 矛盾. 故 $a^4=1$. 类似可知 $b^4=1$. 因 $x\notin G'$, 故对任意的 $1\leqslant i,j\leqslant n$ 都有 $[a,c_i]=[b,c_i]=[c_i,c_j]=1$ 成立.

若 $[a,b]\neq a^2$, 则 $[a,b]=a^2x$. 由 $[a^2,b]=[a,b]^2=1$ 可知 $a^2\in Z(G)\setminus G'$. 接着考虑 $\widetilde{G}=G/\langle a^2\rangle$. 因 $\langle\widetilde{a}\rangle\ntrianglelefteq\widetilde{G}$, 所以 $\widetilde{G}$ 是非 Dedekind 群，与条件矛盾. 若 $[a,b]=a^2$ 且存在 c_i 满足 $c_i^2=x$, 则我们考虑 $\widetilde{G}=G/\langle a^2c_i^2\rangle$. 然后由 $\langle\widetilde{ac_i}\rangle\ntrianglelefteq\widetilde{G}$ 知 $\widetilde{G}$ 是非 Dedekind 群，矛盾. 所以 $[a,b]=a^2$ 且对任意 i 有 $c_i^2=1$ 成立. 所以 G 是 Dedekind 群. 证毕.

引理 4.2 设 G 是非 Dedekind CC 群且 $|G|>p^4$. 若 $|G'|=p$, 则 G 是 ACT 群.

证 假设 G 不是 ACT 群，则由引理 3.1 知 $Z(G)$ 非循环.

由引理 4.1 知，存在 p 阶正规子群 $N=\langle x\rangle$, 满足 $N\cap G'=1$ 且 $\overline{G}=G/N$ 不是 Dedekind 群. 若 H/N 是 G/N 的非正规循环子群，则由 $N\leqslant Z(H)$ 知 H 交换，进而 $N\leqslant H_G$. 由 CC 群的条件知 $|G:H^G|=p$. 所以 $|G/N:(H/N)^{G/N}|=|G:H^G|=p$. 然后由定理 1.1 知道 G/N 同构于 $M_p(2,2)$.

这样我们可以假设 $\overline{G}=\langle\overline{a},\overline{b}\mid\overline{b}^{p^2}=\overline{a}^{p^2}=1,[\overline{b},\overline{a}]=\overline{b}^p\rangle$. 因 $|G'|=p$ 和 $[b,a]\in G'$, 所以 $b^{p^2}=1$. 若 $[b,a]\notin\langle b\rangle$, 则 $\langle b\rangle\ntrianglelefteq G$. 但是 $\langle b\rangle_G=\langle b^p\rangle$ 且 $|G:\langle b\rangle^G|=\frac{p^5}{p^3}=p^2$, 与 CC 群的条件矛盾. 所以 $[b,a]=b^p$. 如果 $a^{p^2}=1$, 则我们取 $H=\langle a\rangle\ntrianglelefteq G$. $H_G=\langle a^p\rangle$ 且 $|G:H^G|=\frac{p^5}{p^3}=p^2$, 矛盾. 若 $a^{p^2}\neq1$, 则取 $H=\langle ba^p\rangle\ntrianglelefteq G$. $H_G=\langle b^pa^{p^2}\rangle$ 且 $|G:H^G|=\frac{p^5}{p^3}=p^2$, 矛盾. 结论得证.

引理 4.3 设 G 是阶大于 p^4 非 Dedkind p 群. 若 $|G'|>p$, 则 G 是 CC 群当且仅当存在子群 N, 满足 $N\leqslant G'\cap Z(G)$, $|N|=p$, G/N 是非 Dedekind 群，且对 G/N 的任意非正规循环子群 H/N, 有 $|G/N:(H/N)^{G/N}|=p$.

证 假设 G 是 CC 群且 $|G'|>p$. 因为 G 是非 Dedekind 群，由引理 2.4 知，可以找到 $K\trianglelefteq G$ 满足 $|G':K|=p$ 且 G/K 也是非 Dedkind 群. 设 N 是 K 中 G 的极小正规子群. 于是 G/N 也是非 Dedekind 群. 若 H/N 是 G/N 的非正规循环子群，则由 $N\leqslant Z(H)$ 知 H 交换，进而 $N\leqslant H_G$. 又因 G 是 CC 群，故 $|G:H^G|=p$. 所以 $|G/N:(H/N)^{G/N}|=|G:H^G|=p$.

反过来，由定理 1.1 知， G/N 亚循环．可假设 $G=\langle a,b\rangle$ 和 $[b,a]=b^{pi} \pmod N$．进而有 $[b,a,b]=1$ 和 $[b,a,a]=[b^{pi},a]=[b,a]^{pi}$．所以 $G'=\langle [b,a]^g \mid g\in G\rangle=\langle [b,a]\rangle$ 为循环群．于是 $N=\Omega(G')$．又由 $[b,a,a]\neq 1$ 知 $N\leqslant G_3$．这样由引理 2.3 知 G 是亚循环．

对 G 的任意非正规交换子群 M, 若 $N<M$, 则 M/N 在 G/N 中不正规．进而在 M/N 中存在循环子群 H/N, 使得 H/N 不正规于 G/N．

由条件知

$$p=|G/N:(H/N)^{G/N}|=|G:H^G|\geqslant |G:M^G|.$$

所以 $|G:M^G|=p$．

现假设 $N\nleq M$ 且 $M_G\neq 1$, 则由 $M\ntrianglelefteq G$ 知 $N=\Omega(G')\leqslant M^G$．若 M 是非循环，则存在循环子群 H,K, 满足 $M=H\times K$．于是由 $N\nleq M$ 得 $MN=H\times K\times N$ 是非亚循环．所以 G 是非亚循环，矛盾．这样就有 M 循环， $\Omega(M)\ \mathrm{char}\ M_G\lhd G$．进而 $\Omega(M)\leqslant Z(G)$．又因 $N\leqslant M^G$, 我们知

$$N\leqslant \Omega(M^G)=\Omega(M)^G=\Omega(M)\leqslant M,$$

矛盾．结论得证.

下面给出本文的主要定理.

定理 4.1　设 G 是阶大于 p^4 的非 Dedkind p 群，则 G 是 CC 群当且仅当 G 同构于下列群之一：

(1) 中心循环且导群 p 阶的 p 群;

(2) $\langle a,b \mid b^{p^3}=a^{p^2}=1,[b,a]=b^p\rangle$, 其中 $p>2$;

(3) $\langle a,b \mid a^8=1,b^{2^n}=a^4,[b,a]=b^{-2}\rangle$, 其中 $n\geqslant 2$;

(4) $\langle a,b \mid a^4=1,b^{2^n}=1,[b,a]=b^{2^{n-2}-2}\rangle$, 其中 $n\geqslant 4$;

(5) 对任意非正规循环子群 $\langle a\rangle\leqslant G$, 都满足 $|G:\langle a\rangle^G|\leqslant p$ 的有限 p 群;

(5a) $\langle a,b \mid a^4=1,b^{2^n}=1,[b,a]=b^{-2}\rangle$, 其中 $n>2$;

(5b) $\langle a,b \mid a^4=1,b^{2^n}=1,[b,a]=b^{2^{n-1}-2}\rangle$, 其中 $n>2$;

(5c) 极大类 2 群.

证　若 $|G'|=p$, 则由引理 3.2 和引理 4.2 知 G 是定理 4.1 中的 (1) 型群．现在假设 $|G'|\geqslant p^2$．于是由引理 4.3 知, 存在素数阶子群 N, 满足 $N=\langle x\rangle\leqslant G'\cap Z(G)$ 且 $G/N=\overline{G}$ 是定理 1.1 中的 (b), (c), (d) 型群之一.

下面我们根据 $\overline{G}$ 的结构分以下四种情形进行分析.

情形 1　$\overline{G}=\langle \overline{a},\overline{b} \mid \overline{b}^{p^2}=\overline{a}^{p^2}=1,[\overline{b},\overline{a}]=\overline{b}^p\rangle$.

因为 $N=\langle x\rangle\leqslant G'$, 所以 $G=\langle a,b\rangle$ 且 $G'=\langle [a,b]^g\mid g\in G\rangle=\langle [a,b],[a,b,a]\rangle=\langle [b,a],b^4\rangle$. 于是可以假设 $b^{p^2}=x$ 和 $[b,a]=b^{p(1+ip)}$, $i=0,1,\cdots,p-1$.

当 $p>2$ 且 $a^{p^2}=x^j$ 时，令 $a_1=ab^{-j},b_1=b^{1-pi}$, 则 $G=\langle a_1,b_1\mid b_1^{p^3}=a_1^{p^2}=1,[b_1,a_1]=b_1^p\rangle$, 是定理中的 (2) 型群.

若 $p=2$ 且 $a^{2^2}=1$, 则当 $[b,a]=b^2$ 时， G 为 (5b) 型群；当 $[b,a]=b^2x=b^{-2}$ 时 G 为 (5a) 型群.

当 $p=2$ 且 $a^{2^2}=x$ 时, 若 $[b,a]=b^{-2}$, 则 G 为 (3) 型群; 若 $[b,a]=b^2$, 则令 $b_1=ba^{-2}$, 有 $b_1^4=1$ 且 $[b_1,a]=[ba^{-2},a]=[b,a]=b^2=b_1^{-2}$. 于是 G 为 (3) 型群.

情形 2 $\overline{G}$ 为极大类 2 群时，有 $|G:G'|=|\overline{G}:\overline{G}'|=4$. 进而由引理 2.1 知 G 为极大类群，即定理中的 (5c) 型群.

情形 3 $\overline{G}\cong\langle \overline{a},\overline{b}\mid \overline{a}^4=1,\overline{b}^{2^n}=1,[\overline{b},\overline{a}]=\overline{b}^{2^n-2}\rangle$ 其中 $n\geqslant 3$ 且 $G=\langle a,b\rangle$.

首先, 断言 $b^{2^n}=x$. 若否, 则有 $b^{2^n}=1$. 并且 $G'=\langle [a,b]^g\mid g\in G\rangle=\langle [a,b],[a,b,a]\rangle=\langle [b,a],b^4\rangle$. 所以 $N=\langle x\rangle\nleqq G'$, 矛盾.

然后若 $a^4=1$, 则易知 G 是 (5a) 或 (5b) 型群. 若 $a^4=x$ 且 $[b,a]=b^{2^n-2}x$, 则 G 是 (3) 型群.

剩余的情况是 $a^4=x$ 且 $[b,a]=b^{2^n-2}$. 经计算知 $[b,a^2]=[b,a]^2[b,a,a]=(b^{2^n-2}x)^2\cdot[b^{2^n-2}x,a]=b^{-4}[b^{2^n-2},a]=b^{-4}b^4=1$, 则 $(ba^{-2})^2=b^2[b,a^2]a^{-4}=b^2b^{2^n}=b^{2^n+2}$ 且 $[ba^{-2},a]=[b,a]=b^{2^n-2}=(ba^{-2})^{-2}$. 于是，令 $a_1=a,b_1=ba^{-2}$, 就有 $G=\langle a,b\rangle=\langle a_1,b_1\rangle$ 是 (3) 型群.

情形 4 $\overline{G}\cong\langle \overline{a},\overline{b}\mid \overline{a}^4=1,\overline{b}^{2^n}=1,[\overline{b},\overline{a}]=\overline{b}^{2^{n-1}-2}\rangle$ 其中 $n\geqslant 3$ 且 $G=\langle a,b\rangle$. 首先断言 $b^{2^n}=x$. 事实上, 若否, 则 $b^{2^n}=1$. 且 $G'=\langle [a,b]^g|g\in G\rangle=\langle [a,b],[a,b,a]\rangle=\langle [b,a],b^4\rangle$. 所以 $N=\langle x\rangle\nleqq G'$, 矛盾. 然后我们分以下四种子情形来分别讨论.

子情形 (4.1) $a^4=1$ 且 $[b,a]=b^{2^{n-1}-2}$. 此时易知 G 为 (4) 型群.

子情形 (4.2) $a^4=1$ 且 $[b,a]=b^{2^{n-1}-2}x$. 经计算知 $[b,a^2]=[b,a]^2[b,a,a]=b^{3\cdot 2^n-4}\cdot[b^{3\cdot 2^{n-1}-2},a]=b^{3\cdot 2^n-4}b^4=b^{3\cdot 2^n}=b^{2^n}=x$, 则 $(ba^2)^2=b^2[b,a^{-2}]a^4=b^2b^{2^n}=b^{2^n+2}$ 且 $[ba^2,a]=[b,a]=b^{3\cdot 2^{n-1}-2}=b^{-2^{n-1}-2}=(ba^2)^{2(2^{n-2}-1)}=(ba^2)^{2^{n-1}-2}$. 于是，令 $a_1=a,b_1=ba^2$, 则 $G=\langle a,b\rangle=\langle a_1,b_1\rangle$ 是 (4) 型群.

子情形 (4.3) $a^4=x$ 且 $[b,a]=b^{2^{n-1}-2}$. 经计算 $[b,a^2]=[b,a]^2[b,a,a]=b^{2^n-4}\cdot[b^{2^{n-1}-2},a]=b^{2^n-4}b^4=b^{2^n}=x$. 于是 $(ab)^2=a^2[a,b^{-1}]b^2=a^2b^{2^{n-1}-2}b^2=a^2b^{2^{n-1}}$, $(ab)^4=(a^2b^{2^{n-1}})^2=1$ 且 $[b,ab]=[b,a]=b^{2^{n-1}-2}$. 进而令 $a_1=ab,b_1=b$, 就有 $G=\langle a,b\rangle=\langle a_1,b_1\rangle$ 是 (4) 型群.

子情形 (4.4) $a^4=x$ 且 $[b,a]=b^{2^{n-1}-2}x$. 因为 $(ab^{-1})^2=a^2[a,b]b^{-2}=a^2b^{-2^{n-1}+2}b^2=a^2b^{-2^{n-1}}$ 和 $(ab^{-1})^4=1$, 所以 $G=\langle ab^{-1},b\rangle$ 满足子情形 (4.2) 的关系. 进一步令 $a_1=ab^{-1}, b_1=b(ab^{-1})^2$, 则 $G=\langle a,b\rangle=\langle a_1,b_1\rangle$ 也是 (4) 型群.

反过来, 由定理 3.1 和引理 4.3 知, 定理中列出的所有群都是 CC 群. 定理证毕.

参 考 文 献

[1] Walls G. Trivial intersection groups [J]. *Arch Math*, 1979, 32:1–4.

[2] Li S. Finite non-nilpotent groups all of whose second maximal subgroups are TI-subgroups [J]. *Math Proc R Ir Acad*, 2000, 100A(1):65–71.

[3] Guo X, Li S, Flavell P. Finite groups whose abelian subgroups are TI-subgroup [J]. *J Algebra*, 2007, 307:565–569.

[4] Li S, Guo X. Finite p-groups whose abelian subgroups have a trivial intersection [J]. *Acta Math Sin* (*Engl Ser*), 2007, 23(4):731–734.

[5] Cutolo G, Khukhro E I, Lennox J C, et al. Finite core-p p-groups [J]. *J Algebra*, 1997, 188:701–719.

[6] Cutolo G, Smith H, Wiegold J. Finite core-2 2-groups [J]. *J Algebra*, 2001, 237:813–841.

[7] Herzog M, Longobardi P, Maj M, et al. On generalized Dedekind groups and Tarski super monsters [J]. *J Algebra*, 2000, 226:690–713.

[8] Guo X, Zhao L. On J-groups of prime power order [J]. *Journal of Algebra and Its Applications*, 2012, 11(6):1250106-1–1250106-11.

[9] Lü H, Zhou W, Yu D. Some finite p-groups with bounded index of every cyclic subgroup in its normal closure [J]. *J Algebra*, 2011, 338:169–179.

[10] Berkovich Y, Janko Z. Groups of prime power order, volume 2 [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 2008.

[11] 徐明曜, 曲海鹏. 有限 p 群 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2010.

[12] Rédei L. Das schiefe product in der Gruppentheorie [J]. *Comment Math Helvet*, 1947, 20:225–267.

[13] Berkovich Y. Groups of prime power order, volume 1 [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 2008.

Finite p-Groups with a Trivial Core or the Normal Closure Index p for Every Non-normal Abelian Subgroup

ZHAO Libo[1] GONG Lü[2] GUO Xiuyun[3]

[1]College of Mathematics, Guangdong University of Education, Guangzhou 510310, China. E-mail: zhaolibo1984@qq.com

[2]School of Sciences, Nantong University, Nantong 226019, Jiangsu, China. E-mail: lieningzai1917@126.com

[3]Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, China. E-mail: xyguo@staff.shu.edu.cn

Abstract A finite p-group G is called an ACT-group if the core $H_G = 1$ or $H_G = H$ for every abelian subgroup H. And a p-group G is called a CC-group if $H_G = 1$ or $H_G = H^G$ has index p for every non-normal abelian subgroup H. In this paper, the authors classify the ACT-groups and the CC-groups.

Keywords ACT-group, Non-Dedekind group, Finite p-group, CC-group

2000 MR Subject Classification 20D15

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 42 No. 4, 2021

by ALLERTON PRESS, INC., USA