数 学 年 刊
2012,33A(4):461–468

具反应梯度项的多重非线性抛物方程解的渐近行为*

王 巍[1] 郑斯宁[1]

提要 对一类具非线性内吸收、反应梯度项及边界流的半线性抛物方程，研究了更加困难的临界情形下的爆破解的渐近行为，填补了先前工作遗留的缺口．为此，引入了改进的伸缩变换方法．

关键词 爆破速率，内吸收，梯度项，非线性边界流，伸缩变换方法
MR (2000) 主题分类 35K55, 35B33, 35B40
中图法分类 O175.29
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2012)04-0461-8

1 引 言

作者先前的工作 [1] 研究了如下具非线性内吸收、反应梯度项及边界流的半线性抛物方程的爆破解的渐近行为：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + |\nabla u|^r - a\mathrm{e}^{pu}, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \mathrm{e}^{qu}, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $r > 1$, $p, q, a > 0$, Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中具光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域， u_0 满足相容性条件．类似的不带梯度项的问题可见文 [2–3]．作变换 $v := \mathrm{e}^u$, 当 $r = 2$ 时，问题 (1.1) 就化为

$$\begin{cases} v_t = \Delta v - av^{p+1}, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = v^{q+1}, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ v(x,0) = \mathrm{e}^{u_0(x)}, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

该问题的爆破准则 [4–5] 以及解的渐近行为 [6] 等问题已有很好的研究．此外，在过去的 20 年里，许多作者致力于带有梯度项的非线性抛物方程的研究以考查梯度扰动对解的渐近行为的影响．有关工作可参见诸如文 [7–11] 关于 Chipot-Weissler 方程

$$u_t = \Delta u - |\nabla u|^q + u^p, \quad p, q > 1$$

的研究，和文 [10, 12–13] 关于对流反应扩散方程

$$u_t = \Delta u + \vec{b} \cdot \nabla(u^q) + u^p, \quad p, q > 1,\ 0 \neq \vec{b} \in \mathbb{R}^N$$

的工作，以及综述性文章 [14].

本文 2011 年 4 月 13 日收到， 2012 年 1 月 6 日收到修改稿．
[1]大连理工大学数学科学学院，辽宁 大连 116024. E-mail: oscarww@sohu.com; snzheng@dlut.edu.cn
*国家自然科学基金 (No. 11101060, No. 11171048) 资助的项目．

记 $\mu=\max(r,2)$. 对于问题 (1.1), 文 [1] 证明了如果 $\mu q>p$ 或 $\mu q=p$ 且

$$\begin{cases} a\leqslant q, & \text{当 } 1<r<2 \text{ 时}, \\ a<q+1, & \text{当 } r=2 \text{ 时}, \\ a\leqslant 1, & \text{当 } r>2 \text{ 时}, \end{cases}$$

则 (1.1) 的解对大初值在有限时刻爆破; 如果 $\mu q<p$ 或 $\mu q=p$ 且

$$\begin{cases} a>q, & \text{当 } 1<r<2 \text{ 时}, \\ a>q+1, & \text{当 } r=2 \text{ 时}, \\ a>1, & \text{当 } r>2 \text{ 时}, \end{cases}$$

则 (1.1) 的解整体有界. 特别地, 关于爆破解的渐近行为, 对 1 维情形

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+|u_x|^r-a\mathrm{e}^{pu}, & (x,t)\in(0,1)\times(0,T), \\ -u_x(0,t)=\mathrm{e}^{qu(0,t)},\ u_x(1,t)=0, & t\in(0,T), \\ u(x,0)=u_0(x), & x\in(0,1), \end{cases} \tag{1.3}$$

得到如下结果.

命题 1.1 设 u 为问题 (1.3) 的爆破时间为 T 的解, 并且令

$$\nu=\begin{cases} 2, & \text{如果 } r>2 \text{ 且 } \mu q=p,\ a=1, \\ \mu, & \text{其它爆破情形}. \end{cases} \tag{1.4}$$

(i) 设 $u_0'\leqslant 0$, $u_0''+|u_0'|^r-a\mathrm{e}^{pu_0}\geqslant 0$ 于 $(0,1)$. 若 $\mu q>p$ 或 $\mu q=p$ 且

$$\begin{cases} a<\dfrac{q}{2}, & \text{当 } 1<r<2 \text{ 时}, \\ a<\dfrac{q}{2}+1, & \text{当 } r=2 \text{ 时}, \\ a\leqslant 1, & \text{当 } r>2 \text{ 时}, \end{cases} \tag{1.5}$$

则存在常数 $C_0>0$, 使得

$$u(0,t)\leqslant \log C_0(T-t)^{-\frac{1}{\nu q}}, \quad t\in[0,T). \tag{1.6}$$

(ii) 设 $u_0'\leqslant 0$ 于 $(0,1)$, 则存在正常数 c_0, 使得

$$u(0,t)\geqslant \log c_0(T-t)^{-\frac{1}{\nu q}}, \quad t\in[0,T). \tag{1.7}$$

可以看到, 在临界情形 $\mu q=p$ 下, 参数分类 (1.5) 是不完全的, 也就是, 未包含 $r=2$, $\frac{q}{2}+1\leqslant a<q+1$ 以及 $1<r<2$, $\frac{q}{2}\leqslant a\leqslant q$ 的情形. 注意到 (1.3) 当 $r=2$ 时等价于

$$\begin{cases} v_t=v_{xx}-av^{p+1}, & (x,t)\in(0,1)\times(0,T), \\ -v_x(0,t)=v^{q+1}(0,t),\ v_x(1,t)=0, & t\in(0,T), \\ v(x,0)=\mathrm{e}^{u_0(x)}, & x\in(0,1), \end{cases} \tag{1.8}$$

其爆破速率估计已在文 [6] 中建立. 本文的主要目的是对 $\mu q=p$ 且 $1<r<2$, $\frac{q}{2}\leqslant a\leqslant q$ 这一更困难的情形建立爆破速率上界估计, 从而填补先前工作的缺口. 本文的主要结果如下.

定理 1.1 设 u 为问题 (1.3) 的爆破时间为 T 的解, $1 < r < 2$, $\mu q = p$, 并且 $u_0' \leqslant 0$, $u_0'' + |u_0'|^r - a\mathrm{e}^{pu_0} \geqslant 0$ 于 $(0,1)$. 则存在常数 $C_0 > 0$, 使得对任意 $t \in [0,T)$, 有

$$u(0,t) \leqslant \begin{cases} \log C_0(T-t)^{-\frac{1}{q}}, & \text{如果 } a = q, \\ \log C_0(T-t)^{-\frac{1}{2q}}, & \text{如果 } a < q. \end{cases} \tag{1.9}$$

为证明上述结论, 我们将对伸缩变换技巧做非平凡改进. 众所周知, 利用伸缩变换方法建立爆破速率上界估计的关键在于通过反证得到伸缩变换函数的时间导数在 $(0,0)$ 处具有一致正下界 [6,15−16]. 通常, 伸缩变换函数的一致有界性即可确保相应的 Schauder 估计成立, 从而可找到一个非负有界的极限函数, 它是某一椭圆问题 (1 维情形下可看作是一个常微问题) 的解, 但该问题本身又并不存在这样的解, 导致矛盾. 遗憾的是, 通常的伸缩变换方法并不适用于我们的情形. 首先, 伸缩变换函数所满足的方程 (见 (2.2) 第 1 个式子) 中梯度项具有奇性, 这使得仅由伸缩变换函数的一致有界性不能得其 Schauder 估计; 其次, 极限函数所满足的常微问题 (见 (2.5)) 本身确实存在严格正的有界解, 原有引起矛盾的依据不再有效. 为克服这两个本质性的困难, 我们给出了常微问题解的衰减速率估计 (见 (2.8)), 并且通过比较得到了伸缩变换函数的下界估计 (见 (2.9)). 这样, 我们就可以一方面利用 Schauder 估计得到一个具有某种下界估计的极限函数, 它是常微问题的解; 而另一方面, 该极限函数的下界估计又表明它不可能以常微问题解的衰减速度衰减, 从而矛盾. 也就是说, 不是根据稳态解的不存在性找矛盾, 而是根据更精细的伸缩变换函数的衰减估计找矛盾. 对经典伸缩变换技巧的这一非平凡改进, 需要一系列更为细致的分析.

定理 1.1 给出了 $1 < r < 2$, $\mu q = p$ 且 $a \leqslant q$ 时的爆破速率上界估计. 结合 (1.9) 和 (1.7), 可以发现 $a = q$ 时的估计尚未达到最佳, 因为这时 $\nu = \mu = 2$, 从而上下界估计的阶不同. 我们猜想最优的速率为

$$\log c_0(T-t)^{-\frac{1}{rq}} \leqslant u(0,t) \leqslant \log C_0(T-t)^{-\frac{1}{rq}}.$$

这表明当 $1 < r < 2$ 时, 爆破速率关于参数 p, q 及 a 不连续. 在文 [1] 中也曾观察到 $r > 2$ 情形的此类 "不连续" 现象. 需要指出的是, 无论 (1.9) 的第 1 个式子是否为最优, 都可以类似我们在文 [1] 中的证明得知爆破集是单点的, 并有如下的空间爆破 profile 估计成立:

$$\log C_1 x^{-\frac{1}{q}} \leqslant u(x,T) \leqslant \log C_2 x^{-\frac{1}{q}}, \quad x \in (0,\ell),$$

其中 $\ell \in (0,1)$, $C_1, C_2 > 0$. 这些结果均未包含在文 [1] 中.

2 定理 1.1 的证明

下面, 我们给出定理 1.1 的证明.

定理 1.1 的证明 因为 $u_0' \leqslant 0$, $u_0'' + |u_0'|^r - a\mathrm{e}^{pu_0} \geqslant 0$ 于 $(0,1)$, 由极值原理知, $u_x < 0$ 于 $[0,1) \times (0,T)$, 且对任意 $\tau \in (0,T)$, 有 $u_t > 0$ 于 $[0,1] \times [\tau,T)$. 进一步地, 我们断言存在 $t_1 \in [0,T)$, 使得

$$\|u_x(\cdot,t)\|_\infty = |u_x(0,t)| = \mathrm{e}^{qu(0,t)}, \quad t \in [t_1,T). \tag{2.1}$$

事实上，考虑函数 $\Psi := -u_x$, 我们有

$$\begin{cases}\Psi_t = \Psi_{xx} - r\Psi^{r-1}\Psi_x - ape^{pu}\Psi, & (x,t)\in(0,1)\times(0,T),\\ \Psi(0,t) = e^{qu(0,t)}, \quad \Psi(0,t)=0, & t\in(0,T),\\ \Psi(x,0) = -u_0'(x)\geqslant 0, & x\in(0,1),\end{cases}$$

并且由于 u 在 $x=0$ 处爆破，所以当 $t\to T$ 时，$\Psi(0,t)\to\infty$. 又由 $u_t\geqslant 0$ 知 $\Psi_t(0,t)\geqslant 0$. 于是，存在 $t_1\in[0,T)$, 使得对任意的 $t\in[t_1,T)$, 有 $\Psi(0,t)\geqslant \max\limits_{[0,1]}\Psi(\cdot,0)$. 从而由强极值原理知 $\Psi(0,t)=\max\limits_{[0,1]\times[0,t]}\Psi$, 所以有 (2.1) 成立.

本定理考虑 $1<r<2$ 时的临界情形 $\mu q=p$, 且 $a\leqslant q$. 先考虑 $a=q$ 情形．受文 [17] 的启发，考虑函数

$$\Phi = u_t - \varepsilon|u_x| \quad 在\ (0,1)\times(\tau,T)\ 中,$$

其中 $\tau\in(0,T)$ 固定而 $\varepsilon\in(0,1)$ 是待定常数．经简单计算知

$$\Phi_t - \Phi_{xx} + r|u_x|^{r-1}\Phi_x + ape^{pu}\Phi = 0 \quad 在\ (0,1)\times(\tau,T)\ 中.$$

此外，$\Phi_x(1,t)=\varepsilon(u_t(1,t)+ape^{pu(1,t)})\geqslant 0$, 且对 $t\in(\tau,T)$, 有

$$-\Phi_x(0,t) = (qe^{qu(0,t)}-\varepsilon)\Phi(0,t) + \varepsilon e^{qu(0,t)}(qe^{qu(0,t)} + e^{(r-1)qu(0,t)} - ae^{(p-q)u(0,t)} - \varepsilon).$$

注意到 $a=q$, 且由 μ 的定义知 $p=\mu q=2q$, 我们有

$$\begin{aligned}-\Phi_x(0,t) &= (qe^{qu(0,t)}-\varepsilon)\Phi(0,t) + \varepsilon e^{qu(0,t)}(e^{(r-1)qu(0,t)}-\varepsilon)\\ &\geqslant (qe^{qu(0,t)}-\varepsilon)\Phi(0,t).\end{aligned}$$

进一步地，由于 $u_t(\cdot,\tau)>0$ 于 $[0,1]$, 可取 ε 足够小，使得

$$\Phi(x,\tau) = u_t(x,\tau) - \varepsilon|u_x(x,\tau)|\geqslant 0, \quad x\in(0,1).$$

利用比较原理 (参见文 [18] 中第 145 页定理 2.1) 可知，$u_t\geqslant\varepsilon|u_x|$ 在 $[0,1]\times[\tau,T)$ 上．特别地，

$$u_t(0,t)\geqslant \varepsilon e^{qu(0,t)}, \quad t\in[\tau,T).$$

将上式两端在 (t,T) 上积分即得上界估计 (1.9) 的第 1 个式子.

再考虑 $a<q$ 的情形．任给 $t^*\in(t_1,T)$, 定义

$$\psi_\lambda(y,s) = e^{(u(\lambda y,\lambda^2 s+t^*)-M(t^*))}, \quad (y,s)\in\Big(0,\frac{1}{\lambda}\Big)\times\Big(-\frac{t^*-t_1}{\lambda^2},0\Big),$$

其中

$$\lambda = e^{-qM(t^*)}, \quad M(t^*) = u(0,t^*) = \max_{[0,1]} u(\cdot,t^*).$$

则 $\psi_\lambda(0,0)=1$, $(\psi_\lambda)_s\geqslant 0$ 且 $(\psi_\lambda)_y\leqslant 0$. 由 (2.1) 知 $|(\psi_\lambda)_y|\leqslant\psi_\lambda$ 且 $\psi_\lambda(0,s)e^{-y}\leqslant\psi_\lambda(y,s)\leqslant 1$. 对应于 (1.3), ψ_λ 满足

$$\begin{cases}(\psi_\lambda)_s = (\psi_\lambda)_{yy} - \dfrac{|(\psi_\lambda)_y|^2}{\psi_\lambda} + \lambda^{2-r}\dfrac{|(\psi_\lambda)_y|^r}{(\psi_\lambda)^{r-1}} - a(\psi_\lambda)^{2q+1},\\ \qquad\qquad (y,s)\in\Big(0,\dfrac{1}{\lambda}\Big)\times\Big(-\dfrac{t^*-t_1}{\lambda^2},0\Big),\\ -(\psi_\lambda)_y(0,s) = (\psi_\lambda)^{q+1}(0,s), \quad (\psi_\lambda)_y\Big(\dfrac{1}{\lambda},s\Big)=0, \quad s\in\Big(-\dfrac{t^*-t_1}{\lambda^2},0\Big).\end{cases} \tag{2.2}$$

注意到 $(\psi_\lambda)_s$ 与 $-(\psi_\lambda)_y$ 非负，我们有

$$\frac{(\psi_\lambda)_y}{\psi_\lambda}\Big(\frac{(\psi_\lambda)_{yy}}{\psi_\lambda}-\frac{|(\psi_\lambda)_y|^2}{(\psi_\lambda)^2}+\lambda^{2-r}\frac{|(\psi_\lambda)_y|^r}{(\psi_\lambda)^r}-a(\psi_\lambda)^{2q}\Big)\leqslant 0,$$

亦即

$$\frac{(\psi_\lambda)_y}{\psi_\lambda}\Big(\frac{(\psi_\lambda)_y}{\psi_\lambda}\Big)_y-\lambda^{2-r}\frac{|(\psi_\lambda)_y|^{r+1}}{(\psi_\lambda)^{r+1}}-a(\psi_\lambda)^{2q-1}(\psi_\lambda)_y\leqslant 0.$$

对上式两端积分，得

$$\begin{aligned}\Big(\frac{(\psi_\lambda)_y}{\psi_\lambda}\Big)^2&\leqslant(\psi_\lambda)^{2q}(0,s)+\frac{a}{q}((\psi_\lambda)^{2q}-(\psi_\lambda)^{2q}(0,s))+2\lambda^{2-r}\int_0^y\frac{|(\psi_\lambda)_y(\zeta,s)|^{r+1}}{(\psi_\lambda(\zeta,s))^{r+1}}\mathrm{d}\zeta\\&\leqslant(\psi_\lambda)^{2q}(0,s)+\frac{a}{q}((\psi_\lambda)^{2q}-(\psi_\lambda)^{2q}(0,s))-2\lambda^{2-r}\log\Big(\frac{\psi_\lambda(y,s)}{\psi_\lambda(0,s)}\Big)\\&\leqslant(\psi_\lambda)^{2q}(0,s)+\frac{a}{q}((\psi_\lambda)^{2q}-(\psi_\lambda)^{2q}(0,s))-2(\psi_\lambda)^{2\epsilon q}(0,s)\lambda^{2-r-2\epsilon}\log\Big(\frac{\psi_\lambda(y,s)}{\psi_\lambda(0,s)}\Big),\end{aligned}$$

其中 $\epsilon\in(0,1-\frac{r}{2})$ 为固定常数．由此，再积分可得

$$\int_{\frac{\psi_\lambda(y,s)}{\psi_\lambda(0,s)}}^1\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\sqrt{1+\frac{a}{q}(\xi^{2q}-1)-2\lambda^{2-r-2\epsilon}\log\xi}}\leqslant(\psi_\lambda)^{\epsilon q}(0,s)y \tag{2.3}$$

在 $(0,\frac{1}{\lambda})\times(-\frac{t^*-t_1}{\lambda^2},0)$ 中．定义函数 $f_\lambda:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 满足

$$f_\lambda(y)=\int_{\mathrm{e}^{-y}}^1\Big(\frac{1}{\xi\sqrt{1+\frac{a}{q}(\xi^{2q}-1)}}-\frac{1}{\xi\sqrt{1+\frac{a}{q}(\xi^{2q}-1)-2\lambda^{2-r-2\epsilon}\log\xi}}\Big)\mathrm{d}\xi.$$

不难看出,当 $\lambda\to 0$ 时，$f_\lambda(\cdot)$ 在 $[0,\infty)$ 的任一紧子集上一致收敛于 0. 注意到 $\frac{\psi_\lambda(y,s)}{\psi_\lambda(0,s)}\geqslant\mathrm{e}^{-y}$，由 (2.3) 即得

$$\int_{\frac{\psi_\lambda(y,s)}{\psi_\lambda(0,s)}}^1\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\sqrt{1+\frac{a}{q}(\xi^{2q}-1)}}\leqslant(\psi_\lambda)^{\epsilon q}(0,s)y+f_\lambda(y)\quad\text{在 }\Big(0,\frac{1}{\lambda}\Big)\times\Big(-\frac{t^*-t_1}{\lambda^2},0\Big)\text{中}. \tag{2.4}$$

考虑

$$\begin{cases}h''-\dfrac{|h'|^2}{h}-ah^{2q+1}=0, & y>0,\\ h'(0)=-1, & h(0)=1\end{cases} \tag{2.5}$$

的正解．问题 (2.5) 解的局部存在性及唯一性是标准的．设 $[0,R)$ $(0<R\leqslant\infty)$ 为解 h 的最大存在区间．在 (2.5) 中方程两端同乘 $\frac{h'}{h^2}$, 并在 $(0,y)$ 上积分得

$$\Big(\frac{h'}{h}\Big)^2=1+\frac{a}{q}(h^{2q}-1)\quad\text{在 }[0,R)\text{ 上}.$$

结合 $a<q$ 可知， h 在 $[0,R)$ 上严格单调递减．于是

$$-\frac{h'}{h}=\sqrt{1+\frac{a}{q}(h^{2q}-1)}\quad\text{在 }[0,R)\text{ 上}. \tag{2.6}$$

据此， h 可由隐式

$$\int_{h(y)}^1\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\sqrt{1+\frac{a}{q}(\xi^{2q}-1)}}=y,\quad y\in[0,R) \tag{2.7}$$

给出．我们可以看到 $\lim\limits_{y\to R}h(y)=\lim\limits_{y\to R}h'(y)=0$, 从而由 (2.7) 知 $R=\infty$．事实上，若不然，设 $\lim\limits_{y\to R}h(y)=c>0$. 则由 (2.6) 和 (2.7) 知，极限 $\lim\limits_{y\to R}h'(y)$ 存在且 $R<\infty$. 于是，解可以继续延拓．这与 R 的最大性矛盾．

由 (2.6), 我们有 $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{h'(y)}{h(y)}=-\sqrt{1-\frac{a}{q}}$, 这表明对小的 $\epsilon_0>0$, 存在正常数 K_0, y_0, 使得

$$h(y)\leqslant K_0\exp\Big\{-\Big(\sqrt{1-\frac{a}{q}}-\epsilon_0\Big)y\Big\},\quad y\geqslant y_0.$$

联合上述不等式及 (2.6) 知，对任意 $\delta>1$, 有

$$\lim_{y\to\infty}\Big(\frac{h'}{h}+\sqrt{1-\frac{a}{q}}\Big)y^{\delta}=0.$$

进而，存在一个正常数 A_0, 使得 $h(y)=A_0\mathrm{e}^{-\sqrt{1-\frac{a}{q}}y}[1+o(y^{1-\delta})]$. 因此

$$\lim_{y\to\infty}h(y)\mathrm{e}^{\sqrt{1-\frac{a}{q}}y}=A_0. \tag{2.8}$$

由 (2.4) 和 (2.7), 我们得

$$\psi_\lambda(y,s)\geqslant\psi_\lambda(0,s)h((\psi_\lambda)^{\epsilon q}(0,s)y+f_\lambda(y)),\quad (y,s)\in\Big(0,\frac{1}{\lambda}\Big)\times\Big(-\frac{t^*-t_1}{\lambda^2},0\Big).$$

取 t^* 充分靠近 T, 使得 $M(t^*)>M(t_1)+\log 2$. 于是, 存在 $s_\lambda\in(-\frac{t^*-t_1}{\lambda^2},0)$, 使得 $\psi_\lambda(0,s_\lambda)=\frac{1}{2}$, 从而

$$\psi_\lambda(y,s)\geqslant\psi_\lambda(y,s_\lambda)\geqslant\frac{1}{2}h(2^{-\epsilon q}y+f_\lambda(y)),\quad (y,s)\in\Big(0,\frac{1}{\lambda}\Big)\times(s_\lambda,0). \tag{2.9}$$

注意到 $|(\psi_\lambda)_y|\leqslant\psi_\lambda\leqslant 1$, 由 Hölder 估计 [19], 有

$$\|\psi_\lambda\|_{C^{1,\frac{1}{2}}([0,\frac{1}{\lambda}]\times[-\frac{t^*-t_1}{\lambda^2},0])}\leqslant C,$$

其中 C 与 λ 无关．于是

$$\frac{1}{2}=\psi_\lambda(0,0)-\psi_\lambda(0,s_\lambda)\leqslant C(-s_\lambda)^{\frac{1}{2}},$$

由此知 $s_\lambda\leqslant s_0$ 对某个 $s_0<0$ 成立．

我们断言，存在 $c>0$, 使得对 λ 充分小，有

$$\frac{\partial\psi_\lambda}{\partial s}(0,0)\geqslant c. \tag{2.10}$$

如若不然，则存在一序列 $\lambda_j\to 0$, 使得 $\frac{\partial\psi_{\lambda_j}}{\partial s}(0,0)\to 0$. 由 (2.9), 利用 Schauder 估计 [19] 知，存在 $\alpha\in(0,1)$, 使得对任意整数 $m\geqslant 1$, 只要 λ 充分小，就有

$$\|\psi_\lambda\|_{C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}([0,m]\times[s_0,0])}\leqslant C(m,\alpha).$$

通过紧致性和对角化过程, 可找到 $\{\psi_{\lambda_j}\}$ 的一个子列 (仍记为本身) 和一个函数 ψ, 使得对任意的整数 $m\geqslant 1$, 有 $\psi_{\lambda_j}\to\psi$ 在 $C^{2,1}([0,m]\times[s_0,0])$ 中．显然，$\psi(0,0)=1$, $\psi_s(0,0)=0$, $\psi_s\geqslant 0$, 且由 (2.9) 还有

$$\psi(y,s)\geqslant\frac{1}{2}h(2^{-\epsilon q}y)>0,\quad (y,s)\in(0,\infty)\times(s_0,0). \tag{2.11}$$

所以，ψ 满足

$$\begin{cases}\psi_s = \psi_{yy} - \dfrac{|\psi_y|^2}{\psi} - a\psi^{2q+1}, & (y,s) \in (0,\infty) \times (s_0, 0),\\ -\psi_y(0,s) = \psi^{q+1}(0,s), & s \in (s_0, 0).\end{cases}$$

对上述方程关于 s 微分，并利用 Hopf 引理，可得 $\psi_s \equiv 0$, 也就是说，ψ 是与 s 无关的函数，因此是 (2.5) 的解．然而，(2.11) 和 (2.8) 表明

$$\psi(y)\mathrm{e}^{\sqrt{1-\frac{a}{q}}y} \geqslant \frac{1}{2}h(2^{-\epsilon q}y)\mathrm{e}^{\sqrt{1-\frac{a}{q}}y} \to \infty, \quad 当\ y \to \infty\ 时,$$

显然矛盾．于是，由 (2.10), 我们有 $M_t(t^*) \geqslant c\mathrm{e}^{2qM(t^*)}$. 积分该不等式即得估计 (1.9) 的第 2 个式子.

参　考　文　献

[1] Zheng S N, Wang W. Effects of reactive gradient term in a multi-nonlinear parabolic problem [J]. *J Differential Equations*, 2009, 247:1980–1992.

[2] Zheng S N, Li F J. Critical exponents for a reaction-diffusion system with absorptions and coupled boundary flux [J]. *Proc Edinburgh Math Soc*, 2005, 48:241–252.

[3] Zheng S N, Li F J, Liu B C. Asymptotic behavior for a reaction-diffusion equation with inner absorption and boundary flux [J]. *Appl Math Lett*, 2006, 19:942–948.

[4] Chipot M, Fila M, Quittner P. Stationary solutions, blow-up and convergence to stationary solutions for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions [J]. *Acta Math Univ Comenian* (*NS*), 1991, 60:35–103.

[5] Quittner P. On global existence and stationary solutions for two classes of semilinear parabolic problems [J]. *Comment Math Univ Carolinae*, 1993, 34:105–124.

[6] Rossi J D. The blow-up rate for a semilinear parabolic equation with a nonlinear boundary condition [J]. *Acta Math Univ Comenian* (*NS*), 1998, 67:343–350.

[7] Chlebík M, Fila M. From critical exponents to blow-up rates for parabolic problems [J]. *Rend Mat Appl* (7), 1999, 19:449–470.

[8] Chlebík M, Fila M, Quittner P. Blow-up of positive solutions of a semilinear parabolic equation with a gradient term [J]. *Dyn Contin Discrete Impulsive Syst Ser A Math Anal*, 2003, 10:525–537.

[9] Chipot M, Weissler F B. Some blow-up results for a nonlinear parabolic equation with a gradient term [J]. *SIAM J Math Anal*, 1989, 20:886–907.

[10] Fila M, Souplet Ph. The blow-up rate for semilinear parabolic problems on general domains [J]. *Nonlinear Differ Equ Appl*, 2001, 8:473–480.

[11] Souplet Ph, Weissler F B. Self-similar subsolutions and blow-up for nonlinear parabolic equations [J]. *J Math Anal Appl*, 1997, 212:60–74.

[12] Aguirre J, Escobedo M. On the blow-up of solutions for a convective reaction diffusion equation [J]. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 1993, 123:433–460.

[13] Levine H A, Payne L N, Sacks P E, et al. Analysis of convective reaction-diffusion equation (II) [J]. *SIAM J Math Anal*, 1989, 20:133–147.

[14] Souplet Ph. The influence of gradient perturbations on blow-up asymptotics in semilinear parabolic problems: a survey [J]. *Progr Nonlinear Differential Equations Appl*, 2005, 64:473–495.

[15] Gidas B, Spruck J. A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations [J]. *Comm Partial Differential Equations*, 1981, 6:883–901.

[16] Hu B, Yin H M. The profile near blow-up time for solution of the heat equation with a nonlinear boundary condition [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1994, 346(1):117–135.

[17] Deng K, Xu M X. On solutions of a singular diffusion equation [J]. *Nonlinear Anal*, 2000, 41:489–500.

[18] Pao C V. Nonlinear parabolic and elliptic equations [M]. New York: Plenum Press, 1992.

[19] Lieberman G M. Second order parabolic differential equations [M]. River Edge, NJ: World Scientific, 1996.

Asymptotic Behavior of Solutions to a Multi-nonlinear Parabolic Equation with a Reactive Gradient Term

WANG Wei[1] ZHENG Sining[1]

[1]School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, Liaoning, China. E-mail: oscarww@sohu.com; snzheng@dlut.edu.cn

Abstract This paper deals with a semilinear parabolic equation with nonlinear inner absorption, reactive gradient term and boundary flux. The authors consider the asymptotic behavior of the blow-up solutions in the more difficult critical situation, in order to fill a gap left by the previous work. For this purpose, some refined rescaling technique is introduced.

Keywords Blow-up rate, Inner absorption, Gradient term, Nonlinear boundary flux, Rescaling technique

2000 MR Subject Classification 35K55, 35B33, 35B40

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 33 No. 3, 2012
by ALLERTON PRESS, INC., USA