数 学 年 刊 A 辑
2022, 43(3):263–282
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2022.0018

含有陡峭势阱和凹凸非线性项的 Kirchhoff 型问题的多重正解 *

李 敏 [1] 吴行平 [2] 唐春雷 [3]

提要 在这篇文章中，作者研究涉及凹凸非线性项的 Kirchhoff 型问题

$$\begin{cases}-\Big(a+b\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\Big)\Delta u+\lambda V(x)u=\mu f(x)|u|^{q-2}u+|u|^{p-2}u, \quad x\in\mathbb{R}^3,\\ u\in H^1(\mathbb{R}^3),\end{cases}$$

其中 $a,b>0$ 是常数， $\lambda,\mu>0$ 是参数， $1<q<2,\ 4<p<6$ 且 V 是一个非负连续位势．在 $f(x)$ 和 V 的合适条件下，此问题正解的存在性和集中性能够通过 Nehari 流形和 Ekeland 变分原理得到.

关键词 Kirchhoff 型问题，凹凸非线性项，陡峭势阱， Nehari 流形
MR (2000) 主题分类 35J15, 35J20, 35D30
中图法分类 O177.91
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2022)03-0263-20

§1 引言与主要结果

本文我们主要考虑下列带有陡峭势阱的 Kirchhoff 型问题的正解的存在性和集中性

$$\begin{cases}-\Big(a+b\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\Big)\Delta u+\lambda V(x)u=\mu f(x)|u|^{q-2}u+|u|^{p-2}u, \quad x\in\mathbb{R}^3,\\ u\in H^1(\mathbb{R}^3),\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $a,b>0$ 是常数， $\lambda,\mu>0$ 是参数， $1<q<2,\ 4<p<6,\ f(x)$ 是一个连续函数．假设 V 满足下面的条件:

(V_1) $V\in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ 且 $V\geqslant 0$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中成立;

(V_2) 存在 $b>0$, 使得集合 $\{x\in\mathbb{R}^3: V(x)<b\}$ 是非空的且有有限的 Lebesgue 测度;

(V_3) $\Omega=\operatorname{int} V^{-1}(0)$ 是非空的且与 $\overline{\Omega}=V^{-1}(0)$ 有光滑的边界.

这种假设最早是由 Bartsch 和 Wang[1] 在非线性薛定谔方程的研究中引入，并被许多学者广泛研究，例如，见文 [2–4] 及其中的参考文献．条件 (V_1)–(V_3) 意味着 λV 代表

本文 2021 年 1 月 25 日收到， 2022 年 3 月 1 日收到修改稿.
[1]西南大学数学与统计学院，重庆 400715; 重庆工贸职业技术学院基础教育学院，重庆 408000.
E-mail: lm7math@163.com
[2]通信作者．西南大学数学与统计学院，重庆 400715．E-mail: wuxp@swu.edu.cn
[3]西南大学数学与统计学院，重庆 400715．E-mail: tangcl@swu.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11971393) 的资助.

一个势阱，它的深度由 λ 控制．如果 λ 充分大并且期望在其底部 Ω 附近找到它的解，则 λV 称为陡峭势阱．

问题 (1.1) 与以下方程的平稳模拟有关：

$$u_{tt}-\Big(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\Big)\Delta u=f(x,u),\tag{1.2}$$

该方程由 Kirchhoff 在文 [5] 中提出，它是经典 D'Alembert's 波动方程的扩展，考虑了弦长变化对振动的影响．问题 (1.2) 中的参数有实际的物理意义： u 表示位移， f 表示外力， b 表示初始张力， a 与弦长的内在性质有关．一些物理学家在研究动态模型时研究了这类方程及相关的数学研究，比如文 [6–7], 随后静态的 Kirchhoff 问题引起了许多学者的注意．读者可以从文 [8–9] 中了解 Kirchhoff 的一些早期研究．在 Lions[10] 对 Kirchhoff 问题 (1.2) 提出抽象泛函分析框架之后，它在数学研究上受到了越来越多的关注．

近年来，许多学者致力于研究以下的 Kirchhoff 型问题：

$$\begin{cases}-\Big(a+b\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\Big)\Delta u+V(x)u=f(x,u), & x\in\mathbb{R}^N,\\ u\in H^1(\mathbb{R}^N),\end{cases}\tag{1.3}$$

其中 $N\geqslant 3$. 对于非线性项为次临界和临界的情况, 许多学者非常关注关于位势 V 的各种假设，因此有很多关于方程 (1.3) 存在正解，基态解和多解的结果，例如，参见文 [11–15]. 对于凹凸非线性项, 同样也有相当多的研究考虑了问题 (1.3). 我们指出在文 [16] 中，Liao 和 Ke 考虑了问题 (1.3) 在 Ω 中 $V(x)=0$, $f(x,u)=f(x)|u|^{p-1}u+g(x)|u|^{q-1}u$ 的情况，其中 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑有界域且有 $0<q<1$, $3<p<5$. 他们研究了问题 (1.3) 在凹凸项系数函数的作用下解的多重性．在文 [17] 中，对于 $f(x,u)=f(x)|u|^{q-2}u+g(x)|u|^{p-2}u$, 其中 $1<q<2$, $4<p<6$ 且 $N=3$. 他们假设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下面的条件：

(F^*) $f\in C(\mathbb{R}^3)\cap L^{q^*}(\mathbb{R}^3)$, 其中 $q^*=\frac{p}{p-q}$.

(G) $g\in C(\mathbb{R}^3)\cap L^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ 且 $g(x)>0$, 对于几乎每一个 $x\in\mathbb{R}^3$ 都成立.

他们证明了问题 (1.3) 至少有两个正解．随后， Meng 等人在文 [18] 中研究了问题 (1.3) 在 $f(x,u)=\mu f(x)|u|^{q-2}u+g(x)|u|^{p-2}u$ 时 Kirchhoff 型问题双调和方程正解的多重性．更多关于问题 (1.3) 的凹凸非线性项解的存在性结果可以在文 [19–22] 中找到.

此外，许多学者考虑带有陡峭势阱的方程

$$\begin{cases}-\Big(a+b\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\Big)\Delta u+\lambda V(x)u=f(x,u), & x\in\mathbb{R}^N,\\ u\in H^1(\mathbb{R}^N).\end{cases}\tag{1.4}$$

他们在 V 和 f 的各种假设下研究了问题 (1.4), 并且得到了一些存在性和多重性结果，例如，参见文 [23–28] 及其中的文献．近来， Sun 和 Wu 在文 [25] 中第一次把陡峭势阱条件 (V_1)–(V_3) 应用到 Kirchhoff 型问题，非线性项 $f(x,u)$ 对于 u 在无穷远处是渐近 k- 线性 $(k=1,3,4)$ 的．他们用不定非线性项 $f(x,u)$ 证明了问题 (1.4) 的基态解的存在性．此外，还讨论了非平凡解的不存在性和集中性．从那以后， Xie 和 Ma 在文 [26] 中证明了在 (AR) 条件和 $N=3$ 时的单调性条件下问题 (1.4) 正解的存在性和集中性．后来， Du 等人在文 [23] 中通过变分方法研究了问题 (1.4) 当 $N=3$ 和非线性项 $f(x,u)$ 在无穷远处

是超 4 线性时基态解的存在性. 在 V 的类似条件下，通过将截断技巧和参数相关紧致引理相结合，当 $f(x,u):=f(u)$ 表现为 $|u|^{p-2}u$, 其中 $2<p<4$, 且 b 足够小和 λ 足够大, Zhang 和 Du[28] 研究了问题 (1.4) 时正解的存在性. 此外，他们还探究了 $|x|\to\infty$ 时正解的衰减率以及当 $b\to 0$ 和 $\lambda\to\infty$ 时解的渐近行为.

受上述工作的启发，我们知道，关于 $V(x)$ 是陡峭位势时，非线性项为次临界或临界的 Kirchhoff 问题和 $V(x)$ 是常数位势或是其他不是陡峭位势的情况下带有凹凸非线性项的 Kirchhoff 问题，这里已经有很多研究结果. 一个很自然的问题就是：是否我们可以得到带有陡峭势阱和凹凸非线性项的 Kirchhoff 方程的正解的存在性和集中性？

在陈述我们的主要结果之前，我们假设 f 满足下面的条件：

(F) $f\in L^{\frac{p}{p-q}}(\mathbb{R}^3)\cap C(\mathbb{R}^3)$ 是一个非零非负函数.

我们现在陈述本文的主要结果.

定理 1.1　假设 $1<q<2$, $4<p<6$, 函数 f,V 满足 (F) 和 (V_1)–(V_3). 令

$$\mu_0=\frac{(p-2)S_p^{\frac{q}{2}}}{(p-q)|f|_{\frac{p}{p-q}}}\Big[\frac{(2-q)S_p^{\frac{p}{2}}}{p-q}\Big]^{\frac{2-q}{p-2}},$$

其中 S_p 的定义在下面给出，则存在 $\Lambda>0$, 使得对于所有的 $\lambda>\Lambda$ 和任意的 $0<\mu<\mu_0$, 问题 (1.1) 至少有两个正解，并且基态解属于 $\mathcal{N}_\lambda^+$.

此外，证明当 $\lambda\to\infty$ 时正解的渐近行为，那么我们有以下的结果.

定理 1.2　令 u_λ^* 和 u_λ^{**} 是定理 1.1 中得到的解，则当 $\lambda\to\infty$ 时，$u_\lambda^*\to u_0^*$ 和 $u_\lambda^{**}\to u_0^{**}$ 在 E 中成立，其中 $u_0^*,u_0^{**}\in H_0^1(\Omega)$ 是下列方程的解：

$$\begin{cases}-\Big(a+b\displaystyle\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\Big)\Delta u=\mu f(x)|u|^{q-2}u+|u|^{p-2}u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{1.5}$$

此外，下面的结论成立：(i) 存在一个非空开集 $\Omega_f\subset\overline{\Omega}$, 使得 $f>0$ 在 Ω_f 上几乎处处成立，则 u_0^* 是问题 (1.5) 的一个正解；(ii) u_0^{**} 是问题 (1.5) 的一个正解；(iii) $u_0^*\neq u_0^{**}$.

本文的结构如下. 在第 2 节我们建立了一些初步结果，并在第 3 节给出了定理 1.1 的证明. 在第 4 节中，我们完成了对定理 1.2 的证明.

§2　预备知识

在这一节中，我们建立方程 (1.1) 的变分结构并给出一些预备性的结果.

令

$$E=\Big\{u\in H^1(\mathbb{R}^3):\int_{\mathbb{R}^3}V(x)u^2\mathrm{d}x<\infty\Big\}$$

有以下的内积和范数

$$(u,v)=\int_{\mathbb{R}^3}(a\nabla u\cdot\nabla v+V(x)uv)\mathrm{d}x,\quad \|u\|=(u,u)^{\frac{1}{2}}.$$

对于 $\lambda > 0$, 同时也需要下面的内积和范数

$$(u,v)_\lambda = \int_{\mathbb{R}^3} (a\nabla u\cdot\nabla v + \lambda V(x)uv)\mathrm{d}x, \quad \|u\|_\lambda = (u,u)_\lambda^{\frac{1}{2}}.$$

很显然对于 $\lambda \geqslant 1$, 有 $\|u\| \leqslant \|u\|_\lambda$.

在 $L^s(\mathbb{R}^3)$ 中，定义范数

$$|u|_s^s = \int_{\mathbb{R}^3} |u|^s \mathrm{d}x, \quad 其中\ \ 0 < s \leqslant \infty.$$

令 $E_\lambda = (E, \|u\|_\lambda)$. 根据 (V_1), (V_2) 以及 Poincaré 不等式可知，嵌入 $E \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^3)$ 是连续的 (见 [29]). 用 S_p 表示嵌入 $E \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$ 的最佳 Sobolev 常数，它由下式给出：

$$S_p = \inf_{E\setminus\{0\}} \frac{\|u\|^2}{(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p \mathrm{d}x)^{\frac{2}{p}}} > 0.$$

则对于每一个 $p \in [2,6)$ 和 $\lambda \geqslant 1$, 有

$$|u|_p \leqslant S_p^{-\frac{1}{2}}\|u\| \leqslant S_p^{-\frac{1}{2}}\|u\|_\lambda, \quad \forall u \in E_\lambda. \tag{2.1}$$

定义能量泛函 $\mathcal{I}_\lambda : E_\lambda \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\lambda(u) = {}& \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (a|\nabla u|^2 + \lambda V(x)u^2)\mathrm{d}x + \frac{b}{4}\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\Big)^2 - \frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^q \mathrm{d}x \\ & - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p \mathrm{d}x, \quad u \in E_\lambda,\end{aligned} \tag{2.2}$$

则通过标准化讨论, 可以看到泛函 $\mathcal{I}_\lambda$ 在每个 $u \in E_\lambda$ 上是定义良好的并且 $\mathcal{I}_\lambda \in C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$. 此外，对于每一个 $\varphi \in E_\lambda$, 有

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{I}_\lambda'(u), \varphi\rangle = {}& a\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u\cdot\nabla\varphi \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} \lambda V(x)u\varphi \mathrm{d}x + b\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u\cdot\nabla\varphi \mathrm{d}x \\ & - \mu\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^{q-2}u\varphi \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p-2}u\varphi \mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.3}$$

通常地，问题 (1.1) 的弱解对应于泛函 $\mathcal{I}_\lambda$ 的临界点.

众所周知， $\mathcal{I}_\lambda$ 在 E_λ 上不是下方有界的．在下面的 Nehari 流形上考虑泛函：

$$\mathcal{N}_\lambda = \{u \in E_\lambda \setminus \{0\} : \langle \mathcal{I}_\lambda'(u), u\rangle = 0\}.$$

因此对于 $u \in \mathcal{N}_\lambda$, 有

$$\|u\|_\lambda^2 + b|\nabla u|_2^4 = \mu\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^q \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} |u|^p \mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

注意到 $\mathcal{N}_\lambda$ 包含方程 (1.1) 的每一个非平凡解.

Nehari 流形 $\mathcal{N}_\lambda$ 与 $t > 0$ 时的 $K_u(t) : t \to \mathcal{I}_\lambda(tu)$ 形式的函数的行为密切相关．该映射被称为纤维映射，它是被 Drábek 和 Pohozaev 在文 [30] 中提出．在文 [31–32] 中也进行了讨论．若 $u \in E_\lambda$, 则有

$$K_u(t) = \mathcal{I}_\lambda(tu) = \frac{1}{2}t^2\|u\|_\lambda^2 + \frac{bt^4}{4}|\nabla u|_2^4 - \frac{\mu t^q}{q}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^q \mathrm{d}x - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p \mathrm{d}x.$$

$$K_u'(t) = t\|u\|_\lambda^2 + bt^3|\nabla u|_2^4 - \mu t^{q-1}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^q \mathrm{d}x - t^{p-1}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p \mathrm{d}x.$$

$$K_u''(t) = \|u\|_\lambda^2 + 3bt^2|\nabla u|_2^4 - \mu(q-1)t^{q-2}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^q \mathrm{d}x - (p-1)t^{p-2}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p \mathrm{d}x.$$

这里可以看到对于 $u\in E_\lambda\backslash\{0\}$ 和 $t>0$, $K_u'(t)=0$ 当且仅当 $tu\in\mathcal{N}_\lambda$, 则 $K_u(t)$ 的正临界点对应于 Nehari 流形上的点. 特别地，$K_u'(1)=0$ 当且仅当 $u\in\mathcal{N}_\lambda$. 因为 $K_u(t)\in C^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, 故可把 $\mathcal{N}_\lambda$ 分成三部分：

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\lambda^+&=\{u\in\mathcal{N}_\lambda:K_u''(1)>0\},\\ \mathcal{N}_\lambda^0&=\{u\in\mathcal{N}_\lambda:K_u''(1)=0\},\\ \mathcal{N}_\lambda^-&=\{u\in\mathcal{N}_\lambda:K_u''(1)<0\}.\end{aligned}$$

对于每一个 $u\in\mathcal{N}_\lambda$, 有

$$\begin{aligned}K_u''(1)&=\|u\|_\lambda^2+3b|\nabla u|_2^4-\mu(q-1)\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u|^q\mathrm{d}x-(p-1)\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x\\ &=K_u''(1)-(q-1)\langle\mathcal{I}_\lambda'(u),u\rangle\\ &=(2-q)\|u\|_\lambda^2+b(4-q)|\nabla u|_2^4-(p-q)\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x \qquad (2.5)\\ &=K_u''(1)-(p-1)\langle\mathcal{I}_\lambda'(u),u\rangle\\ &=(2-p)\|u\|_\lambda^2+b(4-p)|\nabla u|_2^4+\mu(p-q)\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u|^q\mathrm{d}x. \qquad (2.6)\end{aligned}$$

引理 2.1　对于每一个 $\lambda\geqslant1$, 能量泛函 $\mathcal{I}_\lambda$ 是强制的并且在 $\mathcal{N}_\lambda$ 上是下方有界的.

证　根据 Hölder 不等式和 (2.1), 可以推断出

$$\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u|^q\mathrm{d}x\leqslant\Big(\int_{\mathbb{R}^3}|f(x)|^{\frac{p}{p-q}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{p-q}{p}}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{q}{p}}\leqslant|f|_{\frac{p}{p-q}}S_p^{-\frac{q}{2}}\|u\|_\lambda^q. \qquad (2.7)$$

对于 $u\in\mathcal{N}_\lambda$, 结合 (2.7), 有

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\lambda(u)&=\mathcal{I}_\lambda(u)-\frac14\langle\mathcal{I}_\lambda'(u),u\rangle\\ &=\frac14\|u\|_\lambda^2-\mu\Big(\frac1q-\frac14\Big)\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u|^q\mathrm{d}x+\Big(\frac14-\frac1p\Big)\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x\\ &\geqslant\frac14\|u\|_\lambda^2-\mu\Big(\frac1q-\frac14\Big)|f|_{\frac{p}{p-q}}S_p^{-\frac{q}{2}}\|u\|_\lambda^q.\end{aligned}$$

由于 $1<q<2$, $4<p<6$, 很显然可以证实 $\mathcal{I}_\lambda$ 是强制的且在 $\mathcal{N}_\lambda$ 上是下方有界的.

引理 2.2　若 u_0 是 $\mathcal{I}_\lambda$ 在 $\mathcal{N}_\lambda$ 上的一个局部极小化子，$u_0\notin\mathcal{N}_\lambda^0$, 则 $\mathcal{I}_\lambda'(u_0)=0$ 在 E_λ^{-1} 上成立.

证　这里的证明本质上和文 [31] 中的证明基本相同. 为了方便读者，我们给出详细证明.

若 u_0 是 $\mathcal{I}_\lambda$ 在 $\mathcal{N}_\lambda$ 上的局部极小化子，则 u_0 是下列最优化问题的解：

$$\mathcal{I}_\lambda\text{ 在满足 }\mathcal{J}_\lambda(u)=0\text{ 时的最小值,}$$

其中 $\mathcal{J}_\lambda(u)=K_u'(1)=\|u\|_\lambda^2+b|\nabla u|_2^4-\mu\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u|^q\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x$. 注意到 $\mathcal{J}_\lambda'(u)\neq0$, $\mathcal{N}_\lambda$ 是一个局部可微流形. 因此通过拉格朗日乘子法则，存在 $\gamma\in\mathbb{R}$, 使得 $\mathcal{I}_\lambda'(u_0)=\gamma\mathcal{J}_\lambda'(u_0)$, 则有

$$\langle\mathcal{I}_\lambda'(u_0),u_0\rangle=\gamma\langle\mathcal{J}_\lambda'(u_0),u_0\rangle. \qquad (2.8)$$

由于 $u_0\in\mathcal{N}_\lambda$, 我们推断出 $\|u_0\|_\lambda^2+b|\nabla u_0|_2^4-\mu\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u_0|^q\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}|u_0|^p\mathrm{d}x=0$. 那么

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{J}_\lambda'(u_0),u_0\rangle&=2\|u_0\|_\lambda^2+4b|\nabla u_0|_2^4-\mu q\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u_0|^q\mathrm{d}x-p\int_{\mathbb{R}^3}|u_0|^p\mathrm{d}x\\&=\|u_0\|_\lambda^2+3b|\nabla u_0|_2^4-\mu(q-1)\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u_0|^q\mathrm{d}x-(p-1)\int_{\mathbb{R}^3}|u_0|^p\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因而，若 $u_0\notin\mathcal{N}_\lambda^0$, 我们有 $\langle\mathcal{J}_\lambda'(u_0),u_0\rangle\neq0$, 则由 (2.8) 可以推断出 $\gamma=0$. 这样，我们完成了证明.

引理 2.3 假设 (F) 和 (V_1)–(V_3) 成立. 若 $\mu\in(0,\mu_0)$ 和 $\lambda\geqslant1$, 则 $\mathcal{N}_\lambda^0=\emptyset$.

证 假设结论不成立，则存在 $\mu^*\in(0,\mu_0)$ 和 $\lambda^*\geqslant1$, 使得 $\mathcal{N}_\lambda^0\neq\emptyset$. 因此，至少存在一个 $u_0\in\mathcal{N}_\lambda^0\neq\emptyset$ 满足 $K_{u_0}''(1)=0$. 根据 (2.5) 以及 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式，可得

$$\begin{aligned}(2-q)\|u_0\|_{\lambda^*}^2+b(4-q)|\nabla u_0|_2^4&=(p-q)\int_{\mathbb{R}^3}|u_0|^p\mathrm{d}x\\&\leqslant(p-q)S_p^{-\frac{p}{2}}\|u_0\|_{\lambda^*}^p,\end{aligned}\tag{2.9}$$

这意味着

$$(2-q)\|u_0\|_{\lambda^*}^2\leqslant(p-q)S_p^{-\frac{p}{2}}\|u_0\|_{\lambda^*}^p,$$

故有

$$\|u_0\|_{\lambda^*}\geqslant\Big(\frac{(2-q)S_p^{\frac{p}{2}}}{p-q}\Big)^{\frac{1}{p-2}}.\tag{2.10}$$

同样地，利用 (2.6) 以及 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式，有

$$\begin{aligned}(p-2)\|u_0\|_{\lambda^*}^2+b(p-4)|\nabla u_0|_2^4&=\mu^*(p-q)\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u_0|^q\mathrm{d}x\\&\leqslant\mu^*(p-q)|f|_{\frac{p}{p-q}}S_p^{-\frac{q}{2}}\|u_0\|_{\lambda^*}^q,\end{aligned}\tag{2.11}$$

这意味着

$$(p-2)\|u_0\|_{\lambda^*}^2\leqslant\mu^*(p-q)|f|_{\frac{p}{p-q}}S_p^{-\frac{q}{2}}\|u_0\|_{\lambda^*}^q,$$

因此

$$\|u_0\|_{\lambda^*}\leqslant\Big(\frac{\mu^*(p-q)|f|_{\frac{p}{p-q}}}{(p-2)S_p^{\frac{q}{2}}}\Big)^{\frac{1}{2-q}}.\tag{2.12}$$

由 (2.10) 和 (2.12) 可得

$$\mu^*\geqslant\frac{(p-2)S_p^{\frac{q}{2}}}{(p-q)|f|_{\frac{p}{p-q}}}\Big(\frac{(2-q)S_p^{\frac{p}{2}}}{p-q}\Big)^{\frac{2-q}{p-2}}=\mu_0,$$

这与假设矛盾. 证明结束.

根据 (F), 对于 $u\in E_\lambda\setminus\{0\}$, 可以知道 $\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u|^q\mathrm{d}x>0$ 且 $\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x>0$.

引理 2.4 假设 (F) 和 (V_1)–(V_3) 成立. 若 $\lambda\geqslant1$ 和 $0<\mu<\mu_0$, 则存在一个 $t_{b,\max}>0$

以及唯一的 t^+ 和 t^-, 满足 $0 < t^+ < t_{b,\max} < t^-$, 使得 $t^+u \in \mathcal{N}_\lambda^+$, $t^-u \in \mathcal{N}_\lambda^-$ 且有

$$\mathcal{I}_\lambda(t^+u) = \inf_{0 \leqslant t \leqslant t_{b,\max}} \mathcal{I}_\lambda(tu), \quad \mathcal{I}_\lambda(t^-u) = \sup_{t \geqslant t_{b,\max}} \mathcal{I}_\lambda(tu).$$

证 给定一个 $u \in E_\lambda \setminus \{0\}$, 满足 $\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p \mathrm{d}x > 0$.

令 $m_b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$:

$$m_b(t) = t^{2-q}\|u\|_\lambda^2 + bt^{4-q}|\nabla u|_2^4 - t^{p-q}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p \mathrm{d}x.$$

则

$$K_u'(t) = t^{q-1}\Big(m_b(t) - \mu\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^q \mathrm{d}x\Big). \tag{2.13}$$

显然， $tu \in \mathcal{N}_\lambda$ 当且仅当 $m_b(t) = \mu\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^q \mathrm{d}x$, $tu \in \mathcal{N}_\lambda^+$ (或 $\mathcal{N}_\lambda^-$) 当且仅当 $m_b'(t) > 0$ (或 < 0). 我们可以看到 $m_b(t) > 0$ 对于 $t > 0$ 充分小是成立的，且当 $t \to \infty$ 时，有 $m_b(t) \to -\infty$. 此外，

$$m_b'(t) = t^{1-q}\Big((2-q)\|u\|_\lambda^2 + b(4-q)t^2|\nabla u|_2^4 - (p-q)t^{p-2}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p \mathrm{d}x\Big).$$

因为 $\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p \mathrm{d}x > 0$, 那么存在唯一的 $t_{b,\max} > 0$, 使得 $m_b'(t_{b,\max}) = 0$. 显然， $m_b(t)$ 在 $t \in (0, t_{b,\max})$ 上是严格递增的且在 $t \in (t_{b,\max}, \infty)$ 上是严格递减的. 因此，$m_b(t)$ 在 $t_{b,\max}$ 处达到其最大值. 此外

$$t_{0,\max} = \Big(\frac{(2-q)\|u\|_\lambda^2}{(p-q)\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p \mathrm{d}x}\Big)^{\frac{1}{p-2}}.$$

由此可以总结出

$$\begin{aligned} m_0(t_{0,\max}) &= \Big(\frac{(2-q)\|u\|_\lambda^2}{(p-q)\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p \mathrm{d}x}\Big)^{\frac{2-q}{p-2}}\|u\|_\lambda^2 - \Big(\frac{(2-q)\|u\|_\lambda^2}{(p-q)\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p \mathrm{d}x}\Big)^{\frac{p-q}{p-2}}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p \mathrm{d}x \\ &= \|u\|_\lambda^q\Big(\frac{\|u\|_\lambda^p}{\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p \mathrm{d}x}\Big)^{\frac{2-q}{p-2}}\Big(\frac{2-q}{p-q}\Big)^{\frac{2-q}{p-2}} \cdot \frac{p-2}{p-q} \\ &\geqslant \|u\|_\lambda^q\Big(\frac{\|u\|_\lambda^p}{S_p^{-\frac{p}{2}}\|u\|_\lambda^p}\Big)^{\frac{2-q}{p-2}}\Big(\frac{2-q}{p-q}\Big)^{\frac{2-q}{p-2}} \cdot \frac{p-2}{p-q} \\ &= \|u\|_\lambda^q\Big[\frac{(2-q)S_p^{\frac{p}{2}}}{p-q}\Big]^{\frac{2-q}{p-2}}\frac{p-2}{p-q} > 0. \end{aligned}$$

因此，能够得到

$$m_b(t_{b,\max}) \geqslant m_b(t_{0,\max}) > m_0(t_{0,\max}) > 0.$$

由 $0 < \mu < \mu_0$ 可得，

$$\begin{aligned} \mu\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^q \mathrm{d}x &\leqslant \mu\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^{\frac{p}{p-q}} \mathrm{d}x\Big)^{\frac{p-q}{p}}\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p \mathrm{d}x\Big)^{\frac{q}{p}} \\ &\leqslant \mu|f|_{\frac{p}{p-q}}S_p^{-\frac{q}{2}}\|u\|_\lambda^q \\ &< \|u\|_\lambda^q\Big[\frac{(2-q)S_p^{\frac{p}{2}}}{p-q}\Big]^{\frac{2-q}{p-2}} \cdot \frac{p-2}{p-q} \\ &\leqslant m_0(t_{0,\max}) < m_b(t_{b,\max}). \end{aligned} \tag{2.14}$$

因为 $\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^q \mathrm{d}x > 0$, 结合 (2.13) 和 (2.14), 我们知道存在唯一的 t^+ 和 t^-, 满足 $0 < t^+ < t_{b,\max} < t^-$, 使得 $K_u'(t^+) = 0$, $K_u'(t^-) = 0$, 也即 t^+u, $t^-u \in \mathcal{N}_\lambda$.

根据 $K_u''(t) = t^{q-1}m_b'(t)$ 和 $m_b'(t^+) > 0 > m_b'(t^-)$, 可得 $t^+u \in \mathcal{N}_\lambda^+$, $t^-u \in \mathcal{N}_\lambda^-$ 以及

$$\mathcal{I}_\lambda(t^+u) = \inf_{0\leqslant t\leqslant t_{b,\max}} \mathcal{I}_\lambda(tu), \quad \mathcal{I}_\lambda(t^-u) = \sup_{t\geqslant t_{b,\max}} \mathcal{I}_\lambda(tu).$$

根据引理 2.4, 我们发现 $\mathcal{N}_\lambda^+$ 和 $\mathcal{N}_\lambda^-$ 是非空的. 结合引理 2.1, 定义

$$c_\lambda^+ = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^+} \mathcal{I}_\lambda(u), \quad c_\lambda^- = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^-} \mathcal{I}_\lambda(u).$$

引理 2.5 如果 $\lambda \geqslant 1$ 和 $0 < \mu < \mu_0$, 那么有 $c_\lambda^+ < 0$.

证 对于 $u \in \mathcal{N}_\lambda^+$, $K_u''(1) > 0$. 从 (2.6) 可得

$$\mu(p-q)\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^q \mathrm{d}x > (p-2)\|u\|_\lambda^2 + b(p-4)|\nabla u|_2^4.$$

那么

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_\lambda(u) &= \mathcal{I}_\lambda(u) - \frac{1}{p}\langle \mathcal{I}_\lambda'(u), u\rangle \\
&= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\Big)\|u\|_\lambda^2 + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{p}\Big)b|\nabla u|_2^4 - \mu\Big(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\Big)\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^q \mathrm{d}x \\
&< \frac{p-2}{2p}\|u\|_\lambda^2 + \frac{p-4}{4p}b|\nabla u|_2^4 - \frac{1}{pq}[(p-2)\|u\|_\lambda^2 + (p-4)b|\nabla u|_2^4] \\
&= \frac{(p-2)(q-2)}{2pq}\|u\|_\lambda^2 + \frac{(p-4)(q-4)}{4pq}b|\nabla u|_2^4 < 0.
\end{aligned}$$

因此 $c_\lambda^+ < 0$.

引理 2.6 若 $0 < \mu < \mu_0$, 则 $\mathcal{N}_\lambda^-$ 在 E_λ 上是闭的.

证 令 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda^-$, 使得在 E_λ 上有 $u_n \to u$. 接下来我们需要证明的是 $u \in \mathcal{N}_\lambda^-$. 我们知道 $\langle \mathcal{I}_\lambda'(u_n), u_n\rangle = 0$, 且当 $n \to \infty$ 时，有

$$\langle \mathcal{I}_\lambda'(u_n), u_n\rangle - \langle \mathcal{I}_\lambda'(u), u\rangle = \langle \mathcal{I}_\lambda'(u_n) - \mathcal{I}_\lambda'(u), u\rangle + \langle \mathcal{I}_\lambda'(u_n), u_n - u\rangle \to 0,$$

这样就可以得到 $\langle \mathcal{I}_\lambda'(u), u\rangle = 0$, 这表明 $u \in \mathcal{N}_\lambda$.

对于 $u \in \mathcal{N}_\lambda^-$, 根据 (2.5) 和类似于 (2.10) 的证明，就有

$$\|u\|_\lambda > \Big(\frac{(2-q)S_p^{\frac{p}{2}}}{p-q}\Big)^{\frac{1}{p-2}}. \tag{2.15}$$

那么可以知道 $\mathcal{N}_\lambda^-$ 是远离 0 点的.

由 (2.5) 可得 $K_{u_n}''(1) \to K_u''(1)$. 注意到 $K_{u_n}''(1) < 0$, 故有 $K_u''(1) \leqslant 0$. 根据引理 2.3, 对于 $0 < \mu < \mu_0$, 可以推断出 $K_u''(1) < 0$. 因此 $u \in \mathcal{N}_\lambda^-$.

注 2.1 根据引理 2.4, 我们知道泛函 $\mathcal{I}_\lambda$ 在 $\mathcal{N}_\lambda$ 上的下确界有下面的极小极大特征:

$$c_\lambda = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda} \mathcal{I}_\lambda(u) = \inf_{E_\lambda\setminus\{0\}} \max_{t>0} \mathcal{I}_\lambda(tu).$$

选择 $e_0 \in C_0^\infty(\Omega)$, 很容易知道这里存在一个不依赖于 λ 的常数 $C_0 > 0$, 使得

$$c_\lambda = \inf_{E_\lambda \backslash \{0\}} \max_{t>0} \mathcal{I}_\lambda(tu) \leqslant \max_{t>0} \mathcal{I}_\lambda(te_0) \leqslant C_0. \tag{2.16}$$

§3 定理 1.1 的证明

参考文 [17, 33–34], 显然有以下的结果，为了方便读者，这里将详细叙述.

引理 3.1 若 $0 < \mu < \mu_0$, 则对于每一个 $u \in \mathcal{N}_\lambda^+$, 都存在 $\varepsilon > 0$ 和一个可微函数 $\phi^+ : B_\varepsilon(0) \to \mathbb{R}^+ : (0, +\infty)$, 使得

$$\phi^+(0) = 1, \quad \phi^+(w)(u-w) \in \mathcal{N}_\lambda^+, \quad \forall w \in B_\varepsilon(0)$$

以及

$$\langle (\phi^+)'(0), w \rangle = \frac{L(u,w)}{K_u''(1)},$$

其中

$$\begin{aligned} L(u,w) = {} & 2\langle u, w\rangle_\lambda + 4b \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \cdot \nabla w \mathrm{d}x \\ & - \mu q \int_{\mathbb{R}^3} f(x) |u|^{q-2} u w \mathrm{d}x - p \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p-2} u w \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

此外，对于任意 $C_1, C_2 > 0$, 存在 $C > 0$, 使得如果 $C_1 \leqslant \|u\|_\lambda \leqslant C_2$, 则 $|\langle (\phi^+)'(0), w\rangle| \leqslant C\|w\|_\lambda$.

证　通过 $F(t,w) = K'_{u-w}(t)$ 定义一个 C^1 映射 $F : \mathbb{R}^+ \times E_\lambda \to \mathbb{R}$, 也即

$$\begin{aligned} F(t,w) = {} & t\|u-w\|_\lambda^2 + bt^3 \Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(u-w)|^2 \mathrm{d}x \Big)^2 \\ & - \mu t^{q-1} \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\, |u-w|^q \,\mathrm{d}x - t^{p-1} \int_{\mathbb{R}^3} |u-w|^p \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

很容易看出 F 是可微的. 因为 $u \in \mathcal{N}_\lambda^+$, 则 $F(1,0) = 0$ 和 $F_t(1,0) = K_u''(1) > 0$. 在点 (1,0) 处应用隐函数定理，可以得到存在 $\varepsilon > 0$ 和一个可微函数 $\phi^+ : B_\varepsilon(0) \to \mathbb{R}^+ : (0, +\infty)$, 使得

$$\phi^+(0) = 1, \quad F(\phi^+(w), w) = 0, \quad \forall w \in B_\varepsilon(0),$$

这等价于 $\phi^+(w)(u-w) \in \mathcal{N}_\lambda, \forall w \in B_\varepsilon(0)$. 事实上，因为 $u \in \mathcal{N}_\lambda^+$ 且集合 $\mathcal{N}_\lambda^- \cup \mathcal{N}_\lambda^0$ 是闭的，可以推断出 $\mathrm{dist}(u, \mathcal{N}_\lambda^- \cup \mathcal{N}_\lambda^0) > 0$. 注意到 $\phi^+(w)(u-w)$ 关于 w 是连续的，选择充分小的 $\varepsilon = \varepsilon(u) > 0$, 使得

$$\|\phi^+(w)(u-w) - u\| < \frac{1}{2} \mathrm{dist}(u, \mathcal{N}_\lambda^- \cup \mathcal{N}_\lambda^0), \quad \forall w \in B_\varepsilon(0).$$

因此

$$\begin{aligned} \|\phi^+(w)(u-w) - \mathcal{N}_\lambda^- \cup \mathcal{N}_\lambda^0\| & \geqslant \mathrm{dist}(u, \mathcal{N}_\lambda^- \cup \mathcal{N}_\lambda^0) - \mathrm{dist}(\phi^+(w)(u-w), u) \\ & > \frac{1}{2} \mathrm{dist}(u, \mathcal{N}_\lambda^- \cup \mathcal{N}_\lambda^0) > 0, \end{aligned}$$

那么对于所有的 $w \in B_\varepsilon(0)$ 都有 $\phi^+(w)(u-w) \in \mathcal{N}_\lambda^+$.

根据隐函数定理的可微性，可得

$$\langle (\phi^{\pm})'(0), w\rangle = -\frac{\langle F_w(1,0), w\rangle}{F_t(1,0)},$$

其中 $L(u,w) = -\langle F_w(1,0), w\rangle$ 且 $K_u''(1) = F_t(1,0)$. 因此我们需要证明 $\langle (\phi^{\pm})'(0), w\rangle = \dfrac{L(u,w)}{K_u''(1)}$.

接下来证明对于所有的 $C_1, C_2 > 0$, 如果 $C_1 \leqslant \|u\|_\lambda \leqslant C_2$, $u \in \mathcal{N}_\lambda^+$, 则存在 $\delta > 0$, 使得 $K_u''(1) \geqslant \delta > 0$.

我们将通过反证法证明这一结论. 如果存在一个序列 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda^+$, 满足 $C_1 \leqslant \|u_n\|_\lambda \leqslant C_2$, 使得对于充分小的 δ_n, 有 $K_{u_n}''(1) < \delta_n$ 以及当 $n \to \infty$ 时，有 $\delta_n \to 0$.

由 (2.5) 可得

$$(2-q)\|u_n\|_\lambda^2 + b(4-q)\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x\Big)^2 = (p-q)\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^p \mathrm{d}x + o(\delta_n),$$

其中当 $n \to \infty$ 时， $o(\delta_n) \to 0$.

根据 $1 < q < 2$, $4 < p < 6$, $C_1 \leqslant \|u_n\|_\lambda \leqslant C_2$ 和 (2.9), 有

$$(2-q)\|u_n\|_\lambda^2 \leqslant (p-q) S_p^{-\frac{p}{2}} \|u_n\|_\lambda^p + o(\delta_n),$$

因此有

$$\|u_n\|_\lambda \geqslant \Big(\frac{(2-q)S_p^{\frac{p}{2}}}{p-q}\Big)^{\frac{1}{p-2}} + o(\delta_n). \tag{3.1}$$

由 (2.6) 可得

$$(p-2)\|u_n\|_\lambda^2 + b(p-4)\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x\Big)^2 = \mu(p-q)\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u_n|^q \mathrm{d}x + o(\delta_n).$$

从 (2.11) 可知

$$(p-2)\|u_n\|_\lambda^2 \leqslant \mu(p-q)|f|_{\frac{p}{p-q}} S_p^{-\frac{q}{2}} \|u_n\|_\lambda^q + o(\delta_n),$$

这意味着

$$\|u_n\|_\lambda \leqslant \Big(\frac{\mu(p-q)|f|_{\frac{p}{p-q}}}{(p-2)S_p^{\frac{q}{2}}}\Big)^{\frac{1}{2-q}} + o(\delta_n). \tag{3.2}$$

当 $n \to \infty$ 时结合 (3.1) 和 (3.2) 可以推出矛盾. 因而，若 $C_1 \leqslant \|u\|_\lambda \leqslant C_2$, 则存在 $C > 0$, 使得 $|\langle (\phi^+)'(0), w\rangle| \leqslant C\|w\|_\lambda$.

同样地，对于每一个 $u \in \mathcal{N}_\lambda^-$, 可以构造一个可微函数 ϕ^-, 得到类似于引理 3.1 的结论.

应用与文 [17, 34] 中类似的讨论，结合引理 2.1, 引理 2.5, 引理 3.1 和 Ekeland 变分原理 [35], 我们有下面的结论.

引理 3.2 假设 (F) 和 (V_1)–(V_3) 成立，并且有 $1 < q < 2$, $4 < p < 6$. 若 $0 < \mu < \mu_0$, 则存在极小化序列 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda^+$ 和 $\{v_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda^-$, 使得

$$\mathcal{I}_\lambda(u_n) = c_\lambda^+ + o(1), \quad \mathcal{I}_\lambda'(u_n) = o(1) \ \text{ 在 } E_\lambda^{-1} \text{ 成立.}$$

$$\mathcal{I}_\lambda(v_n) = c_\lambda^- + o(1), \quad \mathcal{I}_\lambda'(v_n) = o(1) \ \text{ 在 } E_\lambda^{-1} \text{ 成立.}$$

证　下面证明极小化序列 $\{u_n\}\subset\mathcal{N}_\lambda^+$ 是 E_λ 上的一个 $(PS)_{c_\lambda^+}$ 序列. 应用引理 2.1 和在 $\mathcal{N}_\lambda^+\cup\mathcal{N}_\lambda^0$ 上的 Ekeland 变分原理，存在一个极小化序列 $\{u_n\}\subset\mathcal{N}_\lambda^+\cup\mathcal{N}_\lambda^0$, 使得

$$\inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^+\cup\mathcal{N}_\lambda^0}\mathcal{I}_\lambda(u)\leqslant\mathcal{I}_\lambda(u_n)<\inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^+\cup\mathcal{N}_\lambda^0}\mathcal{I}_\lambda(u)+\frac{1}{n},\tag{3.3}$$

$$\mathcal{I}_\lambda(v)\geqslant\mathcal{I}_\lambda(u_n)-\frac{1}{n}\|v-u_n\|,\quad\forall v\in\mathcal{N}_\lambda^+\cup\mathcal{N}_\lambda^0.\tag{3.4}$$

由于 $\mathcal{N}_\lambda^0=\emptyset$, 故有 $\inf\limits_{u\in\mathcal{N}_\lambda^+\cup\mathcal{N}_\lambda^0}\mathcal{I}_\lambda(u)=\inf\limits_{u\in\mathcal{N}_\lambda^+}\mathcal{I}_\lambda(u)=c_\lambda^+$. 因此可以假设 $\{u_n\}\subset\mathcal{N}_\lambda^+$, $\mathcal{I}_\lambda(u_n)\to c_\lambda^+<0$.

为了完成证明，只需要证明 $\mathcal{I}_\lambda'(u_n)\to 0$. 由引理 3.1, 因为 $0<\mu<\mu_0$, 故可找到 $\varepsilon_n>0$ 和一个可微函数 $\phi_n^+:B_{\varepsilon_n}(0)\to\mathbb{R}^+$, 使得

$$\phi_n^+(w)(u_n-w)\in\mathcal{N}_\lambda^+,\quad\forall w\in B_{\varepsilon_n}(0).$$

根据 $\phi_n^+(w)$ 的连续性和 $\phi_n^+(0)=1$, 不失一般性，我们可以假设 ε_n 足够小，使得对于 $\|w\|_\lambda<\varepsilon_n$, 有 $\frac{1}{2}\leqslant\phi_n^+(w)\leqslant\frac{3}{2}$. 由 $\phi_n^+(w)(u_n-w)\in\mathcal{N}_\lambda^+$ 和 (3.4) 能够推断出

$$\mathcal{I}_\lambda(\phi_n^+(w)(u_n-w))-\mathcal{I}_\lambda(u_n)\geqslant-\frac{1}{n}\|\phi_n^+(w)(u_n-w)-u_n\|,$$

再利用中值定理，可得

$$\langle\mathcal{I}_\lambda'(u_n),\phi_n^+(w)(u_n-w)-u_n\rangle+o(\phi_n^+(w)(u_n-w)-u_n)\geqslant-\frac{1}{n}\|\phi_n^+(w)(u_n-w)-u_n\|.$$

因此

$$\begin{aligned}&\phi_n^+(w)\langle\mathcal{I}_\lambda'(u_n),w\rangle+(1-\phi_n^+(w))\langle\mathcal{I}_\lambda'(u_n),u_n\rangle\\ \leqslant&\frac{1}{n}\|(\phi_n^+(w)-1)u_n-\phi_n^+(w)w\|+o(\phi_n^+(w)(u_n-w)-u_n).\end{aligned}$$

通过选择 ε_n 和 $\frac{1}{2}\leqslant\phi_n^+(w)\leqslant\frac{3}{2}$, 可以推断出这里存在 $C_3>0$, 使得

$$|\langle\mathcal{I}_\lambda'(u_n),w\rangle|\leqslant\frac{1}{n}\|\langle(\phi^+)'(0),w\rangle u_n\|+\frac{C_3}{n}\|w\|_\lambda+o(|\langle(\phi^+)'(0),w\rangle|(\|u_n\|_\lambda+\|w\|_\lambda)).$$

对于 $\{u_n\}\subset\mathcal{N}_\lambda^+$, 我们证明 $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\|u_n\|_\lambda\geqslant C_1>0$, 其中 C_1 是一个常数. 否则，$\mathcal{I}_\lambda(u_n)$ 会趋于 0, 这与 $\mathcal{I}_\lambda(u_n)\to c_\lambda^+<0$ 矛盾. 此外，利用引理 2.1 可以得到 $\{u_n\}$ 在 E_λ 上是有界的. 因此，存在 $C_1,C_2>0$, 使得

$$0<C_1\leqslant\|u_n\|_\lambda\leqslant C_2.\tag{3.5}$$

根据引理 3.1, 则有

$$|\langle\mathcal{I}_\lambda'(u_n),w\rangle|\leqslant\frac{C}{n}\|w\|_\lambda+\frac{C}{n}\|w\|_\lambda+o(\|w\|_\lambda),$$

$$\|\mathcal{I}_\lambda'(u_n)\|=\sup_{w\in E_\lambda\setminus\{0\}}\frac{|\langle\mathcal{I}_\lambda'(u_n),w\rangle|}{\|w\|_\lambda}\leqslant\frac{C}{n}+o(1).$$

那么，当 $n\to\infty$ 时，有 $\|\mathcal{I}_\lambda'(u_n)\|\to 0$. 这样 $\{u_n\}\subset\mathcal{N}_\lambda^+$ 是 E_λ 上的一个 $(PS)_{c_\lambda^+}$ 序列. 同样地，我们可以在 E_λ 上构造 $(PS)_{c_\lambda^-}$ 序列，这里不再赘述.

下面我们总结出 $\mathcal{I}_\lambda$ 在 $\mathcal{N}_\lambda$ 上满足 $(PS)_{c_\lambda^+}$ 条件，$(PS)_{c_\lambda^-}$ 条件也可以用同样的方法得到.

引理 3.3 假设 (F) 和 (V_1)–(V_3) 成立，若 $4<p<6$ 和 $\lambda \geqslant 1$, 则存在 $\Lambda>0$, 使得对于所有的 $\lambda>\Lambda$, $\mathcal{I}_\lambda$ 满足 $(PS)_{c_\lambda^+}$- 条件.

证 令 $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda^+$ 为 $\mathcal{I}_\lambda$ 的一个 $(PS)_{c_\lambda^+}$ 序列. 对于充分大的 n, 有

$$
\begin{aligned}
c_\lambda^+ + o(1) &= \mathcal{I}_\lambda(u_n) - \frac{1}{p}\langle \mathcal{I}_\lambda'(u_n), u_n\rangle \\
&= \Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\Big)\|u_n\|_\lambda^2 + \Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{p}\Big)b|\nabla u_n|_2^4 - \mu\Big(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\Big)\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u_n|^q \mathrm{d}x \\
&\geqslant \Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\Big)\|u_n\|_\lambda^2 - \mu\Big(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\Big)|f|_{\frac{p}{p-q}} S_p^{-\frac{q}{2}}\|u_n\|_\lambda^q.
\end{aligned}
$$

当 $n\to\infty$ 时取上极限，由 (2.16) 可知，存在一个常数 $M>0$ (不依赖于 λ), 使得 $\limsup\limits_{n\to\infty}\|u_n\|_\lambda \leqslant M$. 因此， $\{u_n\}$ 在 E_λ 上是有界的. 这时可以取一个子序列，假设存在 $\{u_n\}$ 以及 $u\in E_\lambda$, 使得

$$
\text{在 } E_\lambda \text{ 中, 当 } u_n \rightharpoonup u, \quad \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x \to A^2, \quad \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x \leqslant A^2, \quad A\in\mathbb{R}.
$$

那么， $\mathcal{I}_\lambda'(u_n)\to 0$ 表明

$$
\begin{aligned}
&(a+bA^2)\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}\lambda V(x)uv\mathrm{d}x \\
&-\mu\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^{q-2}uv\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}|u|^{p-2}uv\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

在 (3.6) 中取 $v=u$, 可得

$$
(a+bA^2)\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}\lambda V(x)u^2\mathrm{d}x - \mu\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^q\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x = 0. \tag{3.7}
$$

现在我们证明在 E_λ 上有 $u_n\to u$. 一般地，令 $v_n=u_n-u$, 可以证明得到

$$
\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|v_n|^q\mathrm{d}x \to 0. \tag{3.8}
$$

事实上，因为 $v_n \rightharpoonup 0$ 在 E_λ 中成立，并且 $E_\lambda \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$, 由 $f\in L^{\frac{p}{p-q}}(\mathbb{R}^3)$ 可以推出 (3.8).

根据 u_n 的有界性可得

$$
\|u\|_\lambda \leqslant \liminf_{n\to\infty}\|u_n\|_\lambda \leqslant M
$$

以及

$$
\|v_n\|_\lambda = \|u_n-u\|_\lambda \leqslant \|u_n\|_\lambda + \|u\|_\lambda,
$$

故有

$$
\limsup_{n\to\infty}\|v_n\|_\lambda \leqslant \limsup_{n\to\infty}\|u_n\|_\lambda + M \leqslant 2M. \tag{3.9}
$$

由 (V_2) 可知

$$
\int_{\mathbb{R}^3} v_n^2\mathrm{d}x = \int_{\{V\geqslant b\}} v_n^2\mathrm{d}x + \int_{\{V<b\}} v_n^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\lambda b}\|v_n\|_\lambda^2 + o(1).
$$

由 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}|v_n|^p\mathrm{d}x &\leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}^3}|v_n|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{6-p}{4}}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}|v_n|^6\mathrm{d}x\Big)^{\frac{p-2}{4}}\\ &\leqslant \Big(\frac{\|v_n\|_\lambda^2}{\lambda b}\Big)^{\frac{6-p}{4}} d_0\Big(\Big(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x\Big)^3\Big)^{\frac{p-2}{4}}+o(1)\\ &\leqslant (\lambda b)^{\frac{p-6}{4}}d_0\|v_n\|_\lambda^p+o(1),\end{aligned}\tag{3.10}$$

其中常数 $d_0>0$ 是不依赖于 λ 的．由 (3.7) 和 (3.8) 可知

$$\begin{aligned}o(1)&=\langle\mathcal{I}'_\lambda(u_n),u_n\rangle\\ &=\|u_n\|_\lambda^2+b|\nabla u_n|_2^4-\mu\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u_n|^q\mathrm{d}x-|u_n|_p^p-\|u\|_\lambda^2-bA^2|\nabla u|_2^2\\ &\quad+\mu\int_{\mathbb{R}^3}f(x)|u|^q\mathrm{d}x+|u|_p^p\\ &=\|v_n\|_\lambda^2-|v_n|_p^p+bA^4-bA^2|\nabla u|_2^2+o(1)\\ &\geqslant\|v_n\|_\lambda^2-|v_n|_p^{p-2}\cdot|v_n|_p^2+o(1).\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时取上极限并结合 (2.1), (3.9) 和 (3.10), 可得

$$\begin{aligned}0&\geqslant\limsup_{n\to\infty}(\|v_n\|_\lambda^2-|v_n|_p^{p-2}\cdot|v_n|_p^2)\\ &\geqslant\limsup_{n\to\infty}[\|v_n\|_\lambda^2-S_p^{\frac{2-p}{2}}\|v_n\|_\lambda^{p-2}\cdot(\lambda b)^{\frac{p-6}{2p}}d_0^{\frac{2}{p}}\|v_n\|_\lambda^2]\\ &\geqslant\limsup_{n\to\infty}[1-S_p^{\frac{2-p}{2}}\cdot(\lambda b)^{\frac{p-6}{2p}}d_0^{\frac{2}{p}}\|v_n\|_\lambda^{p-2}]\|v_n\|_\lambda^2,\end{aligned}$$

存在 $\Lambda>0$, 使得 $1-S_p^{\frac{2-p}{2}}\cdot(\lambda b)^{\frac{p-6}{2p}}d_0^{\frac{2}{p}}\|v_n\|_\lambda^{p-2}\geqslant 0$ 对于所有的 $\lambda>\Lambda$ 都成立，则可以假设这里存在一个子序列 (仍然用 $\{v_n\}$ 表示), 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|v_n\|_\lambda=a_\lambda$. 故有

$$\begin{aligned}0&\geqslant a_\lambda^2\cdot\limsup_{n\to\infty}[1-S_p^{\frac{2-p}{2}}\cdot(\lambda b)^{\frac{p-6}{2p}}d_0^{\frac{2}{p}}\|v_n\|_\lambda^{p-2}]\\ &=a_\lambda^2\cdot[1-\liminf_{n\to\infty}(S_p^{\frac{2-p}{2}}\cdot(\lambda b)^{\frac{p-6}{2p}}d_0^{\frac{2}{p}}\|v_n\|_\lambda^{p-2})]\\ &\geqslant a_\lambda^2\cdot[1-S_p^{\frac{2-p}{2}}\cdot(\lambda b)^{\frac{p-6}{2p}}d_0^{\frac{2}{p}}(2M)^{p-2}].\end{aligned}$$

因此，存在 $\Lambda>0$, 使得对于所有的 $\lambda>\Lambda$, 都有 $v_n\to 0$ 在 E_λ 中成立．这就完成了证明．

定理 1.1 的证明　首先，考虑最小化问题

$$c_\lambda^+=\inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^+}\mathcal{I}_\lambda(u).$$

根据引理 3.2, 如果 $0<\mu<\mu_0$, 则存在极小化序列 $\{u_n\}\subset\mathcal{N}_\lambda^+$, 使得 $\mathcal{I}_\lambda(u_n)\to c_\lambda^+$ 并且有 $\mathcal{I}'_\lambda(u_n)\to 0$ 在 E_λ^{-1} 上成立．根据引理 3.2 的证明可知，存在 $C_1,C_2>0$, 使得

$$0<C_1\leqslant\|u_n\|_\lambda\leqslant C_2.\tag{3.11}$$

由引理 3.3, 这里存在 $\{u_n\}$ 的一个强收敛的子序列，仍然表示为 $\{u_n\}$, 在 E_λ 中满足 $u_n\to u_*$. 从 (3.11) 中可知 $0<C_1\leqslant\|u_*\|_\lambda\leqslant C_2$. 这样我们就完成了 $u_*\neq 0$ 的证明．接下来证明 $u_*\in\mathcal{N}_\lambda^+$. 实际上，根据 (2.5) 可得 $K''_{u_n}(1)\to K''_{u_*}(1)$. 由 $K''_{u_n}(1)>0$, 我们有

$K''_{u_*}(1) \geqslant 0$. 由引理 2.3 可知 $K''_{u_*}(1) > 0$. 因此

$$u_* \in \mathcal{N}_\lambda^+, \quad \mathcal{I}_\lambda(u_*) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_\lambda(u_n) = \inf_{u\in\mathcal{N}_\lambda^+} \mathcal{I}_\lambda(u).$$

特别地， u_* 是通过引理 2.2 得到的方程 (1.1) 的一个非平凡解. 我们回忆起在文 [17, 36] 中提到 $\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla|u||^2\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2\mathrm{d}x$, 因而 $\mathcal{I}_\lambda(u_*) = \mathcal{I}_\lambda(|u_*|)$ 且 $|u_*| \in \mathcal{N}_\lambda^+$, 那么 $|u_*|$ 是 $\mathcal{I}_\lambda$ 在 $\mathcal{N}_\lambda^+$ 上的局部极小值. 因此， $|u_*|$ 是通过引理 2.2 得到的方程 (1.1) 的一个非平凡解. 我们可以直接假设 $u_* \geqslant 0$ 对于 $\mathbb{R}^3$ 中的几乎每一个 x 都成立. 此外，根据弱解的强极大值原理 [37] 可以推断出 $u_* > 0$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中成立. 因此， u_* 是方程 (1.1) 的一个正解.

其次，我们考虑极小化问题 $c_\lambda^- = \inf\limits_{u\in\mathcal{N}_\lambda^-} \mathcal{I}_\lambda(u)$. 根据引理 3.2, 如果 $0 < \mu < \mu_0$, 则存在极小化序列 $\{v_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda^-$, 使得 $\mathcal{I}_\lambda(v_n) \to c_\lambda^-$ 以及 $\mathcal{I}'_\lambda(v_n) \to 0$ 在 E_λ^{-1} 中成立. 由 (2.15) 和引理 2.1 可得，存在 $C_1, C_2 > 0$, 使得 $0 < C_1 \leqslant \|v_n\|_\lambda \leqslant C_2$. 那么遵循和上面的证明相同的过程，我们也可以找到一个正解 $u_{**} \in \mathcal{N}_\lambda^-$.

综上所述，如果 $0 < \mu < \mu_0$ 和 $\lambda > \Lambda$, 则方程 (1.1) 至少有两个正解 $u_* \in \mathcal{N}_\lambda^+$ 和 $u_{**} \in \mathcal{N}_\lambda^-$.

令

$$\mathcal{S} := \{u \in E_\lambda \setminus \{0\} : \mathcal{I}'_\lambda(u) = 0\}.$$

显然， $\mathcal{S}$ 不是一个空集.

接下来证明 $\mathcal{I}_\lambda$ 在 $\mathcal{S}$ 上是下方有界的. 事实上，对于每一个 $u \in \mathcal{S}$, 由 (2.1), Hölder 不等式和 Young 不等式，有

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_\lambda(u) &= \mathcal{I}_\lambda(u) - \frac{1}{p}\langle \mathcal{I}'_\lambda(u), u\rangle \\
&= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\Big)\|u\|_\lambda^2 + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{p}\Big) b|\nabla u|_2^4 - \mu\Big(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\Big)\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u|^q\mathrm{d}x \\
&\geqslant \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\Big)\|u\|_\lambda^2 - \mu\Big(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\Big)|f|_{\frac{p}{p-q}} S_p^{-\frac{q}{2}}\|u\|_\lambda^q \\
&\geqslant \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\Big)\|u\|_\lambda^2 - \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\Big)\|u\|_\lambda^2 - Q_0 \\
&= -Q_0,
\end{aligned}$$

其中 Q_0 是一个取决于 p, q, S_p 和 $|f|_{\frac{p}{p-q}}$ 的正常数. 因此，$\mathcal{I}_\lambda(u)$ 在 $\mathcal{S}$ 上是下方有界的. 从而可以定义

$$m := \inf_{u\in\mathcal{S}} \mathcal{I}_\lambda(u),$$

且 $m > -\infty$. 显然 $m \leqslant c_\lambda^+ < 0$ 且 $m \leqslant c_\lambda^-$.

令 $\{u_n\} \subset \mathcal{S}$ 为 $\mathcal{I}_\lambda(u)$ 的一个极小化序列，也即

$$\mathcal{I}'_\lambda(u_n) = 0, \quad \mathcal{I}_\lambda(u_n) \to m.$$

根据引理 2.1 很容易得到 $\{u_n\}$ 在 E_λ 上是有界的. 利用引理 3.3 前面的讨论，不失一般性，取一个子序列仍然表示为 $\{u_n\}$, 使得 $u_n \to u_*$, 其中 $u_* \in E_\lambda \setminus \{0\}$. 因此 $\mathcal{I}'_\lambda(u_*) = 0$ 且 $\mathcal{I}_\lambda(u_*) = m$, 也就是说， u_* 是问题 (1.1) 的一个基态解. 现在来证明 $u_* \in \mathcal{N}_\lambda^+$. 相反

地，假设 $u_* \in \mathcal{N}_\lambda^-$ ($\mathcal{N}_\lambda^0 = \emptyset$ 对于 $\mu \in (0, \mu_0)$ 成立). 根据引理 2.4, 存在唯一的 t^+ 和 t^-, 满足 $0 < t^+ < t_{b,\max} < t^- = 1$, 使得 $t^+ u_* \in \mathcal{N}_\lambda^+$, $t^- u_* \in \mathcal{N}_\lambda^-$ 以及

$$\mathcal{I}_\lambda(t^+ u_*) < \mathcal{I}_\lambda(t^- u_*) = \mathcal{I}_\lambda(u_*) = m,$$

这产生了矛盾. 因此 $\mathcal{I}_\lambda(u_*) = m = c_\lambda^+$ 且 $u_* \in \mathcal{N}_\lambda^+$. 显然, u_* 是问题 (1.1) 的一个非平凡非负基态解. 根据强极大值原理 [37] 得到 $u_* > 0$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中成立. 证毕.

§4　解的集中性

在这一节，我们研究问题 (1.1) 的解的集中性并给出定理 1.2 的证明.

通过定理 1.1 可知, 如果 (F) 和 (V_1)–(V_3) 成立, 则存在 $\Lambda > 0$, 使得对于所有的 $\lambda > \Lambda$ 和任意的 $0 < \mu < \mu_0$, 问题 (1.1) 至少有两个正解 $u_\lambda^* \in \mathcal{N}_\lambda^+$ 和 $u_\lambda^{**} \in \mathcal{N}_\lambda^-$. 因为 u_λ^* 和 u_λ^{**} 的证明是类似的，这里只给出 u_λ^* 的证明.

定理 1.2 的证明　令 $\lambda_n \to \infty$ 和 $u_n^* := u_{\lambda_n}^* \in \mathcal{N}_{\lambda_n}^+$ 是定理 1.1 得到的问题 (1.1) 的解. 从引理 2.1 和 (2.16) 中推断出

$$\begin{aligned} C_0 \geqslant c_{\lambda_n}^+ &= \mathcal{I}_{\lambda_n}(u_n^*) \\ &= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\Big)\|u_n^*\|_{\lambda_n}^2 + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{p}\Big) b |\nabla u_n^*|_2^4 - \mu\Big(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\Big) \int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u_n^*|^q \mathrm{d}x \\ &\geqslant \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\Big)\|u_n^*\|_{\lambda_n}^2 - \mu\Big(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\Big)|f|_{\frac{p}{p-q}} S_p^{-\frac{q}{2}} \|u_n^*\|_{\lambda_n}^q, \end{aligned} \tag{4.1}$$

则 $\{u_n^*\}$ 在 E_{λ_n} 上是有界的，即存在一个常数 $M_0 > 0$, 使得

$$\sup_{n \geqslant 1} \|u_n^*\|_{\lambda_n} \leqslant M_0, \tag{4.2}$$

其中常数 M_0 不依赖于 λ_n. 那么，取一个子序列，可以假设存在一个 $u_0^* \in E$, 使得

$$\begin{cases} u_n^* \rightharpoonup u_0^* \ \ \text{在 } E \text{ 中弱收敛}, \\ u_n^* \to u_0^* \ \ \text{在 } L_{\mathrm{loc}}^s(\mathbb{R}^3) \text{ 中强收敛}, \ 2 \leqslant s < 6, \\ u_n^*(x) \to u_0^*(x) \ \ \text{在 } \mathbb{R}^3 \text{ 中几乎处处收敛}. \end{cases} \tag{4.3}$$

依据法图引理和 (4.2), 可得

$$\int_{\mathbb{R}^3} V(x)(u_0^*)^2 \mathrm{d}x \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} V(x)(u_n^*)^2 \mathrm{d}x \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{\|u_n^*\|_{\lambda_n}^2}{\lambda_n} = 0, \tag{4.4}$$

因此 $u_0^* = 0$ 在 $\mathbb{R}^3 \setminus V^{-1}(0)$ 上几乎处处成立. 此外，由 (V_3) 可得 $u_0^* \in H_0^1(\Omega)$.

接下来，我们将证明对于 $2 < s < 6$, 都有 $u_n^* \to u_0^*$ 在 $L^s(\mathbb{R}^3)$ 中成立. 否则，通过 Lions 引理 [38], 存在 $\sigma > 0$, $r > 0$ 和 $y_n \in \mathbb{R}^3$, 使得

$$\int_{B_r(y_n)} |u_n^* - u_0^*|^2 \mathrm{d}x \geqslant \sigma. \tag{4.5}$$

此外, 由 (4.3) 和 (4.5) 可知, 当 $n \to \infty$ 时, 有 $|y_n| \to \infty$ 成立. 故 $|B_r(y_n) \cap \{V(x) < b\}| \to 0$. 那么，从 Hölder 不等式可以推断出

$$\int_{B_r(y_n) \cap \{V(x) < b\}} |u_n^* - u_0^*|^2 \mathrm{d}x \to 0. \tag{4.6}$$

因此当 $n\to\infty$ 时，有

$$\begin{aligned}\|u_n^*\|_{\lambda_n}^2&\geqslant \lambda_n b\int_{B_r(y_n)\cap\{V(x)\geqslant b\}}|u_n^*-u_0^*|^2\mathrm{d}x\\&=\lambda_n b\Big(\int_{B_r(y_n)}|u_n^*-u_0^*|^2\mathrm{d}x-\int_{B_r(y_n)\cap\{V(x)<b\}}|u_n^*-u_0^*|^2\mathrm{d}x\Big)\\&\to\infty,\end{aligned}\tag{4.7}$$

这与 (4.2) 矛盾.

现在，我们证明 $u_n^*\to u_0^*$ 在 E 中成立. 因为 $\langle \mathcal{I}'_{\lambda_n}(u_n^*),u_n^*\rangle=\langle \mathcal{I}'_{\lambda_n}(u_n^*),u_0^*\rangle=0$, 则有

$$\|u_n^*\|_{\lambda_n}^2+b\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^*|^2\mathrm{d}x\right)^2=\mu\int_{\mathbb{R}^3}f|u_n^*|^q\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}|u_n^*|^p\mathrm{d}x.\tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}&\langle u_n^*,u_0^*\rangle_{\lambda_n}+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^*|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u_n^*\cdot\nabla u_0^*\mathrm{d}x\\=&\ \mu\int_{\mathbb{R}^3}f|u_n^*|^{q-2}u_n^*u_0^*\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}|u_n^*|^{p-2}u_n^*u_0^*\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{4.9}$$

根据 Hölder 不等式以及当 $2<s<6$ 时， $u_n^*\to u_0^*$ 在 $L^s(\mathbb{R}^3)$ 中成立，可知

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^3}f|u_n^*|^{q-2}u_n^*(u_n^*-u_0^*)\mathrm{d}x\Big|\leqslant|f|_{\frac{p}{p-q}}\|u_n^*\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}^{q-1}\|u_n^*-u_0^*\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\to0.\tag{4.10}$$

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^3}|u_n^*|^{p-2}u_n^*(u_n^*-u_0^*)\mathrm{d}x\Big|\leqslant\|u_n^*\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}^{p-1}\|u_n^*-u_0^*\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}\to0.\tag{4.11}$$

假设 $\|u_n^*\|_{\lambda_n}^2\to k_1$, $\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^*|^2\mathrm{d}x\to k_2$. 注意到

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_0^*|^2\mathrm{d}x\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n^*|^2\mathrm{d}x=k_2.\tag{4.12}$$

因此，从 (4.8)–(4.12) 推断出

$$\begin{aligned}k_1+bk_2^2&=\|u_0^*\|^2+bk_2\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_0^*|^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\|u_0^*\|^2+bk_2^2.\end{aligned}$$

故 $k_1\leqslant\|u_0^*\|^2$. 另一方面，利用范数的弱半连续性，有

$$\|u_0^*\|^2\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|u_n^*\|^2\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|u_n^*\|_{\lambda_n}^2=k_1,\tag{4.13}$$

从而 $\|u_n^*\|\to\|u_0^*\|$, 并且 $u_n^*\to u_0^*$ 在 E 中成立. 因为 $\langle \mathcal{I}'_{\lambda_n}(u_n^*),\phi\rangle=0$, 故对于任何的 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$, 有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a\nabla u_0^*\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x+b\Big(\int_\Omega|\nabla u_0^*|^2\mathrm{d}x\Big)\int_\Omega\nabla u_0^*\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x\\=&\ \mu\int_\Omega f|u_0^*|^{q-2}u_0^*\phi\mathrm{d}x+\int_\Omega|u_0^*|^{p-2}u_0^*\phi\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此 u_0^* 是问题 (1.5) 的一个弱解. 类似地，同样可以得到 u_0^{**} 也是问题 (1.5) 的一个弱解.

最后，我们将证明结论 (i)–(iii).

对于任意的 $u \in C_0^\infty(\Omega_f)$, 满足 $\int_{\Omega_f} f(x)|u|^q\mathrm{d}x > 0$, 使得下列函数

$$K_u(t) = \mathcal{I}_{\lambda_n}(tu) = \frac{1}{2}t^2\|u\|_{\lambda_n}^2 + \frac{bt^4}{4}|\nabla u|_2^4 - \frac{\mu t^q}{q}\int_{\Omega_f} f(x)|u|^q\mathrm{d}x - \frac{t^p}{p}\int_{\Omega_f}|u|^p\mathrm{d}x$$

有不依赖于 n 的 $t_0^+ > 0$ 和 $k_0 < 0$, 使得对于所有的 $n > 0$, 有 $t_0^+ u \in \mathcal{N}_{\lambda_n}^+$ 以及

$$\inf_{0\leqslant t\leqslant t_0^-} K_u(t) = K_u(t_0^+) = k_0 < 0.$$

这表明 $\mathcal{I}_{\lambda_n}(u_n^*) = c_{\lambda_n}^+ \leqslant k_0$.

因为 $u_n^* \to u_0^*$ 在 E 中成立且 $E \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$, $4 < p < 6$, 通过 (F) 和 Hölder 不等式可知，当 $n \to \infty$ 时，有

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u_n^*|^q\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u_0^*|^q\mathrm{d}x.$$

因此

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} a|\nabla u_0^*|^2\mathrm{d}x + \frac{b}{4}|\nabla u_0^*|_2^4 - \frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)|u_0^*|^q\mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u_0^*|^p\mathrm{d}x\\ \leqslant{}& k_0 < 0,\end{aligned}$$

这表明 $u_0^* \neq 0$.

根据 (2.1), 取 $u_n^{**} \in \mathcal{N}_{\lambda_n}^-$ 且 $E \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$, 有

$$\begin{aligned}\|u_n^{**}\|^2 \leqslant \|u_n^{**}\|_{\lambda_n}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3}(a|\nabla u_n^{**}|^2 + \lambda_n V(u_n^{**})^2)\mathrm{d}x\\ &< \frac{p-q}{2-q}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n^{**}|^p\mathrm{d}x\\ &\leqslant \frac{p-q}{2-q}S_p^{-\frac{p}{2}}\|u_n^{**}\|^p.\end{aligned}$$

因此， $u_0^{**} \neq 0$. 此外，正如在定理 1.1 中证明的那样， u_0^*, u_0^{**} 是问题 (1.5) 的两个不同的正解．定理 1.2 的证明至此结束.

参　考　文　献

[1] Bartsch T, Wang Z Q. Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on $\mathbb{R}^N$ [J]. *Comm Partial Differential Equations*, 1995, 20:1725–1741.

[2] Bartsch T, Pankov A, Wang Z Q. Nonlinear Schrödinger equations with steep potential well [J]. *Commun Contemp Math*, 2001, 3:549–569.

[3] Bartsch T, Tang Z. Multibump solutions of nonlinear Schrödinger equations with steep potential well and indefinite potential [J]. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2013, 33:7–26.

[4] Wang Z, Zhou H S. Positive solutions for nonlinear Schrödinger equations with deepening potential well [J]. *J Eur Math Soc* (*JEMS*), 2009, 11:545–573.

[5] Kirchhoff G, Mechanik Leipzig [M]. Germany: Teubner, 1883.

[6] Lin Q, Tian X, Xu R, et al. Blow up and blow up time for degenerate Kirchhoff-type wave problems involving the fractional Laplacian with arbitrary positive initial energy [J]. *Discrete Contin Dyn Syst Ser S*, 2020, 13:2095–2107.

[7] Pan N, Pucci P, Xu R, et al. Degenerate Kirchhoff-type wave problems involving the fractional Laplacian with nonlinear damping and source terms [J]. *J Evol Equ*, 2019, 19:615–643.

[8] Bernstein S. Sur une classe d'équations fonctionnelles aux dérivées partielles [J]. *Bull Acad Sci URSS Sér Math* [*Izvestia Akad Nauk SSSR*], 1940, 4:17–26.

[9] Pohožaev S I. A certain class of quasilinear hyperbolic equations [J]. *Mat Sb* (*NS*), 1975, 96(138):152–166, 168.

[10] Lions J L. On some questions in boundary value problems of mathematical physics, in Contemporary developments [M]//Continuum mechanics and partial differential equations (Proc Internat Sympos, Inst Mat, Univ Fed Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1977), North-Holland Math Stud, vol 30, Amsterdam, New York: North-Holland, 1978:284–346.

[11] Batista A M, Furtado M F. Solutions for a Schrödinger-Kirchhoff equation with indefinite potentials [J]. *Milan J Math*, 2018, 86:1–14.

[12] Deng Y, Peng S, Shuai W. Existence and asymptotic behavior of nodal solutions for the Kirchhoff-type problems in $\mathbb{R}^3$ [J]. *J Funct Anal*, 2015, 269:3500–3527.

[13] Li G, Ye H. Existence of positive ground state solutions for the nonlinear Kirchhoff type equations in $\mathbb{R}^3$ [J]. *J Differential Equations*, 2014, 257:566–600.

[14] Liu J, Liao J F, Tang C L. The existence of a ground-state solution for a class of Kirchhoff-type equations in $\mathbb{R}^N$ [J]. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 2016, 146:371–391.

[15] Zhong X J, Tang C L. Multiple positive solutions to a Kirchhoff type problem involving a critical nonlinearity in $\mathbb{R}^3$ [J]. *Adv Nonlinear Stud*, 2017, 17:661–676.

[16] Liao J F, Pu Y, Ke X F, et al. Multiple positive solutions for Kirchhoff type problems involving concave-convex nonlinearities [J]. *Commun Pure Appl Anal*, 2017, 16:2157–2175.

[17] Cao X, Xu J, Wang J. Multiple positive solutions for Kirchhoff type problems involving concave and convex nonlinearities in $\mathbb{R}^3$ [J]. *Electron J Differential Equations*, 2016, 301, 16 pp.

[18] Meng F, Zhang F, Zhang Y. Multiple positive solutions for biharmonic equation of Kirchhoff type involving concave-convex nonlinearities [J]. *Electron J Differential Equations*, 2020, 44, 15 pp.

[19] Cao X, Xu J. Multiple solutions for Kirchhoff type problems involving super-linear and sub-linear terms [J]. *Electron J Qual Theory Differ Equ*, 2016, 16, 14 pp.

[20] Cao X, Xu J. Multiple positive solutions for Schrödinger problems with concave and convex nonlinearities [J]. *Electron J Qual Theory Differ Equ*, 2018, 68, 21 pp.

[21] Chen B, Ou Z Q. Sign-changing and nontrivial solutions for a class of Kirchhoff-type problems [J]. *J Math Anal Appl*, 2020, 481(1):123476, 18 pp.

[22] Li H Y. Existence of positive ground state solutions for a critical Kirchhoff type problem with sign-changing potential [J]. *Comput Math Appl*, 2018, 75:2858–2873.

[23] Du M, Tian L, Wang J, et al. Existence of ground state solutions for a super-biquadratic Kirchhoff-type equation with steep potential well [J]. *Appl Anal*, 2016, 95:627–645.

[24] Jia H, Luo X. Existence and concentrating behavior of solutions for Kirchhoff type equations with steep potential well [J]. *J Math Anal Appl*, 2018, 467:893–915.

[25] Sun J, Wu T F. Ground state solutions for an indefinite Kirchhoff type problem with steep potential well [J]. *J Differential Equations*, 2014, 256:1771–1792.

[26] Xie Q, Ma S. Existence and concentration of positive solutions for Kirchhoff-type problems with a steep well potential [J]. *J Math Anal Appl*, 2015, 431:1210–1223.

[27] Zhang D, Chai G, Liu W. Existence and concentration of solutions for the nonlinear Kirchhoff type equations with steep well potential [J]. *Bound Value Probl*, 2017, 142, 15 pp.

[28] Zhang F, Du M. Existence and asymptotic behavior of positive solutions for Kirchhoff type problems with steep potential well [J]. *J Differential Equations*, 2020, 269:10085–10106.

[29] Cheng Y H, Wu T F. Multiplicity and concentration of positive solutions for semilinear elliptic equations with steep potential [J]. *Commun Pure Appl Anal*, 2016, 15:2457–2473.

[30] Drábek P, Pohozaev S I. Positive solutions for the p-Laplacian: application of the fibering method [J]. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 1997, 127:703–726.

[31] Brown K J, Zhang Y. The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-changing weight function [J]. *J Differential Equations*, 2003, 193:481–499.

[32] Brown K J, Wu T F. A fibering map approach to a potential operator equation and its applications [J]. *Differential Integral Equations*, 2009, 22:1097–1114.

[33] Ni W M, Takagi I. On the shape of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem [J]. *Comm Pure Appl Math*, 1991, 44:819–851.

[34] Wu T F. Multiplicity results for a semi-linear elliptic equation involving sign-changing weight function [J]. *Rocky Mountain J Math*, 2009, 39:995–1011.

[35] Ekeland I. On the variational principle [J]. *J Math Anal Appl*, 1974, 47:324–353.

[36] Evans L C. Partial differential equations [M]//Graduate Studies in Mathematics, vol 19, Providence, RI: American Mathematical Society, 1998.

[37] Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic partial differential equations of second order [M]//Classics in Mathematics, Berlin: Springer-Verlag, 2001.

[38] Lions P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations, The locally compact case, I [J]. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 1984, 1:109–145.

Multiple Positive Solutions for Kirchhoff-Type Problems with Steep Potential Well and Concave-Convex Nonlinearities

LI Min[1] WU Xingping[2] TANG Chunlei[3]

[1]School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China; College of Basic Education, Chongqing Industry & Trade Polytechnic, Chongqing 408000, China. E-mail: lm7math@163.com

[2]Corresponding author. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China. E-mail: wuxp@swu.edu.cn

[3]School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China; E-mail: tangcl@swu.edu.cn

Abstract In this paper, the authors research the following Kirchhoff type problem involving concave-convex nonlinearities

$$\begin{cases} -\Big(a+b\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\Big)\Delta u+\lambda V(x)u=\mu f(x)|u|^{q-2}u+|u|^{p-2}u, \quad x\in\mathbb{R}^3,\\ u\in H^1(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

where $a, b > 0$ are constants, $\lambda, \mu > 0$ are parameters, $1 < q < 2$, $4 < p < 6$ and V is a nonnegative continuous potential. Under some suitable assumptions on $f(x)$ and V, the existence and concentration of positive solutions to this problem are obtained by using Nehari manifold and Ekeland variational principle.

Keywords Kirchhoff type problems, Concave-Convex nonlinearities, Steep potential well, Nehari manifold

2000 MR Subject Classification 35J15, 35J20, 35D30

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 43 No. 3, 2022

by ALLERTON PRESS, INC., USA