数 学 年 刊
2012,33A(2):149–160

新的变系数可积耦合非线性 Schrödinger 方程及其孤子解*

王灯山[1] 陈 静[2]

提要 基于延拓结构和 Hirota 双线性方法研究了广义的变系数耦合非线性 Schrödinger 方程. 首先导出了 3 组新的变系数可积耦合非线性 Schrödinger 方程及其线性谱问题 (Lax 对), 然后利用 Hirota 双线性方法给出了它们的单、双向量孤子解. 这些向量孤子解在光孤子通讯中有重要的应用.

关键词 延拓结构， Lax 对， Hirota 方法，向量孤子，耦合非线性 Schrödinger 方程
MR (2000) 主题分类 35Q51, 35Q55, 37K10
中图法分类 O175
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2012)02-0149-12

1 引 言

近年来, 诸如光开关等光孤子的潜在应用吸引了越来越多的实验物理研究 [1−4]. 光孤子通过纤维介质传播这一现象可以由高阶或耦合的非线性 Schrödinger 方程来描述 [1−4], 该方程有两种类型的光孤子解，即亮孤子和暗孤子 [1−5]. 亮孤子存在于反常群速度色散区域，此区域中色散系数和立方非线性系数的符号相同，即这两个系数的乘积大于零. 众所周知，光亮孤子可以用在长距离通讯中以增加光纤通讯系统的比特率.

为了描述光纤中两个脉冲的共同传播现象, 我们需要考虑两分量的传播方程. 为此, 我们研究如下的广义变系数耦合非线性 Schrödinger 方程：

$$\begin{cases}\mathrm{i}u_t+a_1u_{xx}+(b_1|u|^2+c_1|v|^2+e_1)u=0,\\ \mathrm{i}v_t+a_2v_{xx}+(b_2|u|^2+c_2|v|^2+e_2)v=0,\end{cases}\tag{1.1}$$

这里 u 和 v 是两个相互作用光学模的慢变包络，变量 x 和 t 分别表示传播距离和时间，a_1,b_1,c_1 和 a_2,b_2,c_2 都是 t 的函数， e_1 和 e_2 都是关于 x 和 t 的函数.

当 $a_1=a_2=1,\ b_1=b_2=c_1=c_2=2\mu,\ e_1=e_2=0$ 时，这里 μ 是一个正常数，即这些参数对应着反常群速度色散区域 [4], 则变系数耦合非线性 Schrödinger 方程 (1.1) 变为

$$\begin{cases}\mathrm{i}u_t+u_{xx}+2\mu(|u|^2+|v|^2)u=0,\\ \mathrm{i}v_t+v_{xx}+2\mu(|u|^2+|v|^2)v=0.\end{cases}\tag{1.2}$$

此方程是可积耦合的聚焦 Manakov 型耦合非线性 Schrödinger 方程, 具有向量亮孤子解.

当 $a_1=a_2=1,\ b_1=b_2=c_1=c_2=-2\mu,\ e_1=e_2=0$ 时，这里 μ 是一个正常数，即这些参数对应着正常群速度色散区域 [4], 那么变系数耦合非线性 Schrödinger 方程 (1.1) 变为

$$\begin{cases}\mathrm{i}u_t+u_{xx}-2\mu(|u|^2+|v|^2)u=0,\\ \mathrm{i}v_t+v_{xx}-2\mu(|u|^2+|v|^2)v=0,\end{cases}\tag{1.3}$$

本文 2011 年 10 月 31 日收到， 2012 年 1 月 1 日收到修改稿.
[1]北京信息科技大学理学院，北京 100192. E-mail: wangdsh1980@yahoo.com.cn
[2]中央财经大学应用数学学院，北京 100081. E-mail: chenjingma@cufe.edu.cn
*国家自然科学基金 (No. 11001263, No. 11126244) 和北京市教育委员会科技发展计划基金 (No. KM201110772017) 资助的项目.

此方程是一个可积耦合的散焦 Manakov 型非线性 Schrödinger 方程，具有暗亮孤子解和暗暗孤子解.

对方程 (1.1) 的孤子结构的研究已经揭示了很多用通常的线性方法无法解释的现象，理论学家往往倾向于寻找这些非线性方程的线性谱问题．迄今为止，除了 Estabrook 和 Wahlquist 的延拓结构方法 [6−11] 没有系统寻找线性谱问题的方法, 该方法基于外微分形式系统、Cartan-Ehresmann 联络 [12−13] 和李代数 [13−14] 表示理论． Estabrook 和 Wahlquist 延拓结构方法的本质是对于一个给定的偏微分方程, 首先引进一些新的独立变量, 然后将原方程变为一系列一阶的偏微分方程组. 新独立变量满足的方程是线性的, 在这些方程中最初的变量可以看作是一种势函数. 另外, 延拓可以用外微分形式或者 Cartan-Ehresmann 联络中的 jet 丛 [12] 的语言来实现.

近年来，单分量变系数非线性 Schrödinger 方程已经得到了广泛的研究．例如， Lü 在文 [15] 中研究了描述准一维 Bose-Einstein 凝聚孤子动力学的具有线性势的单分量非线性 Schrödinger 方程的 Painlevé 性质，该方程如下：

$$\mathrm{i}u_t + \frac{1}{2}u_{xx} + \mu|u|^2u + xf(t)u = 0. \tag{1.4}$$

另外， Li 在文 [16] 中利用 Hirota 双线性方法给出了该方程的单和双孤子解．在本文中，我们将利用延拓结构和 Hirota 双线性方法研究变系数耦合非线性 Schrödinger 方程 (1.1) 的可积性和精确解．首先通过研究方程 (1.1) 的延拓结构，我们提出 3 个可积的变系数耦合非线性 Schrödinger 方程，接着利用 Hirota 双线性方法 [17−20] 导出它们的单和双向量孤子解．这些可积的变系数方程是单分量非线性 Schrödinger 方程 (1.4) 的两分量可积扩展.

2 3 个可积的变系数耦合非线性 Schrödinger 方程

下面通过研究方程 (1.1) 的延拓结构导出 3 个可积的变系数耦合非线性 Schrödinger 方程.

假设 $p = u^*$ 且 $q = v^*$, 那么方程 (1.1) 变为

$$\begin{cases}\mathrm{i}u_t + a_1u_{xx} + (b_1up + c_1vq + e_1)u = 0,\\ \mathrm{i}p_t - a_1p_{xx} - (b_1up + c_1vq + e_1)p = 0,\\ \mathrm{i}v_t + a_2v_{xx} + (b_2up + c_2vq + e_2)v = 0,\\ \mathrm{i}q_t - a_2q_{xx} - (b_2up + c_2vq + e_2)q = 0.\end{cases} \tag{2.1}$$

接着，引进 4 个新的独立变量 $\phi_1, \varphi_1, \phi_2, \varphi_2$ 如下：

$$\phi_1 = u_x, \quad \varphi_1 = p_x, \quad \phi_2 = v_x, \quad \varphi_2 = q_x.$$

这样，我们有底流形 $M = \{x, t, u, v, p, q, \phi_1, \phi_2, \varphi_1, \varphi_2\}$, 在此底流形上定义一个微分 2-形式集合 $I = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$, 其中

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}t + \phi_1 \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x,\\
\alpha_2 &= \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}t + \varphi_1 \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x,\\
\alpha_3 &= \mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}t + \phi_2 \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x,\\
\alpha_4 &= \mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}t + \varphi_2 \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x,\\
\alpha_5 &= \mathrm{i}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}x - a_1 \mathrm{d}\phi_1 \wedge \mathrm{d}t + (b_1up + c_1vq + e_1)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x,\\
\alpha_6 &= \mathrm{i}\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}x - a_2 \mathrm{d}\phi_2 \wedge \mathrm{d}t + (b_2up + c_2vq + e_2)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x,\\
\alpha_7 &= -\mathrm{i}\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}x - a_1 \mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}t + (b_1up + c_1vq + e_1)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

$$\alpha_8 = -\mathrm{i}\mathrm{d}q\wedge \mathrm{d}x - a_2\mathrm{d}\varphi_2\wedge \mathrm{d}t + (b_2up + c_2vq + e_2)\mathrm{d}t\wedge \mathrm{d}x,$$

这里解流形 $S=\{x,t,u,v,p,q\}$ 是底流形 M 的一个子流形．当 $\alpha_i|S=0$ $(i=1,2,\cdots,8)$ 时，我们重新得到了方程 (2.1)．另外，易证微分 2-形式集合 I 是一个微分闭理想，即 $\mathrm{d}I\subseteq I$[12].

进一步引进如下的 n 个微分 1-形式：

$$\omega^i = \mathrm{d}y^i - \widetilde{F}^i(x,t,u,v,p,q,\phi_1,\phi_2,\varphi_1,\varphi_2;y^i)\mathrm{d}x - \widetilde{G}^i(x,t,u,v,p,q,\phi_1,\phi_2,\varphi_1,\varphi_2;y^i)\mathrm{d}t,$$

这里 $i=1,2,\cdots,n$, 假设函数 $\widetilde{F}^i$ 和 $\widetilde{G}^i$ 线性依赖于 y^i, 即 $\widetilde{F}^i=F^iy^i$, $\widetilde{G}^i=G^iy^i$. 当将微分 1-形式 ω^i 限制在解流形 S 上时，我们有 $\omega^i=0$, 即 $y^i_x=F^iy^i$ 和 $y^i_t=G^iy^i$. 为方便起见，记 $F^i=F$, $G^i=G$ 且 $y^j=y$, 我们有 $y_x=Fy$ 且 $y_t=Gy$.

根据 Estabrook 和 Wahlquist 的做法 [6], 将微分 2-形式集合 I 和 $\{\omega^i\}_1^n$ 结合可得一个扩展的微分形式集合 $\widetilde{I}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8;\omega^i\}$, 微分形式集合 $\widetilde{I}$ 必须在外微分运算下是一个闭理想，即 $\mathrm{d}\widetilde{I}\subseteq\widetilde{I}$. 由于 $\mathrm{d}\alpha_i\in I\subset\widetilde{I}$ $(i=1,2,\cdots,8)$, 只需要 $\mathrm{d}\omega^i\in\widetilde{I}$, 即

$$\mathrm{d}\omega^i=\sum_{j=1}^{8}f^i_j\alpha_j+\eta^i\wedge\omega^i,\quad i=1,2,\cdots,n,\tag{2.2}$$

其中 f^i_j 是 x 和 t 的函数， $\eta^i=A^i\mathrm{d}x+B^i\mathrm{d}t$ $(i=1,2,\cdots,8)$ 是微分 1-形式，且 A 和 B 都是 x 和 t 的函数.

将方程 (2.2) 展开，我们可以得到关于 F 和 G 的一组偏微分方程如下：

$$\begin{aligned}&F_{\phi_1}=F_{\phi_2}=F_{\varphi_1}=F_{\varphi_2}=0,\quad G_{\phi_1}-\mathrm{i}a_1F_u=0,\\&G_{\varphi_1}+\mathrm{i}a_1F_p=0,\quad G_{\varphi_2}+\mathrm{i}a_2F_q=0,\quad G_{\phi_2}-\mathrm{i}a_2F_v=0,\\&G_u\phi_1+G_p\varphi_1+G_v\phi_2+G_q\varphi_2-\mathrm{i}F_u(b_1\,up+c_1\,vq+e_1)u\\&+\mathrm{i}F_p(b_1\,up+c_1\,vq+e_1)p-\mathrm{i}F_v(b_2\,up+c_2\,vq+e_2)v\\&+\mathrm{i}F_q(b_2\,up+c_2\,vq+e_2)q-[F,G]=0,\end{aligned}\tag{2.3}$$

这里 $[F,G]=FG-GF$.

经过运算，我们发现仅当 $a_2=a_1$ 或者 $a_2=-a_1$ 时，这些关于 F 和 G 的偏微分方程有非平凡解．不失一般性，假设 $a_2=a_1$, 则偏微分方程组 (2.3) 的解为

$$F=X_1u+X_2v+X_3p+X_4q+X_5,\tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}G=&\,\mathrm{i}X_1a_1\,\phi_1-\mathrm{i}X_3a_1\,\varphi_1+\mathrm{i}X_2a_1\,\phi_2-\mathrm{i}X_4a_1\,\varphi_2-\mathrm{i}a_1\,uX_9-\mathrm{i}a_1\,upX_7-\mathrm{i}a_1\,uqX_8\\&-\mathrm{i}a_1\,pvX_{10}+\mathrm{i}a_1\,pX_{14}-\mathrm{i}a_1\,qvX_{11}+\mathrm{i}a_1\,qX_{15}-\mathrm{i}a_1\,X_{12}v+X_{16},\end{aligned}$$

这里 X_i $(i=1,2,\cdots,16)$ 是下面要确定的矩阵，它们满足李括号关系 $[X_i,X_j]=X_iX_j-X_jX_i$ 和如下的交换关系式：

$$\begin{aligned}&[X_5,X_{16}]=0,\quad \mathrm{i}X_4c_2+\mathrm{i}a_1\,[X_4,X_{11}]=0,\quad [X_4,X_{15}]=0,\\&\mathrm{i}a_1\,[X_5,X_{12}]-[X_2,X_{16}]-\mathrm{i}X_2e_2=0,\quad \mathrm{i}a_1\,[X_5,X_9]-\mathrm{i}X_1e_1-[X_1,X_{16}]=0,\\&[X_3,X_9]+[X_5,X_7]-[X_1,X_{14}]=0,\quad \mathrm{i}a_1\,[X_3,X_8]+\mathrm{i}a_1\,[X_4,X_7]+\mathrm{i}X_4b_2=0,\\&\mathrm{i}a_1\,[X_3,X_{11}]+\mathrm{i}a_1\,[X_4,X_{10}]+\mathrm{i}X_3c_1=0,\quad [X_5,X_{11}]+[X_4,X_{12}]-[X_2,X_{15}]=0,\\&[X_5,X_{10}]-[X_2,X_{14}]+[X_3,X_{12}]=0,\quad \mathrm{i}a_1\,[X_2,X_7]+\mathrm{i}a_1\,[X_1,X_{10}]-\mathrm{i}X_2b_2=0,\\&\mathrm{i}a_1\,[X_1,X_{11}]+\mathrm{i}a_1\,[X_2,X_8]-\mathrm{i}X_1c_1=0,\quad [X_4,X_9]+[X_5,X_8]-[X_1,X_{15}]=0,\\&[X_1,X_{12}]+[X_2,X_9]=0,\quad [X_2,X_{12}]=0,\quad \mathrm{i}a_1\,[X_3,X_7]+\mathrm{i}X_3b_1=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[X_4,X_{14}]+[X_3,X_{15}]=0,\quad \mathrm{i}a_1\,[X_1,X_7]-\mathrm{i}X_1b_1=0,\quad \mathrm{i}a_1\,[X_2,X_{11}]-\mathrm{i}X_2c_2=0,\\
&\mathrm{i}X_3e_1-\mathrm{i}a_1\,[X_5,X_{14}]-[X_3,X_{16}]=0,\quad \mathrm{i}X_4e_2-\mathrm{i}a_1\,[X_5,X_{15}]-[X_4,X_{16}]=0,\\
&[X_1,X_8]=0,\quad [X_4,X_8]=0,\quad [X_2,X_{10}]=0,\quad [X_3,X_{10}]=0,\\
&[X_3,X_{14}]=0,\quad [X_1,X_9]=0.
\end{aligned}\tag{2.5}$$

这里

$$L=\{X_1,X_2,\cdots,X_{16}\}$$

是一个不完全的李代数，称为延拓代数．为了得到此延拓代数的矩阵表示，我们试着将其嵌入到李代数 $\mathrm{sl}(m,\mathbb{C})$ 中．首先从最简单的情形 $m=2$ 开始，经过计算发现 $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ 代数不能描述 L. 因此，下面我们将 L 嵌入到 $\mathrm{sl}(3,\mathbb{C})$ 代数中．

从交换关系 (2.5) 中容易发现如下的交换关系：

$$[X_1,X_7]=\frac{b_1}{a_1}X_1,\quad [X_1,X_3]=X_7,$$

这表明 X_1 是 $\mathrm{sl}(3,\mathbb{C})$ 代数中的一个幂零元， X_7 是一个中性元，因此我们可以设

$$X_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad X_7=\begin{pmatrix}-\frac{b_1}{2a_1}&0&0\\0&0&0\\0&0&\frac{b_1}{2a_1}\end{pmatrix},\quad X_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-\frac{b_1}{2a_1}&0&0\end{pmatrix}.$$

从交换关系 (2.5) 中，我们也可以发现如下的交换关系：

$$[X_2,X_{11}]=\frac{c_2}{a_1}X_2,\quad X_{11}=[X_2,X_4],$$

这表明 X_2 是 $\mathrm{sl}(3,\mathbb{C})$ 代数中的一个幂零元， X_{11} 是一个中性元，因此我们可以设

$$X_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad X_{11}=\begin{pmatrix}-\frac{c_1}{2a_1}&0&0\\0&\frac{c_1}{2a_1}&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad X_4=\begin{pmatrix}0&0&0\\-\frac{c_1}{2a_1}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

假设 X_5 和 X_{16} 是一般的 3×3 矩阵，将如上所有的矩阵表示代入交换关系式 (2.5) 中，我们发现如下的关系式成立：

$$a_1=a_2=r,\quad b_1=b_2=\kappa_1 r,\quad c_1=c_2=\kappa_2 r,\quad e_1=F_1+\psi x,\quad e_2=F_2+\psi x,\tag{2.6}$$

其中 r, ψ, F_1, F_2 都是关于 t 的任意函数， κ_1 和 κ_2 是任意常数．同时，我们得到了延拓代数 L 的所有元素的 3×3 矩阵表示．将这些矩阵表示代入方程 (2.4) 中，我们得到了变系数耦合非线性 Schrödinger 方程 (1.1) 在参数 (2.6) 下的线性谱问题，即如下的 Lax 对：

$$y_x=Fy,\quad y_t=Gy,\quad y=(y^1,y^2,y^3)^{\mathrm{T}},\tag{2.7}$$

这里

$$F=\begin{pmatrix}\frac{2\mathrm{i}}{3}\rho-2\,\lambda & v & u\\ -\frac{1}{2}\kappa_2\,v^* & -\frac{\mathrm{i}}{3}\rho+\lambda & 0\\ -\frac{1}{2}\kappa_1\,u^* & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{3}\rho+\lambda\end{pmatrix},\tag{2.8}$$

$$G=\begin{pmatrix} g_{11} & \mathrm{i}r(v_x+\mathrm{i}\rho v-3\,\lambda v) & \mathrm{i}r(u_x+\mathrm{i}\rho u-3\,\lambda u)\\ -\frac{1}{2}\mathrm{i}\kappa_2 r(\mathrm{i}\rho v^*-v_x^*-3\,\lambda v^*) & g_{22} & -\frac{1}{2}\mathrm{i}\kappa_2 ruv^*\\ -\frac{1}{2}\mathrm{i}\kappa_1 r(\mathrm{i}\rho u^*-u_x^*-3\,\lambda u^*) & -\frac{1}{2}\mathrm{i}\kappa_1 ru^*v & g_{33}\end{pmatrix},$$

其中 λ 是谱参数， g_{11}, g_{22} 和 g_{33} 分别满足

$$g_{11}=\frac{1}{2}\mathrm{i}\kappa_1 r|u|^2+\frac{1}{2}\mathrm{i}\kappa_2 r|v|^2+\frac{2\mathrm{i}}{3}\,\psi x,$$

$$g_{22} = -\frac{1}{2}\mathrm{i}\kappa_2 r|v|^2 - \frac{\mathrm{i}}{3}x\,\psi - \mathrm{i}F_2(t) - \mathrm{i}r\rho^2 - 6\lambda\,r\rho - 9\lambda^2\mathrm{i}r,$$
$$g_{33} = -\frac{1}{2}\mathrm{i}\kappa_1 r|u|^2 - \mathrm{i}r\rho^2 - 6\lambda\,r\rho - 9\lambda^2\mathrm{i}r - \frac{\mathrm{i}}{3}x\,\psi - \mathrm{i}F_1(t),$$

这里 $\rho = \int\psi\mathrm{d}t$.

此线性谱问题的可积性条件 $y_{xt} = y_{tx}$ 给出了如下的可积耦合非线性 Schrödinger 方程：

$$\begin{cases}\mathrm{i}u_t + ru_{xx} + r(\kappa_1|u|^2 + \kappa_2|v|^2)u + (F_1(t) + \psi x)u = 0,\\ \mathrm{i}v_t + rv_{xx} + r(\kappa_1|u|^2 + \kappa_2|v|^2)v + (F_2(t) + \psi x)v = 0.\end{cases} \tag{2.9}$$

这是一个可积耦合变系数非线性 Schrödinger 方程．注意到，方程 (2.9) 的谱问题 (2.7) 和 (2.8) 是文 [21] 中 AKNS 谱问题的一种特殊约化.

因为 κ_1 和 κ_2 是非零实参数，它们可以同号 (正号或负号), 也可以反号．不失一般性，我们假设如下三种情形： (i) $\kappa_1 = -2,\ \kappa_2 = 2$, (ii) $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ 和 (iii) $\kappa_1 = \kappa_2 = -2$.

(i) 当 $\kappa_1 = -2,\ \kappa_2 = 2$ 时，可积耦合非线性 Schrödinger 方程 (2.9) 变为

$$\begin{cases}\mathrm{i}u_t + ru_{xx} - 2r(|u|^2 - |v|^2)u + (F_1(t) + \psi x)u = 0,\\ \mathrm{i}v_t + rv_{xx} - 2r(|u|^2 - |v|^2)v + (F_2(t) + \psi x)v = 0,\end{cases} \tag{2.10}$$

这是一种新类型的变系数聚焦-散焦耦合非线性 Schrödinger 方程，它具有亮亮孤子解、暗亮孤子解和暗暗孤子解.

(ii) 当 $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$ 时，可积耦合非线性 Schrödinger 方程 (2.9) 变为

$$\begin{cases}\mathrm{i}u_t + ru_{xx} + 2r(|u|^2 + |v|^2)u + (F_1(t) + \psi x)u = 0,\\ \mathrm{i}v_t + rv_{xx} + 2r(|u|^2 + |v|^2)v + (F_2(t) + \psi x)v = 0,\end{cases} \tag{2.11}$$

这是聚焦 Manakov 方程 (1.2) 的一种变系数可积扩展．不像如上的聚焦-散焦耦合非线性 Schrödinger 方程 (2.10), 它仅具有亮亮孤子解.

(iii) 当 $\kappa_1 = \kappa_2 = -2$ 时，可积耦合非线性 Schrödinger 方程 (2.9) 变为

$$\begin{cases}\mathrm{i}u_t + ru_{xx} - 2r(|u|^2 + |v|^2)u + (F_1(t) + \psi x)u = 0,\\ \mathrm{i}v_t + rv_{xx} - 2r(|u|^2 + |v|^2)v + (F_2(t) + \psi x)v = 0,\end{cases} \tag{2.12}$$

这是散焦 Manakov 方程 (1.3) 的一种变系数可积扩展．该方程具有暗亮孤子解和暗暗孤子解，但是没有亮亮孤子解.

以上 3 个可积的变系数耦合非线性 Schrödinger 方程 (2.10)–(2.12) 包含许多物理上重要的非等谱耦合非线性 Schrödinger 方程．特别地，它们包含单分量变系数非线性 Schrödinger 方程 (1.4)[15−16]．寻找这些方程的精确孤子解是一项非常重要的研究工作．下面，我们将构造这些方程的显式的双孤子解．由于 Lax 对 (2.7) 和 (2.8) 形式很复杂，利用反散射方法或 Darboux 变换方法求其孤子解将会非常复杂．因此，我们将利用 Hirota 双线性方法 [17−20] 求这些方程的精确孤子解.

3 耦合非线性 Schrödinger 方程 (2.10)–(2.12) 的向量孤子解

为了深入了解变系数耦合非线性 Schrödinger 方程 (2.10)–(2.12) 深层的动力学行为，求得这些方程的精确的孤子解是很必要的．因此，我们将利用 Hirota 双线性方法 [17−20] 求得方程 (2.10) 和 (2.11) 的精确的亮亮孤子解，以及方程 (2.12) 的暗亮孤子解．这一过程也可以用来求得它们的向量 N-孤子解，然而，在这里我们仅研究它们的单和双孤子解.

3.1 方程 (2.10) 的亮亮孤子解

首先，根据文 [17], 我们采取如下的 Hirota 双线性变换：

$$u=\frac{g}{f},\quad v=\frac{h}{f},\tag{3.1}$$

其中 $g=g(x,t)$ 和 $h=h(x,t)$ 均为复函数， $f=f(x,t)$ 是实函数. 将 (3.1) 代入到变系数聚焦-散焦耦合非线性 Schrödinger 方程 (2.10) 中，可得如下的双线性方程：

$$\begin{cases}\mathrm{i}D_tg\cdot f+rD_x^2g\cdot f+(F_1+\psi x)gf=0,\\ D_x^2f\cdot f+2gg^*-2hh^*=0,\\ \mathrm{i}D_th\cdot f+rD_x^2h\cdot f+(F_2+\psi x)hf=0,\end{cases}\tag{3.2}$$

这里， D-算子 [17] 定义为

$$D_x^nD_t^mg(x,t)\cdot f(x,t)\equiv\Big(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\Big)^n\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\Big)^m g(x,t)f(x',t')\Big|_{x=x',t=t'}.$$

为了求得方程 (2.10) 的向量亮孤子解，我们将函数 f, g 和 h 展成如下的级数形式：

$$\begin{cases}f=1+\epsilon^2f_2+\epsilon^4f_4+\cdots,\\ g=\epsilon g_1+\epsilon^3g_3+\cdots,\\ h=\epsilon h_1+\epsilon^3h_3+\cdots,\end{cases}\tag{3.3}$$

其中 ϵ 是一个非零展开系数. 将 (3.3) 代入方程 (3.2), 并对比参数 ϵ 的同次幂，可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}g_{1t}+rg_{1xx}+(F_1+\psi x)g_1=0,\\ &\mathrm{i}(g_{1t}f_2-g_1f_{2t}+g_{3t})+r(g_{1xx}f_2-2\,g_{1x}f_{2x}+g_1f_{2xx}+g_{3xx})\\ &+(F_1+\psi x)(g_1f_2+g_3)=0,\\ &\mathrm{i}h_{1t}+rh_{1xx}+(F_2+\psi x)h_1=0,\\ &\mathrm{i}(h_{1t}f_2-h_1f_{2t}+h_{3t})+r(h_{1xx}f_2-2\,h_{1x}f_{2x}+h_1f_{2xx}+h_{3xx})\\ &+(F_2+\psi x)(h_1f_2+h_3)=0,\\ &f_{2xx}+g_1g_1^*-h_1h_1^*=0,\\ &f_{4xx}+f_{2xx}f_2-{f_{2x}}^2+g_1g_3^*+g_3g_1^*-h_1h_3^*-h_3h_1^*=0,\\ &\qquad\qquad\vdots\end{aligned}\tag{3.4}$$

根据文 [17–20] 中的做法，假设

$$g_1=\sum_{j=1}^N\alpha_j\exp(\xi_j),\quad \xi_j=\mu_j(x,t)+\mathrm{i}\nu_j(x,t),$$

$$h_1=\sum_{j=1}^N\beta_j\exp(\eta_j),\quad \eta_j=\delta_j(x,t)+\mathrm{i}\sigma_j(x,t),$$

其中 α_j 和 β_j 均为任意非零常数. 递归求解方程 (3.4), 可以得到方程 (2.10) 的亮亮 N-孤子解.

为了求得其向量单孤子解，我们首先假设 $N=1$, 即

$$g_1=\alpha_1\mathrm{e}^{\xi_1},\quad h_1=\beta_1\mathrm{e}^{\eta_1},\tag{3.5}$$

这里， $\xi_1=\mu_1(x,t)+\mathrm{i}\nu_1(x,t)$, $\eta_1=\delta_1(x,t)+\mathrm{i}\sigma_1(x,t)$, 且 μ_1,ν_1,δ_1 和 σ_1 均为 x 和 t 的待定函数.

将 (3.5) 代入到方程 (3.4) 中，我们有

$$
\begin{aligned}
&g_1=\alpha_1\mathrm{e}^{\xi_1},\quad h_1=\beta_1\mathrm{e}^{\eta_1},\quad g_j=h_j=0\ (j=3,5,\cdots),\\
&f_2=\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_1^*+\xi_0}=\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_1^*+\xi_0},\quad f_j=0\ (j=4,6,\cdots),\\
&\mathrm{e}^{\xi_0}=\frac{\beta_1^2-\alpha_1^2}{4C_1^2},\quad \mathrm{i}=\sqrt{-1},\\
&\xi_1=\mathrm{i}\Big[\int(rC_1^2+F_1-r\rho^2)\mathrm{d}t+\rho x\Big]+C_1x-2\,C_1\int\rho r\mathrm{d}t,\\
&\eta_1=\mathrm{i}\Big[\int(rC_1^2+F_2-r\rho^2)\mathrm{d}t+\rho x\Big]+C_1x-2\,C_1\int\rho r\mathrm{d}t,
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

其中 C_1,α_1,β_1 均为任意实参数，且 $\rho=\int\psi\mathrm{d}t$.

因此，设参数 $\epsilon=1$, 我们可以得到方程 (2.10) 的亮亮单孤子解如下：

$$
u=\frac{\alpha_1\mathrm{e}^{\xi_1}}{1+\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_1^*+\xi_0}},\quad v=\frac{\beta_1\mathrm{e}^{\eta_1}}{1+\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_1^*+\xi_0}},\tag{3.7}
$$

其中 ξ_1,η_1 和 ξ_0 满足 (3.6).

如果 $N=2$, 我们可以假设

$$
g_1=\alpha_1\mathrm{e}^{\xi_1}+\alpha_2\mathrm{e}^{\xi_2},\quad h_1=\beta_1\mathrm{e}^{\eta_1}+\beta_2\mathrm{e}^{\eta_2},\tag{3.8}
$$

其中 $\xi_j=\mu_j(x,t)+\mathrm{i}\nu_j(x,t)$ 和 $\eta_j=\delta_j(x,t)+\mathrm{i}\sigma_j(x,t)\ (j=1,2)$.

利用符号计算，将 (3.8) 代入到方程 (3.4) 中并求解得到的方程，我们可得方程 (2.10) 的亮亮双孤子解如下：

$$
u=\frac{\alpha_1\mathrm{e}^{\xi_1}+\alpha_2\mathrm{e}^{\xi_2}+\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_1^*+\xi_2+\xi_1^0}+\mathrm{e}^{\xi_2+\xi_2^*+\xi_1+\xi_2^0}}{1+\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_1^*+R_1}+\mathrm{e}^{\xi_2+\xi_2^*+R_2}+\mathrm{e}^{\xi_1^*+\xi_2+R_3}+\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_2^*+R_3}+\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_1^*+\xi_2+\xi_2^*+R_4}},\tag{3.9}
$$

$$
v=\frac{\beta_1\mathrm{e}^{\eta_1}+\beta_2\mathrm{e}^{\eta_2}+\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2+\eta_1^0}+\mathrm{e}^{\eta_2+\eta_2^*+\eta_1+\eta_2^0}}{1+\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_1^*+R_1}+\mathrm{e}^{\xi_2+\xi_2^*+R_2}+\mathrm{e}^{\xi_1^*+\xi_2+R_3}+\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_2^*+R_3}+\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_1^*+\xi_2+\xi_2^*+R_4}},\tag{3.10}
$$

这里

$$
\xi_j=\mathrm{i}\Big[\int(rC_j^2+F_1-r\rho^2)\mathrm{d}t+\rho x\Big]+C_jx-2\,C_j\int\rho r\mathrm{d}t,\tag{3.11}
$$

$$
\eta_j=\mathrm{i}\Big[\int(rC_j^2+F_2-r\rho^2)\mathrm{d}t+\rho x\Big]+C_jx-2\,C_j\int\rho r\mathrm{d}t,\tag{3.12}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\xi_1^0}=(C_2-C_1)\frac{\alpha_2C_2(\beta_1^2-\alpha_1^2)+C_1\alpha_2(\alpha_1^2+\beta_1^2)-2\,C_1\alpha_1\beta_1\beta_2}{4(C_1+C_2)^2C_1^2},\\
&\mathrm{e}^{\xi_2^0}=(C_2-C_1)\frac{\alpha_1C_1(\alpha_2^2-{\beta_2}^2)-\alpha_1C_2(\beta_2^2+\alpha_2^2)+2\,C_2\alpha_2\beta_1\beta_2}{4(C_1+C_2)^2C_2^2},\\
&\mathrm{e}^{\eta_1^0}=(C_1-C_2)\frac{\beta_2C_2(\alpha_1^2-\beta_1^2)+\beta_2C_1(\beta_1^2+\alpha_1^2)-2\,C_1\alpha_1\alpha_2\beta_1}{4(C_1+C_2)^2C_1^2},\\
&\mathrm{e}^{\eta_2^0}=(C_1-C_2)\frac{\beta_1C_1(\beta_2^2-\alpha_2^2)-\beta_1C_2(\beta_2^2+\alpha_2^2)+2\,C_2\alpha_1\alpha_2\beta_2}{4(C_1+C_2)^2C_2^2},\\
&\mathrm{e}^{R_1}=\frac{\beta_1^2-\alpha_1^2}{4C_1^2},\quad \mathrm{e}^{R_2}=\frac{\beta_2^2-\alpha_2^2}{4C_2^2},\quad \mathrm{e}^{R_3}=\frac{\beta_1\beta_2-\alpha_1\alpha_2}{(C_1+C_2)^2},\\
&\mathrm{e}^{R_4}=\frac{(C_1-C_2)^2(C_1\Omega_1-C_2\Omega_2)(C_1\Omega_2-C_2\Omega_1)}{16C_1^2C_2^2(C_1+C_2)^4},
\end{aligned}
$$

其中 $\Omega_1=(\alpha_1+\beta_1)(\beta_2-\alpha_2)$, $\Omega_2=(\beta_1-\alpha_1)(\beta_2+\alpha_2)$, 且 C_j,α_j,β_j $(j=1,2)$ 均为任意实常数.

这是方程 (2.10) 的一个包含 6 个参数的一般的向量双亮孤子解，通过适当选择这些参数，我们可以得到此双孤子解的改变形状和不改变形状的双孤子的碰撞特征. 另外，设 $N=3$, 利用同样的步骤也可以得到方程 (2.10) 的向量 3-亮孤子解.

3.2 方程 (2.11) 的亮亮孤子解

将 (3.1) 代入变系数聚焦 Manakov 方程组 (2.11) 中，我们可得如下的双线性方程:

$$\begin{cases}\mathrm{i}D_tg\cdot f+rD_x^2g\cdot f+(F_1+\psi x)gf=0,\\ D_x^2f\cdot f-2gg^*-2hh^*=0,\\ \mathrm{i}D_th\cdot f+rD_x^2h\cdot f+(F_2+\psi x)hf=0.\end{cases}\tag{3.13}$$

利用如上的计算方法，我们也可以得到方程 (2.11) 的精确的亮亮孤子解. 下面为方便起见，仅列出最后结果.

方程 (2.11) 的亮亮单孤子解

$$u=\frac{\alpha_1\mathrm{e}^{\xi_1}}{1+\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_1^*+\xi_0}},\quad v=\frac{\beta_1\mathrm{e}^{\eta_1}}{1+\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_1^*+\xi_0}},\tag{3.14}$$

这里

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\xi_0}=\frac{\beta_1^2+\alpha_1^2}{4C_1^2},\quad \mathrm{i}=\sqrt{-1},\\ &\xi_1=\mathrm{i}\Big[\int(rC_1^2+F_1-r\rho^2)\mathrm{d}t+\rho x\Big]+C_1x-2\,C_1\int\rho r\mathrm{d}t,\\ &\eta_1=\mathrm{i}\Big[\int(rC_1^2+F_2-r\rho^2)\mathrm{d}t+\rho x\Big]+C_1x-2\,C_1\int\rho r\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中 C_1,α_1 和 β_1 均为任意实常数，且 $\rho=\int\psi\mathrm{d}t$.

方程 (2.11) 的亮亮双孤子解如下:

$$u=\frac{\alpha_1\mathrm{e}^{\xi_1}+\alpha_2\mathrm{e}^{\xi_2}+\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_1^*+\xi_2+\xi_1^0}+\mathrm{e}^{\xi_2+\xi_2^*+\xi_1+\xi_2^0}}{1+\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_1^*+R_1}+\mathrm{e}^{\xi_2+\xi_2^*+R_2}+\mathrm{e}^{\xi_1^*+\xi_2+R_3}+\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_2^*+R_3}+\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_1^*+\xi_2+\xi_2^*+R_4}},\tag{3.15}$$

$$v=\frac{\beta_1\mathrm{e}^{\eta_1}+\beta_2\mathrm{e}^{\eta_2}+\mathrm{e}^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2+\eta_1^0}+\mathrm{e}^{\eta_2+\eta_2^*+\eta_1+\eta_2^0}}{1+\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_1^*+R_1}+\mathrm{e}^{\xi_2+\xi_2^*+R_2}+\mathrm{e}^{\xi_1^*+\xi_2+R_3}+\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_2^*+R_3}+\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_1^*+\xi_2+\xi_2^*+R_4}},\tag{3.16}$$

这里 ξ_j,η_j $(j=1,2)$ 分别由 (3.11) 和 (3.12) 给出，且

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\xi_1^0}=(C_1-C_2)\frac{C_1\alpha_2(\alpha_1^2-\beta_1^2)-C_2\alpha_2(\alpha_1^2+\beta_1^2)+2\,C_1\alpha_1\beta_1\beta_2}{4(C_2+C_1)^2C_1^2},\\ &\mathrm{e}^{\xi_2^0}=(C_1-C_2)\frac{\alpha_1C_1(\alpha_2^2+\beta_2^2)-\alpha_1C_2(\alpha_2^2-\beta_2^2)-2\,C_2\alpha_2\beta_1\beta_2}{4(C_2+C_1)^2C_2^2},\\ &\mathrm{e}^{\eta_1^0}=(C_2-C_1)\frac{C_2\beta_2(\beta_1^2+\alpha_1^2)-C_1\beta_2(\beta_1^2-\alpha_1^2)-2\,C_1\alpha_1\alpha_2\beta_1}{4(C_2+C_1)^2C_1^2},\\ &\mathrm{e}^{\eta_2^0}=(C_2-C_1)\frac{2\,C_2\alpha_1\alpha_2\beta_2-C_2\beta_1(\alpha_2^2-\beta_2^2)-C_1\beta_1(\beta_2^2+\alpha_2^2)}{4(C_2+C_1)^2C_2^2},\\ &\mathrm{e}^{R_1}=\frac{\alpha_1^2+\beta_1^2}{4C_1^2},\quad \mathrm{e}^{R_2}=\frac{\alpha_2^2+\beta_2^2}{4C_2^2},\quad \mathrm{e}^{R_3}=\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2}{(C_1+C_2)^2},\\ &\mathrm{e}^{R_4}=[(C_1^2+C_2^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2)-2\,C_1C_2((\beta_1\beta_2+\alpha_1\alpha_2)^2-(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2)]\end{aligned}$$

$$\cdot\frac{(C_2-C_1)^2}{16C_1^2C_2^2(C_1+C_2)^4},$$

其中 $C_j,\alpha_j,\beta_j\ (j=1,2)$ 均为任意实常数.

3.3 方程 (2.12) 的暗亮孤子解

前面曾指出变系数散焦 Manakov 方程 (2.12) 没有亮亮型向量孤子解，因此在这部分我们寻找它们的暗亮型向量孤子解. 直接求方程 (2.12) 的暗亮型向量孤子解会非常复杂，因此，我们首先利用相似变换将其转化成一种简单形式. 为此，假设方程 (2.12) 的复波函数 u 和 v 具有如下形式：

$$\begin{cases}u=\varrho_1U(T,X)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\upsilon_2x+\upsilon_1)},\\ v=\varrho_2V(T,X)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\iota_2x+\iota_1)},\end{cases}\tag{3.17}$$

这里 $X=\omega_1x+\omega_2$, 且 $T,\omega_2,\upsilon_1,\upsilon_2,\iota_1$ 和 ι_2 均为 t 的待定函数， ϱ_1,ϱ_2 和 ω_1 均为待定常数，函数 $U(T,X)$ 和 $V(T,X)$ 满足如下的标准散焦 Manakov 方程：

$$\begin{cases}\mathrm{i}U_T+\dfrac{1}{2}U_{XX}-(|U|^2+|V|^2)U=0,\\ \mathrm{i}V_T+\dfrac{1}{2}V_{XX}-(|U|^2+|V|^2)V=0.\end{cases}\tag{3.18}$$

将 (3.17) 代入方程 (2.12) 中并假设 $U(T,X)$ 和 $V(T,X)$ 满足方程 (3.18), 我们可得一个关于 $T,\omega_1,\omega_2,\varrho_1,\varrho_2,\upsilon_1,\upsilon_2,\iota_1$ 和 ι_2 的常微分方程组

$$2\,r\varrho_2\omega_1\iota_2+\varrho_2\omega_{2t}=0,\quad \varrho_1\upsilon_{1t}+r\varrho_1{\upsilon_2}^2-\varrho_1F_1=0,\quad \varrho_2\iota_{1t}+r\varrho_2{\iota_2}^2-\varrho_2F_2=0,$$

$$2\,r{\rho_2}^2=T_t,\quad 2\,r{\omega_1}^2=T_t,\quad 2\,{\varrho_1}^2r=T_t,\quad \varrho_1\upsilon_{2t}=\varrho_1\psi,\quad \varrho_2\iota_{2t}=\varrho_2\psi,$$

$$2\,r\varrho_1\omega_1\upsilon_2+\varrho_1\omega_{2t}=0.$$

求解这个常微分方程组，我们有

$$\begin{aligned}&\varrho_1=\varrho_2=\omega_1=\varrho,\quad \upsilon_2=\iota_2=\rho,\quad \omega_2=-2\,\varrho\int r\rho\mathrm{d}t,\\ &\upsilon_1=\int(F_1-r\rho^2)\mathrm{d}t,\quad \iota_1=\int(F_2-r\rho^2)\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{3.19}$$

其中 ϱ 是一个非零常数，且 $\rho=\int\psi\mathrm{d}t$.

如果我们能够求得方程 (3.18) 的孤子解，变系数散焦 Manakov 方程 (2.12) 的孤子解将会通过 (3.17) 和 (3.19) 得到. 为此，引进 Hirota 双线性变换如下：

$$U=\frac{g}{f},\quad V=\frac{h}{f},\tag{3.20}$$

其中 $g=g(T,X)$, $h=h(T,X)$ 为复函数，且 $f=f(T,X)$ 为实函数. 将 (3.20) 代入方程 (3.18), 我们可得方程 (3.18) 的双线性形式如下：

$$\begin{cases}\Big[\mathrm{i}D_T+\dfrac{1}{2}D_X^2+\chi\Big]g\cdot f=0,\\ \Big(\dfrac{1}{2}D_X^2+\chi\Big)f\cdot f+gg^*+hh^*=0,\\ \Big[\mathrm{i}D_T+\dfrac{1}{2}D_X^2+\chi\Big]h\cdot f=0,\end{cases}\tag{3.21}$$

这里，我们引进了参数 χ 来寻找方程 (3.18) 的暗孤子解.

为了求得方程 (3.18) 的暗亮单孤子解，根据文 [4], 将函数 f, g 和 h 做如下展开：

$$g=g_0(1+\epsilon^2g_2),\quad h=\epsilon h_1,\quad f=1+\epsilon^2f_2.\tag{3.22}$$

将 (3.22) 代入双线性方程 (3.21), 类似前面的计算, 可以求得函数 g_0, g_2, h_1, f_2 如下:

$$\begin{aligned} &g_0 = \tau_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}[d_1 X + (\chi - d_1^2/2)T]}, \quad h_1 = \alpha_1 \mathrm{e}^{\xi_1}, \\ &f_2 = \mu_1 \mathrm{e}^{\xi_1 + \xi_1^*}, \quad g_2 = -\frac{\gamma_1}{\gamma_1^*} \mu_1 \mathrm{e}^{\xi_1 + \xi_1^*}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

这里, τ_0, α_1 均为复常数, d_1 是一个实常数, 参数 $\chi = -|\tau_0|^2$ 且 $\xi_1 = \theta_1 X + \mathrm{i}(\frac{\theta_1{}^2}{2} + \chi)T$, 其中 θ_1 是一个复常数, γ_1 和 μ_1 满足

$$\gamma_1 = \theta_1 - \mathrm{i}d_1, \quad \mu_1 = |\alpha_1|^2 \Big[\frac{|\tau_0|^2 (\gamma_1 + \gamma_1^*)^2}{\gamma_1 \, \gamma_1^*} - (\theta_1 + \theta_1^*)^2\Big]^{-1}. \tag{3.24}$$

所以, 方程 (3.18) 的暗亮单孤子解为

$$U = \tau_0 \frac{1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_1^*} \mu_1 \mathrm{e}^{\xi_1 + \xi_1^*}}{1 + \mu_1 \mathrm{e}^{\xi_1 + \xi_1^*}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}[d_1 X + (\chi - d_1^2/2)T]}, \quad V = \frac{\alpha_1 \mathrm{e}^{\xi_1}}{1 + \mu_1 \mathrm{e}^{\xi_1 + \xi_1^*}}. \tag{3.25}$$

为了求得方程 (3.18) 的暗亮双孤子解, 将 (3.21) 中的函数 f, g 和 h 做如下展开:

$$g = g_0(1 + \epsilon^2 g_2 + \epsilon^4 g_4), \quad h = \epsilon h_1 + \epsilon^3 h_3, \quad f = 1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^4 f_4. \tag{3.26}$$

经过复杂的计算, 可得方程 (3.18) 的暗亮双孤子解如下:

$$U = g_0 \frac{1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_1^*} \mu_{11} \mathrm{e}^{\xi_1 + \xi_1^*} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2^*} \mu_{12} \mathrm{e}^{\xi_1 + \xi_2^*} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1^*} \mu_{21} \mathrm{e}^{\xi_2 + \xi_1^*} - \frac{\gamma_2}{\gamma_2^*} \mu_{22} \mathrm{e}^{\xi_2 + \xi_2^*} + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1^* \gamma_2^*} R \mathrm{e}^{\xi_1 + \xi_1^* + \xi_2 + \xi_2^*}}{1 + \mu_{11} \mathrm{e}^{\xi_1 + \xi_1^*} + \mu_{12} \mathrm{e}^{\xi_1 + \xi_2^*} + \mu_{21} \mathrm{e}^{\xi_2 + \xi_1^*} + \mu_{22} \mathrm{e}^{\xi_2 + \xi_2^*} + R \mathrm{e}^{\xi_1 + \xi_1^* + \xi_2 + \xi_2^*}}, \tag{3.27}$$

$$V = \frac{\mathrm{e}^{\xi_1} + \mathrm{e}^{\xi_2} + \nu_{12} \mu_{11} \mu_{21} \mathrm{e}^{\xi_1 + \xi_1^* + \xi_2} + \nu_{21} \mu_{12} \mu_{22} \mathrm{e}^{\xi_2 + \xi_2^* + \xi_1}}{1 + \mu_{11} \mathrm{e}^{\xi_1 + \xi_1^*} + \mu_{12} \mathrm{e}^{\xi_1 + \xi_2^*} + \mu_{21} \mathrm{e}^{\xi_2 + \xi_1^*} + \mu_{22} \mathrm{e}^{\xi_2 + \xi_2^*} + R \mathrm{e}^{\xi_1 + \xi_1^* + \xi_2 + \xi_2^*}}, \tag{3.28}$$

这里, $\xi_1 = \theta_1 X + \mathrm{i}(\frac{\theta_1{}^2}{2} + \chi)T, \xi_2 = \theta_2 X + \mathrm{i}(\frac{\theta_2{}^2}{2} + \chi)T, \gamma_1 = \theta_1 - \mathrm{i}d_1, \gamma_2 = \theta_2 - \mathrm{i}d_2, \chi = -|\tau_0|^2$ 且

$$\begin{aligned} &\mu_{ij} = \Big[\frac{|\tau_0|^2 (\gamma_i + \gamma_j^*)^2}{\gamma_i \, \gamma_j^*} - (\theta_i + \theta_j^*)^2\Big]^{-1}, \\ &\nu_{ij} = (\theta_i - \theta_j)^2 \Big[\frac{|\tau_0|^2}{\gamma_i \gamma_j} + 1\Big], \quad R = \mu_{11} \mu_{22} |\nu_{12} \mu_{12}|^2, \end{aligned}$$

其中 d_1, d_2 均为实常数, θ_1, θ_2 和 τ_0 均为复常数.

在这一节, 利用 Hirota 双线性方法我们分别构造了方程 (2.10)–(2.11) 的精确的显式亮亮孤子解和方程 (2.12) 的显式暗亮孤子解. 通过这些构造可以发现对于方程 (2.9) 中的不同系数 κ_1 和 κ_2 可以得到不同类型的向量孤子解. 另外, 利用相同程序我们也可以得到方程 (2.10)–(2.12) 的向量 3-孤子解和向量 N-孤子解. 但是, 在光纤通讯的实际应用中, 研究双孤子的碰撞过程足以说明问题.

4 结　论

总之, 本文利用延拓结构和 Hirota 双线性方法研究了变系数广义耦合非线性 Schrödinger 方程. 得到了 3 组新的变系数可积耦合非线性 Schrödinger 方程 (2.10)–(2.12) 及其线性谱问题, 并利用 Hirota 双线性方法求得了它们的单、双向量孤子解, 它们的其他形式的精确解将会在将来的研究中求得.

众所周知, Wronskian 技巧 [22−24] 是求解可积非线性 Schrödinger 方程的有效方法, 并且我们知道经典的非线性 Schrödinger 方程拥有双 Wronskian 解. 我们认为本文得到的 3 个可积耦合非线性 Schrödinger 方程 (2.10)–(2.12) 可能拥有双 Wronskian 解. 所以, 进

一步的问题是方程 (2.10)–(2.12) 是否的确存在双 Wronskian 解，如果存在，怎么构造它们．另外，方程 (2.10)–(2.12) 的孤子解的动力学行为和潜在的物理应用也等待我们继续研究．

参 考 文 献

[1] Hasegawa A. Optical solitons in fibers [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[2] Hasegawa A, Kodama Y. Solitons in optical communication [M]. Oxford: Oxford University Press, 1995.

[3] Sheppard A P, Kivshar Y S. Polarized dark solitons in isotropic Kerr media [J]. *Phys Rev E*, 1997, 55:4773–4782.

[4] Radhakrishnan R, Lakshmanan M. Bright and dark soliton solutions to coupled nonlinear Schrödinger equations [J]. *J Phys A: Math Gen*, 1995, 28:2683–2692.

[5] Ma W X, Chen M. Direct search for exact solutions to the nonlinear Schrödinger equation [J]. *Appl Math Compu*, 2009, 215:2835–2842.

[6] Wahlquist H D, Estabrook F B. Prolongation structures of nonlinear evolution equations [J]. *J Math Phys*, 1975, 16:1–7.

[7] Dodd R, Fordy A P. On the integrability of a system of coupled KdV equations [J]. *Phys Lett A,* 1982, 89:168–170.

[8] Finley J D III. The Robinson-Trautman type III prolongation structure contains K_2 [J]. *Commun Math Phys*, 1996, 178:375–390.

[9] Hoenselaerst C, Schief W K. Prolongation structures for Harry Dym type equations and Bäcklund transformations of cc ideals [J]. *J Phys A: Math Gen*, 1992, 25:601–622.

[10] Wu K, Guo H Y, Wang S K. Prolongation structures of nonlinear systems in higher dimensions [J]. *Comm Theoret Phys*, 1983, 2:1425–1437.

[11] Shadwick W F. The KdV prolongation algebra [J]. *J Math Phys*, 1980, 21:454–461.

[12] Bryant R L, Chern S S, Gardner R B, et al. Exterior differential systems [M]//Mathematical Sciences Research Institute Publications, 18. New York: Springer-Verlag, 1991.

[13] Ivey T, Landsberg J. Cartan for beginners [M]//Graduate Studies in Mathematics, 61. Providence: American Mathematical Society, 2003.

[14] Humphreys J E. Introduction to Lie algebras and representation theory [M]. GTM, 9. New York: Springer-Verlag, 1972.

[15] Lü X, Tian B, Xua T, et al. Analytical study of the nonlinear Schrödinger equation with an arbitrary linear time-dependent potential in quasi-one-dimensional Bose-Einstein [J]. *Ann Phys*, 2008, 323:2554–2565.

[16] Li Z D, Li Q Y, Hu X H, et al. Hirota method for the nonlinear Schrödinger equation with an arbitrary linear time-dependent potential [J]. *Ann Phys*, 2007, 322:2545–2553.

[17] Hirota R. The direct method in soliton theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

[18] Hu X B, Wang D L, Tam H W. Lax pairs and Bäcklund transformations for a coupled Ramani equation and its related system [J]. *Appl Math Lett*, 2000, 13:45–48.

[19] Ohta Y, Nimmo J J C, Gilson C R. A bilinear approach to a Pfaffian self-dual Yang-Mills equation [J]. *Glasg Math J A*, 2001, 43:99–108.

[20] Ma W X, Fan E G. Linear superposition principle applying to Hirota bilinear equations [J]. *Comput Math Appl*, 2011, 61:950–959.

[21] Ma W X, Zhou R G. Adjoint symmetry constraints of multicomponent AKNS equations [J]. *Chin Ann Math*, 2002, 23B:373–384.

[22] Freeman N C, Nimmo J J C. Soliton solutions of the Korteweg-de Vries and Kadomtsev-Petviashvili equations: the Wronskian technique [J]. *Phys Lett A*, 1983, 95:1–3.

[23] Ma W X, You Y C. Solving the Korteweg-de Vries equation by its bilinear form: Wronskian solutions [J]. *Trans Amer Math Soc*, 2005, 357:1753–1778.

[24] Ma W X, He J S, Li C X. A second Wronskian formulation of the Boussinesq equation [J]. *Nonlinear Anal*, 2009, 70:4245–4258.

New Integrable Variable-Coefficient Coupled Nonlinear Schrödinger Equations and Their Soliton Solutions

WANG Dengshan[1] CHEN Jing[2]

[1]School of Science, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100192, China. E-mail: wangdsh1980@yahoo.com.cn
[2]School of Applied Mathematics, Central University of Finance and Economics, Beijing 100081, China. E-mail: chenjingma@cufe.edu.cn

Abstract A generalized variable-coefficient coupled nonlinear Schrödinger equation is studied by the prolongation structure and the Hirota's method. Three new integrable variable-coefficient coupled nonlinear Schrödinger equations and their linear spectral problems (Lax pairs) are derived. Then the one- and two-vector soliton solutions to these integrable equations are obtained by means of Hirota's method. These vector solutions may have important applications in the optical soliton communications.

Keywords Prolongation structure, Lax pair, Hirota's method, Vector solitons, Coupled nonlinear Schrödinger equation
2000 MR Subject Classification 35Q51, 35Q55, 37K10

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 33 No. 2, 2012
by ALLERTON PRESS, INC., USA