数 学 年 刊
2015, 36A(3):265–276
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2015.0025

带衰退记忆的经典反应扩散方程的强全局吸引子*

汪 璇[1] 段奋霞[1] 马 群[1] 杨 光[2]

提要 当任意阶多项式增长的非线性项为耗散，且外力项仅属于 $L^2(\Omega)$ 时，研究了带衰退记忆的经典反应扩散方程的解在强拓扑空间 $H_0^1(\Omega)\times L_\mu^2(\mathbb{R}^+;D(A))$ 的长时间行为. 应用抽象函数理论、半群理论以及新的估计技巧，在拓扑空间 $H_0^1(\Omega)\times L_\mu^2(\mathbb{R}^+;D(A))$ 上，验证了强解半群的渐近紧性并且证明了强全局吸引子的存在性.

关键词 经典反应扩散方程，强全局吸引子，任意阶多项式增长，衰退记忆
MR (2000) 主题分类 34Q35, 35B40, 35B41
中图法分类 O175.27, O175.29
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2015)03-0265-12

1 引 言

在本文中，我们考虑了带有衰退记忆的经典反应扩散方程解的渐近性行为：

$$\begin{cases} u_t-\Delta u-\displaystyle\int_0^\infty k(s)\Delta u(t-s)\mathrm{d}s+f(u)=g(x), & (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+,\\ u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ t\in\mathbb{R}^+,\\ u(x,t)=u_0(x,t), & x\in\Omega,\ t\leqslant 0,\end{cases} \tag{1.1}$$

其中 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 上带有光滑边界的有界域. 关于外力项 g, 设 $g(x)\in L^2(\Omega)$. 对于非线性项，设 f 为 C^1 函数且满足：存在正常数 l, 使得

$$f'(s)\geqslant -l,\quad \forall s\in\mathbb{R} \tag{1.2}$$

且

$$C_1|s|^p-C_0\leqslant f(s)s\leqslant C_2|s|^p+C_0,\quad p\geqslant 0,\ s\in\mathbb{R}, \tag{1.3}$$

这里常数 $C_i\ (i=0,1,2)$ 均为正数.

方程中衰退记忆对能量衰退的影响通过函数 $\Delta u(\cdot)$ 和记忆核函数 $k(\cdot)$ 的线性卷积项来体现. 如同文 [1], 设记忆核函数 $k(\cdot)\in C^2(\mathbb{R}^+),\ k(s)\geqslant 0,\ k'(s)\leqslant 0,\ \forall s\in\mathbb{R}^+$. 另外，设记忆核函数 $\mu(s)=-k'(s)$ 且满足

$$\mu\in C^1(\mathbb{R}^+)\cap L^1(\mathbb{R}^+),\quad \mu(s)\geqslant 0,\ \mu'(s)\leqslant 0,\quad \forall s\in\mathbb{R}^+, \tag{1.4}$$

$$\mu'(s)+\delta\mu(s)\leqslant 0,\quad \forall s\geqslant 0, \tag{1.5}$$

本文 2014 年 7 月 2 日收到， 2015 年 1 月 26 日收到修改稿.
[1]西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070.
E-mail: wangxuan@nwnu.edu.cn; 980866580@qq.com; 1120354557@qq.com
[2]兰州理工大学经济管理学院，兰州 730050. E-mail: 305683617@qq.com
*本文受到甘肃省自然科学基金（No. 145RJZA112）和国家自然科学基金（No. 11361053, No. 11201204, No. 11261053）的资助.

其中 δ 为正常数. (1.5) 蕴含着

$$0 \leqslant \mu(s) \leqslant \mu(0)\mathrm{e}^{-\delta s}, \quad 0 \leqslant k(s) \leqslant \frac{\mu(0)}{\delta}\mathrm{e}^{-\delta s} \tag{1.6}$$

成立, 因此记忆核函数 $k(s)$ 与 $\mu(s)$ 均沿指数速度衰退于零. 这种具有衰退记忆的长时间动力学行为成为我们研究的主要问题.

当记忆项被略去时 $(k \equiv 0)$, 方程 (1.1) 成为通常的经典反应扩散方程. 近年来许多学者和专家都在从事研究经典反应扩散方程解的渐近性行为 [2–7]. 例如, 在文 [6] 中, 非线性项满足任意阶多项式增长, 且当外力项 $g \in H^{-1}(\Omega)$ 或 $g \in L^2(\Omega)$ 时, 作者研究并且证明了在空间 $L^p(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 或 $L^{2p-2}(\Omega) \cap H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 上全局吸引子的存在性.

当记忆项被包含时, 方程 (1.1) 成为我们将要研究的问题并且它在文 [8] 被提及和研究, 同时类似的问题也在文 [9–10] 中被讨论研究. 方程 (1.1) 描述了热流在衰退记忆影响下的同类的、固定的和各向同性的黏弹性热传导体中的传导过程. 这种合成的线性模型来源于文 [11] 中 Coleman 和 Gurtin 建立的已经为人广泛接受的带记忆的热流理论框架. 方程 (1.1) 能量耗散的速度快于通常的经典反应扩散方程. 热能的传导过程不仅受到现时外力的影响还受到历史外力的影响 (这种影响随着时间的流逝而逐渐衰退).

带有衰退记忆的经典反应扩散方程 (即热传导方程) 解的渐近性行为已经被许多研究者考虑和探讨, 参见文 [12–16] 以及相应文献. 文 [12] 中对于带记忆的热传导方程在空间 $L^2 \times L_\mu^2(\mathbb{R}^+; H_0^1)$ 中得到了一致吸收集的存在性结果. 文 [13] 对于带记忆的双曲方程, 在非线性项次临界增长时, 在空间 $H_0^1 \times L^2 \times L_\mu^2(\mathbb{R}^+; H_0^1)$ 中获得了一致吸收集的存在性. 文 [14] 对于带记忆的热传导方程当非线性项次临界增长时, 在空间 $L^2 \times L_\mu^2(\mathbb{R}^+; H_0^1)$ 及 $H_0^1 \times L_\mu^2(\mathbb{R}^+; H^2 \cap H_0^1)$ 上获得了有界吸收集的存在性. 文 [16] 对于带记忆的发展方程, 分析了轨道吸引子和全局吸引子的关系, 并且通过轨道吸引子得到了半群在相空间半群左平移时全局吸引子的存在性. 在这些工作中尤为值得一提的是文 [15], 文 [15] 详细讨论了方程 (1.1) 在非线性项超临界增长时解的长时间动力学行为, 借助轨道吸引子在空间 $L^2(\Omega)$ 上获得了全局吸引子的存在性.

在以上工作基础上, 关于方程 (1.1) 当非线性项超临界增长时, 我们在强拓扑空间 $H_0^1(\Omega) \times L_\mu^2(\mathbb{R}^+; D(A))$ 中继续研究全局吸引子的存在性. 在研究过程中发现存在许多本质性的研究困难. 首先, 由于方程 (1.1) 包含记忆项, 相对于通常的反应扩散方程的一元解空间, 我们将要构造更加复杂的二元强解空间, 并且在此空间上作先验估计. 其次, 需要注意的是, 验证强解半群的连续性、紧性或者渐近紧性是非常困难的, 并且由于非线性项超临界增长, 我们不能使用试验函数 $(I - P_m)Au$ 来验证强解半群的渐近紧性. 最后, 如果不能将文 [6] 的估计技巧和证明方法应用到带记忆的经典反应扩散方程, 我们将无法证明记忆项的紧性和强解半群的紧性. 因此, 怎样克服这些本质性困难将成为我们研究的关键所在.

在本文中, 我们将用另外一种方法直接研究方程 (1.1) 在更高正则性的空间 $H_0^1(\Omega) \times L_\mu^2(\mathbb{R}^+; D(A))$ 上全局吸引子的存在性. 相对于文 [15], 我们不仅没有增加任何新的条件, 而且削弱了文 [15] 中 $(f'(u) \geqslant -D,\ D < \lambda_1 + \delta)$ 的条件. 在本文中仅设 D 为任意的正常数. 在这些很弱的条件下, 我们必须另辟新径, 利用先进的理论工具和估计技巧来攻克由任意阶多项式增长的非线性项和衰退记忆项带来的本质性困难. 最终, 我们应用半群理论和抽象函数理论, 成功地克服了这些困难并且验证了强解半群的紧性, 继而在强拓扑空间 $H_0^1(\Omega) \times L_\mu^2(\mathbb{R}^+; D(A))$ 中, 证明了全局吸引子的存在性.

本文的主要结果为定理 3.4 (强全局吸引子).

在随后的论述中，为了简便起见，定义 C (或者 C_i) 为任意正常数.

本文结构如下：在第 2 节中，我们给出 (回顾) 了一些预备知识，包括将要使用的记号、关于非线性项的假设以及动力系统的一些抽象结果. 在第 3 节中，我们证明了主要结果，即方程 (1.1) 的解生成的动力系统的强全局吸引子的存在性.

2 记号和预备结果

本节主要介绍将用到的记号、函数空间和一些预备结果.

借助文 [17] 的思想，我们将引入一个反映 (1.1) 过往历史的新变量，其定义为

$$\eta^t(x,s)=\int_0^s u(x,t-r)\mathrm{d}r,\quad s\geqslant 0, \tag{2.1}$$

且由此得

$$\partial_t\eta^t(x,s)=u(x,t)-\partial_s\eta^t(x,s),\quad s\geqslant 0. \tag{2.2}$$

令 $\mu(s)=-k'(s)$ 且 $k(\infty)=0$, 方程 (1.1) 可转化为

$$\begin{cases}u_t-\Delta u-\displaystyle\int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta^t(s)\mathrm{d}s+f(u)=g(x),\\ \eta_t^t=-\eta_s^t+u.\end{cases} \tag{2.3}$$

相应的初-边值条件为

$$\begin{cases}u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ t\geqslant 0,\\ \eta^t(x,s)=0, & (x,s)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}^+,\ t\geqslant 0,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega,\\ \eta^0(x,s)=\eta_0(x,s)=\displaystyle\int_0^s u_0(x,-r)\mathrm{d}r, & (x,s)\in\Omega\times\mathbb{R}^+,\end{cases} \tag{2.4}$$

这里 $u(\cdot)$ 满足以下条件：存在两个正数 $\mathcal{R}$ 和 $\varrho=\min\{\frac{\delta}{2},\frac{\lambda_1}{2}\}$, 其中 λ_1 为 $-\Delta$ 的第一特征值，使得

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\varrho s}\|\nabla u(-s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant\mathcal{R}.$$

我们将使用文 [18] 中的记号. 设 $A=-\Delta$ 的定义域为 $D(A)=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$. 考虑 Hilbert 空间族 $D(A^{\frac{s}{2}})$, $s\in\mathbb{R}$, 并且赋予它们相应的内积和范数:

$$\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{D(A^{\frac{s}{2}})}=\langle A^{\frac{s}{2}}\cdot,A^{\frac{s}{2}}\cdot\rangle\quad 且\quad \|\cdot\|_{D(A^{\frac{s}{2}})}=\|A^{\frac{s}{2}}\cdot\|,$$

这里 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 为 $L^2(\Omega)$ 空间的内积和范数. 因此有紧嵌入

$$D(A^{\frac{s}{2}})\hookrightarrow D(A^{\frac{r}{2}}),\quad 对于任意的\ s>r,$$

以及连续嵌入

$$D(A^{\frac{s}{2}})\hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2s}}(\Omega),\quad 对于所有的\ s\in\Big[0,\frac{n}{2}\Big). \tag{2.5}$$

为了使用方便，引入以下记号：对于 $0\leqslant s\leqslant 3$, 记

$$\mathcal{H}_s=D(A^{\frac{s}{2}}),\quad 相应范数\ \|\cdot\|_{\mathcal{H}_s}=\|\cdot\|_{D(A^{\frac{s}{2}})},$$

则 $\mathcal{H}_0=L^2(\Omega)$, $\mathcal{H}_1=H_0^1(\Omega)$ 且 $\mathcal{H}_2=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$.

根据记忆核函数 $\mu(\cdot)$ 满足的条件，当 $0 \leqslant r \leqslant 3$ 时，设 $L^2_\mu(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_r)$ 为定义于 $\mathbb{R}^+$ 上取值于 $\mathcal{H}_r$ 的一族 Hilbert 空间， $\varphi:\mathbb{R}^+ \to \mathcal{H}_r,\ 0<r<3$, 并且赋予相应的内积和范数：

$$\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle_{\mu,\mathcal{H}_r} = \int_0^\infty \mu(s)\langle\varphi_1(s),\varphi_2(s)\rangle_{\mathcal{H}_r}\mathrm{d}s,$$
$$\|\varphi\|_{\mu,\mathcal{H}_r} = \int_0^\infty \mu(s)\|\varphi(s)\|^2_{\mathcal{H}_r}\mathrm{d}s.$$

定义一族 Hilbert 空间

$$\mathcal{E}_r = \mathcal{H}_{r-1}\times L^2_\mu(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_r),$$

并且赋予范数

$$\|z\|_{\mathcal{E}_r} = \|(u,\eta^t)\|_{\mathcal{E}_r} = \Big(\frac{1}{2}(\|u\|^2_{\mathcal{H}_{r-1}} + \|\eta^t\|^2_{\mu,\mathcal{H}_r})\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

为了便于估计，我们还需以下预备结果 (见 [19–21]).

引理 2.1 记 $I=[0,T], \forall T>0$. 设记忆核函数 $\mu(s)$ 满足 (1.4)–(1.5), 那么对于任意的 $\eta^t \in C(I;L^2_\mu(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_r))$, $0<r<3$, 存在常数 $\delta>0$, 使得

$$\langle\eta^t,\eta^t_s\rangle_{\mu,\mathcal{H}_r} \geqslant \frac{\delta}{2}\|\eta^t\|^2_{\mu,\mathcal{H}_r}. \tag{2.6}$$

我们还需要以下结果来证明强解半群的渐近紧性和强全局吸引子的存在性.

以下结果出自文 [22–25].

定义 2.1 [22–23] 设 X 为 Banach 空间，B 为 X 中的有界集. 定义于 $X\times X$ 上的函数 $\phi(\cdot,\cdot)$ 称为 $B\times B$ 上的收缩函数. 如果对于任意的序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset B$, 存在子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{x_n\}_{n=1}^\infty$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\phi(x_{n_k},\, x_{n_l}) = 0,$$

$\mathfrak{C}(B)$ 表示定义于 $B\times B$ 上的收缩函数的集合.

引理 2.2 [22–25] 设 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 为 Banach 空间 $(X,\|\cdot\|)$ 上的半群，并存在有界吸收集 B_0. 进一步，设对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $T=T(B_0,\varepsilon)$ 以及 $\phi_T(\cdot,\cdot)\in\mathfrak{C}(B_0)$, 使得

$$\|S(T)x - S(T)y\| \leqslant \varepsilon + \phi_T(x,\, y), \quad \forall x,y\in B_0,$$

其中 ϕ_T 依赖于 T. 那么 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在 X 中是渐近紧的, 即对于任意的有界序列 $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ 和 $\{t_n\}$, 当 $n\to\infty$ 时 $t_n\to\infty$, $\{S(t_n)y_n\}_{n=1}^\infty$ 在 X 中相对紧.

3 $\mathcal{E}_2$ 空间的全局吸引子

3.1 强解的存在唯一性

首先，对于具有衰退记忆的动力系统的强解做如下定义 (见文 [19] 中的波方程解的定义).

定义 3.1 记 $I=[0,T], \forall T>0$. 设 $g\in L^2(\Omega)$ 且 $z_0\in\mathcal{E}_2$. 二元组 $z=(u,\eta^t)$ 满足

$$u\in L^2([0,T];\mathcal{H}_2)\cap L^p([0,T];L^p(\Omega)), \quad \eta^t \in L^2(I;L^2_\mu(\mathbb{R}^+;D(A)));$$
$$\eta^t_t+\eta^t_s \in L^\infty(I;L^2_\mu(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_0))\cap L^2(I;L^2_\mu(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_1)).$$

称 z 为问题 (2.3)–(2.4) 当初值 $z(0)=z_0$ 时于时间区间 I 上的强解，如果

$$\begin{aligned}&\langle u_t,\omega\rangle+\langle u,\omega\rangle_{\mathcal{H}_1}+\langle\eta^t,\omega\rangle_{\mu,\mathcal{H}_1}+\langle f(u),\omega\rangle=\langle g,\omega\rangle,\\&\langle\eta_t^t+\eta_s^t,\varphi\rangle_{\mu,\mathcal{H}_1}=\langle u,\varphi\rangle_{\mu,\mathcal{H}_1}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

对于所有的 $\omega\in\mathcal{H}_1$, $\varphi\in L^2_\mu(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_1)$ 以及 a.e. $t\in I$ 成立.

应用文 [19, 21] 中的 Galerkin 逼近方法，我们可以得到方程 (2.3)–(2.4) 的强解在 $\mathcal{E}_2$ 的存在唯一性.

定理 3.1 (强解的存在唯一性) 设 (1.2)–(1.3) 且 (1.4)–(1.5) 成立， $g\in L^2(\Omega)$. 那么对于任意给定的初值 $z_0\in\mathcal{E}_2$ 和任意的 $T>0$, 方程 (2.3)–(2.4) 在 $\mathcal{E}_2$ 存在唯一的解 $z=(u,\eta^t)$, 满足

$$\begin{aligned}&u\in L^2([0,T];\mathcal{H}_2)\cap L^p([0,T];L^p(\Omega)),\\&z\in L^2([0,T];\mathcal{E}_2)\cap L^\infty([0,\infty);\mathcal{E}_2);\end{aligned}\tag{3.2}$$

并且映射 $z_0\to z(t)$ 在 $\mathcal{E}_2$ 上是强弱连续的.

根据定理 3.1, 可以定义空间 $\mathcal{E}_2$ 上的解半群，即

$$\begin{aligned}&S(t):\ \mathcal{E}_2\to\mathcal{E}_2,\\&z_0=(u_0,\eta^0)\to(u(t),\eta^t)=S(t)z_0.\end{aligned}$$

在本节的余下部分，我们用 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 表示方程 (2.3)–(2.4) 在空间 $\mathcal{E}_2$ 上的解半群.

3.2 空间 $\mathcal{E}_2$ 中有界吸收集的存在性

为了证明 $\mathcal{E}_2$ 中有界吸收集的存在性，我们首先对方程 (2.3)–(2.4) 的解在空间 $\mathcal{E}_1$ 上做先验估计.

引理 3.1 设 $z(t)$ 为方程 (2.3)–(2.4) 在空间 $\mathcal{E}_1$ 上的解，初值 $z_0\in B_0$, B_0 为 $\mathcal{E}_1$ 中的有界子集. 如果非线性项 f 满足 (1.2)–(1.3), $g\in H^{-1}(\Omega)$, (1.4)–(1.5) 成立，那么存在正常数 μ_0, 对于 $\mathcal{E}_1$ 中的任意有界子集 B_0, 存在 $t_0=t_0(\|B_0\|_{\mathcal{E}_1})$, 使得

$$\|z(t)\|^2_{\mathcal{E}_1}=\frac{1}{2}(\|u\|^2_{\mathcal{H}_0}+\|\eta^t\|^2_{\mu,\mathcal{H}_1})\leqslant{\mu_0}^2,\quad t\geqslant t_0=t_0(\|B_0\|_{\mathcal{E}_1}).\tag{3.3}$$

证 用 u 与方程 (2.3) 在空间 $\mathcal{H}_0$ 上做内积，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\|\nabla u\|^2-\int_0^\infty\mu(s)\langle\Delta\eta^t(s),u(t)\rangle\mathrm{d}s+\langle f(u),u\rangle=\langle g(x),u\rangle.\tag{3.4}$$

利用等式 $u(x,t)=\eta_t^t(x,s)+\eta_s^t(x,s)$, 将上式的积分项进行变换，可得

$$\begin{aligned}&-\int_0^\infty\mu(s)\langle\Delta\eta(t,s),u(t)\rangle\mathrm{d}s\\&=-\int_0^\infty\mu(s)\langle\Delta\eta(t,s),\eta_t^t(x,s)+\eta_s^t(x,s)\rangle\mathrm{d}s\\&=\int_0^\infty\mu(s)\langle\nabla\eta(t,s),\nabla\eta_t^t(x,s)+\nabla\eta_s^t(x,s)\rangle\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{3.5}$$

关于 x 在空间 Ω 上做积分，有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mu(s)\langle\nabla\eta(t,s),\nabla\eta_t^t(x,s)\rangle\mathrm{d}s &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \mu(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\nabla\eta(t,s)|^2\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^\infty \mu(s)|\nabla\eta(t,s)|^2\mathrm{d}s. \end{aligned}\tag{3.6}$$

应用引理 2.1 可知

$$\int_0^\infty \mu(s)\langle\nabla\eta(t,s),\nabla\eta_s^t(x,s)\rangle\mathrm{d}s \geqslant \frac{\delta}{2}\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2.\tag{3.7}$$

利用条件 (1.3), 可得

$$\langle f(u),u\rangle \geqslant C_1\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x - C_0|\Omega|,\tag{3.8}$$

且

$$\langle g(x),u\rangle \leqslant \|g\|_{H^{-1}}\|\nabla u\| \leqslant \frac{1}{2}\|g\|_{H^{-1}}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2.\tag{3.9}$$

将以上估计代入 (3.4), 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|^2+\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2) + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{\delta}{2}\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2 + C_1\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x\\ \leqslant{}& \frac{1}{2}\|g\|_{H^{-1}}^2 + C_0|\Omega|.\end{aligned}\tag{3.10}$$

应用 Poincaré 不等式，且取 $\alpha=\min\{\frac{\lambda_1}{2},\delta\}$, 有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|^2+\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2) + \alpha(\|u\|^2+\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2) \leqslant \frac{1}{2}\|g\|_{H^{-1}}^2 + C_0|\Omega|.$$

根据 Gronwall 引理可知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\|u(t)\|^2+\|\eta^t(s)\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2)\\ \leqslant{}& \frac{1}{2}(\|u(0)\|^2+\|\eta^0(s)\|_{\mu,\mathcal{H}_1}^2)\mathrm{e}^{-\alpha t} + \frac{\frac{1}{2}\|g\|_{H^{-1}}^2 + C_0|\Omega|}{\alpha}.\end{aligned}$$

故

$$\|z(t)\|_{\mathcal{E}_1}^2 \leqslant \|z(0)\|_{\mathcal{E}_1}^2\mathrm{e}^{-\alpha t} + C.\tag{3.11}$$

设 $\|z(0)\|_{\mathcal{E}_1}^2 \leqslant R$, 存在 $t\geqslant t_0=t_0(\|B_0\|_{\mathcal{E}_1})$, 当 $t\leqslant t_0$ 时，有

$$\|z(t)\|_{\mathcal{E}_1} \leqslant \mu_0.$$

引理 3.1 得证.

然后我们对方程 (2.3)–(2.4) 的解在空间 $\mathcal{E}_2$ 上做先验估计.

引理 3.2 设 $z(t)$ 为方程 (2.3)–(2.4) 在空间 $\mathcal{E}_2$ 中对应于初值 $z_0\in B_1$ 的解，B_1 为空间 $\mathcal{E}_2$ 中的有界子集. 若非线性项 f 满足 (1.2)–(1.3), 外力项 $g\in L^2(\Omega)$, (1.4)–(1.5) 成立，则存在正常数 μ_1, 使得对于任意有界 (于 $\mathcal{E}_2$) 子集 B_1, 存在 $t_1=t_1(\|B_1\|_{\mathcal{E}_2})$, 有

$$\|z(t)\|_{\mathcal{E}_2}^2 = \frac{1}{2}(\|u\|_{\mathcal{H}_1}^2+\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_2}^2) \leqslant \mu_1^2,\quad t\geqslant t_1=t_1(\|B_1\|_{\mathcal{E}_2}).\tag{3.12}$$

证　用 $-\Delta u$ 与方程 (2.3) 在 L^2 做内积，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{\mathcal{H}_1}^2+\|\Delta u\|^2-\int_0^\infty \mu(s)\langle\Delta\eta^t(s),-\Delta u(t)\rangle\mathrm{d}s+\langle f(u),-\Delta u\rangle=\langle g(x),-\Delta u\rangle. \quad (3.13)$$

利用等式 $u(x,t)=\eta_t^t(x,s)+\eta_s^t(x,s)$, 可以得到

$$\begin{aligned}&-\int_0^\infty \mu(s)\langle\Delta\eta^t(x,s),-\Delta u(t)\rangle\mathrm{d}s\\ =&-\int_0^\infty \mu(s)\langle\Delta\eta^t(x,s),-\Delta\eta_t^t(x,s)-\Delta\eta_s^t(x,s)\rangle\mathrm{d}s\\ =&\int_0^\infty \mu(s)\langle\Delta\eta^t(x,s),\Delta\eta_t^t(x,s)+\Delta\eta_s^t(x,s)\rangle\mathrm{d}s. \quad (3.14)\end{aligned}$$

类似于 (3.6), 有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mu(s)\langle\Delta\eta^t(x,s),\Delta\eta_t^t(x,s)\rangle\mathrm{d}s&=\frac{1}{2}\int_0^\infty\mu(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Delta\eta^t(x,s)|^2\mathrm{d}s\\ &=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^\infty\mu(s)|\Delta\eta^t(x,s)|^2\mathrm{d}s. \quad (3.15)\end{aligned}$$

根据引理 2.1, 易知

$$\int_0^\infty \mu(s)\langle\Delta\eta^t(x,s),\Delta\eta_s^t(x,s)\rangle\mathrm{d}s\geqslant\frac{\delta}{2}\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_2}^2. \quad (3.16)$$

利用 (1.2) 及内插不等式，可得

$$-\langle f(u),-\Delta u\rangle\leqslant l\|\nabla u\|^2\leqslant l(C_\epsilon\|u\|^2+\epsilon\|\Delta u\|^2) \quad (3.17)$$

及

$$\langle g(x),-\Delta u\rangle\leqslant\|g\|\|-\Delta u\|\leqslant\frac{1}{2}\|g\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u\|^2. \quad (3.18)$$

将以上 (3.15)–(3.18) 代入 (3.13), 可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|_{\mathcal{H}_1}^2+\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_2}^2)+\Big(\frac{1}{2}-l\epsilon\Big)\|\Delta u\|^2+\frac{\delta}{2}\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_2}^2\leqslant\frac{1}{2}\|g\|^2+2lC_\epsilon\mu_0^2. \quad (3.19)$$

取 $\beta=\min\{\frac{\lambda_1}{2},\delta\}$, 可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|_{\mathcal{H}_1}^2+\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_2}^2)+\beta(\|u\|_{\mathcal{H}_1}^2+\|\eta^t\|_{\mu,\mathcal{H}_2}^2)\leqslant\frac{1}{2}\|g\|^2+C.$$

根据 Gronwall 引理，得到

$$\frac{1}{2}(\|u(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2+\|\eta^t(s)\|_{\mu,\mathcal{H}_2}^2)\leqslant\frac{1}{2}(\|u(0)\|_{\mathcal{H}_1}^2+\|\eta^0(s)\|_{\mu,\mathcal{H}_2}^2)\mathrm{e}^{-\beta t}+\frac{\frac{1}{2}\|g\|^2+C}{\beta}.$$

故

$$\|z(t)\|_{\mathcal{E}_2}^2\leqslant\|z(0)\|_{\mathcal{E}_2}^2\mathrm{e}^{-\beta t}+C. \quad (3.20)$$

设 $\|z(0)\|_{\mathcal{E}_2}^2\leqslant R$, 当 $t\geqslant t_1=t_1(\|B_1\|_{\mathcal{E}_2})$ 时，有

$$\|z(t)\|_{\mathcal{E}_2}\leqslant\mu_1.$$

根据引理 3.2, 我们可以得到空间 $\mathcal{E}_2$ 中的有界吸收集的存在性，即下面的定理.

定理 3.2　($\mathcal{E}_2$ 的有界吸收集) 设 f 满足 (1.2)–(1.3), $g\in L^2(\Omega)$, (1.4)–(1.5) 成立，则存在正常数 μ_1, 使得对于任意有界子集 $B_1\subset\mathcal{E}_2$, 存在 $t_1=t_1(\|B_1\|_{\mathcal{E}_2})$, 有

$$\|S(t)z_0\|_{\mathcal{E}_2}\leqslant\mu_1,\quad 对于所有的\ t\geqslant t_1\ 且\ z_0\in B_1.$$

3.3 强全局吸引子的存在性

为了证明空间 $\mathcal{E}_2$ 中全局吸引子的存在性，我们还需证明以下预备结果.

引理 3.3 设 $z(t)$ 为方程 (2.3)–(2.4) 在空间 $\mathcal{E}_2$ 中的解. 若 $g \in L^2(\Omega)$, (1.4)–(1.5) 成立且非线性项 $f(u)$ 满足 (1.2)–(1.3), 则存在常数 $N_0 > 0$, 使得

$$\int_t^{t+1} \|\Delta u(s)\|^2 \mathrm{d}s \leqslant N_1, \quad t \geqslant 0. \tag{3.21}$$

证 关于 (3.19) 在 $[t, t+1]$ 上积分，利用 (3.20), 可知

$$(1-2l\epsilon)\int_t^{t+1} \|\Delta u(s)\|^2 \mathrm{d}s + \delta \int_t^{t+1} \|\eta^s(r)\|^2_{\mu,\mathcal{H}_2} \mathrm{d}s \leqslant \|g\| + C, \quad t \geqslant 0. \tag{3.22}$$

因此， (3.21) 成立.

根据无穷维动力系统关于全局吸引子存在性的基本定理 [25−26], 我们还需证明解半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在空间 $\mathcal{E}_2$ 上的渐近紧性.

定理 3.3 设 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 为方程 (2.3)–(2.4) 在能量空间 $\mathcal{E}_2$ 的解生成的解半群. 若非线性项 $f(u)$ 满足条件 (1.2)–(1.3), $g \in L^2(\Omega)$ 并且 (1.4)–(1.5) 成立，则 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在 $\mathcal{E}_2$ 中渐近紧.

证 设 $z_1 = (u_1, \eta_1^t)$ 和 $z_2 = (u_2, \eta_2^t)$ 为方程 (2.3)–(2.4) 的两个解，分别满足初值条件 $z_{10} = (u_{10}, \eta_1^0)$ 且 $z_{20} = (u_{20}, \eta_2^0)$, 且初值属于空间 $\mathcal{E}_2$ 对应于解半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的有界吸收集 B_1. 记

$$w = u_1 - u_2, \quad \xi^t = \eta_1^t - \eta_2^t.$$

则根据 (2.3) 可知

$$\begin{cases} w_t + Aw + \displaystyle\int_0^\infty \mu(s) A\xi^t(s)\mathrm{d}s + f(u_1) - f(u_2) = 0, \\ w|_{\partial\Omega} = 0, \\ w(0) = u_{10} - u_{20}, \\ \xi^0 = \eta_1^0 - \eta_2^0, \\ w(t) = \xi_t^t + \xi_s^t. \end{cases} \tag{3.23}$$

将 (3.23) 与 $-\Delta w(t)$ 在 L^2 作内积，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla w\|^2 + \|\Delta w\|^2 - \int_0^\infty \mu(s)\langle \Delta\xi^t(s), -\Delta w\rangle \mathrm{d}s + \langle f(u_1) - f(u_2), -\Delta w\rangle = 0.$$

定义如下泛函：

$$F(t) = \frac{1}{2}(\|\nabla w\|^2 + \|\xi^t\|^2_{\mu,\mathcal{H}_2}).$$

故

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) &= \int_\Omega \nabla w(t)\nabla w_t(t)\mathrm{d}x + \int_0^\infty \mu(s)\langle \Delta\xi_t^t(s), \Delta\xi^t(s)\rangle \mathrm{d}s \\ &= -\|\Delta w\|^2 - \frac{1}{2}\int_0^\infty \mu(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|\Delta\xi^t(s)|^2 \mathrm{d}s \\ &\quad - \langle f(u_1) - f(u_2), -\Delta w\rangle. \end{aligned} \tag{3.24}$$

根据 (1.2) 可知

$$-\langle f(u_1)-f(u_2),-\Delta w\rangle \leqslant l\|\nabla w\|^2. \tag{3.25}$$

应用引理 2.1, 可得

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty \mu(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|\Delta\xi^t(s)|^2\mathrm{d}s \leqslant -\frac{\delta}{2}\|\xi^t\|^2_{\mu,\mathcal{H}_2}. \tag{3.26}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)+C_\delta F(t) \leqslant l\|\nabla w(t)\|^2, \tag{3.27}$$

其中 $C_\delta=\min\{\delta,2\lambda_1\}$.

对于任意给定的 $T>0$, 将 (3.27) 乘以 $\mathrm{e}^{C_\delta t}$ 并且从 0 到 T 积分，可以得到

$$F(T)\leqslant \mathrm{e}^{-C_\delta T}F(0)+l\mathrm{e}^{-C_\delta T}\int_0^T \mathrm{e}^{C_\delta s}\|\nabla w(s)\|^2\mathrm{d}s. \tag{3.28}$$

对应于引理 2.2, 设

$$\phi_T(z_1,z_2)=l\mathrm{e}^{-C_\delta T}\int_0^T \mathrm{e}^{C_\delta s}\|\nabla u_1(s)-\nabla u_2(s)\|^2\mathrm{d}s. \tag{3.29}$$

随后我们将验证 $\phi_T(\cdot,\cdot)$ 为 $B_1\times B_1$ 中的收缩函数，其中 B_1 为 $\mathcal{E}_2$ 的有界吸收集.

根据定义 2.1, 对于任意序列 $\{z_n^0\}\subset B_1$, 我们仅需证明存在子列 $\{z^0_{n_k}\}_{k=1}^\infty\subset\{z_n^0\}_{n=1}^\infty$, 使得

$$\lim_{l\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_0^T \|\nabla u_{n_l}(s)-\nabla u_{n_m}(s)\|^2\mathrm{d}s=0, \tag{3.30}$$

其中 $u_{n_l}(t)=\Pi_1 S(t)z^0_{n_l}$, $\Pi_1:\ \mathcal{H}_1\times L^2_\mu(\mathbb{R}^+,\mathcal{H}_2)\to\mathcal{H}_1$ 为投影算子.

故我们仅需证明

$$A:=\{u(t),t\in[0,T]:u(t)=\Pi_1S(t)z_0,z_0\in B_1\}\ 在\ L^2([0,T];\mathcal{H}_1)\ 中相对紧. \tag{3.31}$$

首先，关于 (3.19) 在 $[0,T]$ 积分并且利用 (3.21), 可知

$$\int_0^T\|\triangle u(s)\|^2\mathrm{d}s+\delta\int_0^T\|\eta^s(r)\|^2_{\mu,\mathcal{H}_2}\mathrm{d}s\leqslant T\|g\|^2+C,\quad t\geqslant 0. \tag{3.32}$$

故 A 在 $L^2([0,T];\mathcal{H}_2)$ 中有界.

然后，利用 (2.3), 有

$$u_t=\Delta u+\int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta^t(s)\mathrm{d}s-f(u)+g(x). \tag{3.33}$$

显然 $\Delta u\in L^2([0,T];H^{-1})$. 利用条件 (1.3), $f(u)\in L^{\frac{p}{p-1}}([0,T];L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega))$, 因为 $L^q(\Omega)\hookrightarrow H^{-\gamma}(\Omega)$, 所以

$$f(u)\in L^q([0,T];H^{-\gamma}(\Omega)),$$

其中 q 为 p 的对偶数， $p\geqslant 2$, $q>1$, 且 $\gamma>1$.

最后，对于任意的 $v \in \mathcal{H}_1$, 有

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \mu(s)\langle \Delta\eta^t(s), v(t)\rangle \mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^\infty \mu(s)\|\nabla\eta^t(s)\|\cdot\|\nabla v(t)\|\mathrm{d}s \\
&\leqslant \Big(\int_0^\infty \mu(s)\|\nabla\eta^t(s)\|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot\Big(\int_0^\infty \mu(s)\|\nabla v(t)\|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \|\nabla v\|\Big(\int_0^\infty \mu(s)\|\nabla\eta^t(t)\|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot\Big(\int_0^\infty \mu(s)\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

利用 (3.11) 可知

$$\int_0^\infty \mu(s)\Delta\eta^t(s)\mathrm{d}s \in L^\infty_\mu(\mathbb{R}^+; H^{-1}).$$

故 $\partial_t A$ 在 $L^q([0,T]; H^{-\gamma})$ 中有界. 显然， A 在 $L^2([0,T]; \mathcal{H}_1)$ 中相对紧.

根据定理 3.2–3.3, 可以得到下面定理.

定理 3.4 当定理 3.3 的假设成立时，解半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在空间 $\mathcal{E}_2$ 中存在全局吸引子 $\mathcal{A}_1$, 且它在 $\mathcal{E}_2$ 上以 $\mathcal{E}_2$-范数吸引着 $\mathcal{E}_2$ 上的任意有界集.

注 3.1 当外力项仅属于 $L^2(\Omega)$ 时，如果我们在记忆项上增加条件

$$k_0 = \int_0^\infty k(s)\mathrm{d}s, \quad 0 < k_0 < \frac{1}{4}, \tag{3.35}$$

则可以利用实验函数 $(I-P_m)Au$ 来得到 u_t 在 $\mathcal{H}_0$ 的先验估计. 进一步，还可得到方程 (2.3)–(2.4) 的解在 $L^{2p-2}(\Omega)\cap\mathcal{H}_2\cap L^2_\mu(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_2)$ 中的先验估计，所以可以利用文 [6] 中的估计方法和技巧来获得全局吸引子在 $L^{2p-2}(\Omega)\cap\mathcal{H}_2\cap L^2_\mu(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}_2)$ 中的存在性.

致谢 由衷感谢孙春友教授有益的讨论和帮助.

参 考 文 献

[1] Chekroun M D, Plinio F Di, Glatt-Holtz N E, Pata V. Asymptotics of the Coleman-Gurtin model [J]. *Discrete Contin Dyn Syst, Ser S*, 2011, 4(2):351–369.

[2] Sun C Y, Wang S H, Zhong C K. Global attractors for a nonclassical diffusion equation [J]. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2007, 23:1271–1280.

[3] Sun C Y, Yang M H. Dynamics of the nonclassical diffusion equations [J]. *Asympt Anal*, 2008, 59:51–81.

[4] Yang L. Uniform attractors for the closed process and application to the reaction-diffusion equation with dynamical boundary condition [J]. *Nonlinear Anal*, 2009, 71:4012–4025.

[5] Yang L, Yang M H. Long-time behavior of reaction-diffusion equations with dynamical boundary condition [J]. *Nonlinear Anal*, 2011, 74:3876–3883.

[6] Zhong C K, Yang M H, Sun C Y. The existence of global attractors for the norm-to-weak

continuous semigroup and application to the nonlinear reaction-diffusion equations [J]. *Journal of Differential Equations*, 2006, 223:367–399.

[7] Zhong C K, Sun C Y, Niu M F. On the existence of global attractor for a class of infinite dimensional nonlinear dissipative dynamical systems [J]. *Chin Ann Math*, 2005, 26B(3):393–400.

[8] Gurtin M E, Pipkin A. A gengral theory of heat conduction with finite wave speed [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 1968, 31:113–126.

[9] Meixner J. On the linear theory of heat conduction [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 1970, 39:108.

[10] Nunziato J. On heat conduction in materials with memory [J].*Quart Appl Math*, 1971, 29:187–204.

[11] Coleman B D, Gurtin M E. Equipresence and constitutive equations for rigid heat conductors [J]. *Z Angew Math Phys*, 1967, 18:199–208.

[12] Giorgi C, Naso M G, Pata V. Exponential stability in linear heat conduction with memory: A semigroup approach [J]. *Comm Appl Anal*, 2001, 5:121–133.

[13] Giorgi C, Pata V. Asymptotic behavior of a nonlinear hyperbolic heat equation with memory [J]. *Nonlin Diff Eq Appl*, 2001, 8:157–171.

[14] Giorgi C, Pata V, Marzocchi A. Asymptotic behavior of a semilinear problem in heat conduction with memory [J]. *Nonlin Diff Eq Appl*, 1998, 5:333–354.

[15] Chepyzhov V V, Miranville A. On trajectory and global attractors for semilinear heat equations with fading memory [J]. *Indiana University Mathematics Journal*, 2006, 55:119–167.

[16] Chepyzhov V V, Gatti S, Grasselli M, et al. Trajectory and global attractors for evolution equations with memory [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2006, 19:87–96.

[17] Dafermos C M. Asymptotic stability in viscoelasticity [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 1970, 37:297–308.

[18] Pata V, Squassina M. On the strongly damped wave equation [J]. *Comm Math Phys*, 2005, 253:511–533.

[19] Borini S, Pata V. Uniform attractors for a strongly damped wave equations with linear memory [J]. *Asymptot Anal*, 1999, 20:263–277.

[20] Gatti C, Miranville A, Pata V, Zelik S V. Attractors for semilinear equations of viscoelasticity with very low dissipation [J]. *R Mountain J Math*, 2008, 38:1117–1138.

[21] Pata V, Zucchi A. Attractors for a damped hyperbolic equation with linear memory [J]. *Adv Math Sci Appl*, 2001, 11(2):505–529.

[22] Sun C Y, Cao D M, Duan J Q. Non-autonomous wave dynamics with memory–asymptotic regularity and uniform attractor [J]. *Discrete Contin Dyn Syst, Ser B*, 2008, 9:743–761.

[23] Sun C Y, Cao D M, Duan J Q. Non-autonomous dynamics of wave equations with nonlinear damping and critical nonlinearity [J]. *Nonlinearity*, 2006, 19:2645–2665.

[24] Robinson J C. Infinite-dimensional dynamical systems, An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors [M]. London: Cambridge University Press, 2001.

[25] Temam R. Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics [M]. 2nd ed, Berlin: Springer-Verlag, 1997.

[26] Hale J K. Asymptotic behavior of dissipative systems [M]. Providence, RI: Amer Math Soc, 1988.

Strong Global Attractors for the Classical Reaction Diffusion Equations with Fading Memory

WANG Xuan[1] DUAN Fenxia[1] MA Qun[1] YANG Guang[2]

[1]College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China.
E-mail: wangxuan@nwnu.edu.cn; 980866580@qq.com; 1120354557@qq.com
[2]School of Economics and Management, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China. E-mail: 305683617@qq.com

Abstract This paper deals with the long-time behavior of solutions for the classical reaction diffusion equations with fading memory in the strong topological space $H_0^1(\Omega)\times L_\mu^2(\mathbb{R}^+;D(A))$, where the nonlinearity with polynomial growth of arbitrary order is dissipative, and the forcing term only belongs to $L^2(\Omega)$. Applying the abstract function theory, the semigroup theory and some new estimate techniques, the authors prove the asymptotic compactness of solutions and obtain the existence of global attractor in the strong topological space $H_0^1(\Omega)\times L_\mu^2(\mathbb{R}^+;D(A))$.

Keywords Classical reaction diffusion equations, Strong global attractor, Polynomial growth of arbitrary order, Fading memory
2000 MR Subject Classification 34Q35, 35B40, 35B41

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 36 No. 3, 2015
by ALLERTON PRESS, INC., USA