数 学 年 刊 A 辑
2023, 44(3):323–334
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2023.0023

$\mathbb{R}^N$ 中一类带 Hardy-Sobolev 临界指数项的 Kirchhoff 型问题的正解*

段 誉[1] 孙 歆[1] 廖家锋[2]

提要 研究如下一类带 Hardy-Sobolev 临界指数的 Kirchhoff 型问题:

$$\begin{cases}-\Big[a+b\Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\Big)^m\Big]\Delta u=\dfrac{|u|^{2^*(s)-2}u}{|x|^s}+\lambda h(x), \quad x\in\mathbb{R}^N,\\ u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N),\end{cases}$$

其中 $N\geqslant 3, a,\lambda\geqslant 0,\ b,m>0,\ \ 0\leqslant s<2, h\in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ 为非零非负函数. 当 $\lambda=0$ 时, 利用分析技巧获得了问题可解性结果. 当 $\lambda>0$ 时, 利用变分方法获得该问题正解的存在性. 特别地, 当 $0<m<\frac{2-s}{N-2}$ 时, 获得了问题至少存在两个正解.

关键词 Hardy-Sobolev 临界指数, Kirchhoff 型问题, 正解, 变分法
MR (2000) 主题分类 35B09, 35J15, 35J20
中图法分类 O177.91
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2023)03-0323-12

§1 引 言

考虑如下一类带 Hardy-Sobolev 临界指数的 Kirchhoff 型问题:

$$\begin{cases}-\Big[a+b\Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\Big)^m\Big]\Delta u=\dfrac{|u|^{2^*(s)-2}u}{|x|^s}+\lambda h(x), \quad x\in\mathbb{R}^N,\\ u>0, \quad u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N),\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $a,\lambda\geqslant 0,\ b,m>0,\ 0\leqslant s<2,\ N\geqslant 3$, 函数 $h\in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ 为非零非负函数. $2^*(s)=\frac{2(N-s)}{N-2}$ 为 Hardy-Sobolev 临界指数. 特别地, $2^*=2^*(0)=\frac{2N}{N-2}$ 为 Sobolev 临界指数. 空间 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)=\big\{u\in L^{2^*}(\mathbb{R}^N):\ \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x<\infty\big\}$ 的标准范数为 $\|u\|=\big(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\big)^{\frac12}$, 空间 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 的标准范数为 $|u|_p=\big(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x\big)^{\frac1p}$.

当 $s=0$ 时, 问题 (1.1) 退化为如下问题:

$$\begin{cases}-\Big[a+b\Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\Big)^m\Big]\Delta u=|u|^{2^*-2}u+\lambda h(x), \quad x\in\mathbb{R}^N,\\ u>0,\ u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).\end{cases}\tag{1.2}$$

本文 2021 年 2 月 23 日收到, 2023 年 5 月 4 日收到修改稿.
[1]贵州工程应用技术学院理学院, 贵州 毕节 551700. E-mail: duanyu3612@163.com; sunxinwan@163.com
[2]通信作者. 西华师范大学公共数学学院, 四川 南充 637002. E-mail: liaojiafeng@163.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11661021) 和毕节市科学技术项目 (No. [2023]28, No. [2023]52) 的资助.

当 $m=1$ 时, 文 [1] 研究了问题 (1.2). 当 $\lambda=0$ 时, 利用分析技巧, 获得了问题 (1.2) 正解的存在性与非存在性结果; 当 $\lambda>0$ 充分小时, 利用变分方法, 获得了两个正解的存在性. 随后, 文 [2] 将文 [1] 中 $\lambda=0$ 的情况推广到一般的 $m>0$, 并获得了无穷多个正解的存在性结果.当 $m=2, N=3$ 时,文 [3] 利用变分法获得了问题 (1.2) 两个正解的存在性. 当 $m=1$ 时, 文 [4–5] 分别在三维全空间和四维全空间中研究了带凹凸非线性项临界 Kirchhoff 型问题; 文 [6] 中讨论了带超线性项和临界指数的 Kirchhoff 型问题. 文 [7] 将文 [1] 推广至 p-Kirchhoff 型问题.

当 $m=1, N=3, a>0, \lambda=0$ 时, 文 [8] 中给出了问题 (1.1) 解的存在性与非存在性结果, 详见该文中的定理 2.4. 结合文 [1, 9], 本文将文 [8] 中的定理 2.4 推广至更一般的问题 (1.1).

问题 (1.1) 对应的能量泛函 I 为:

$$\begin{aligned} I(u)=&\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{2m+2}\|u\|^{2m+2}-\frac{1}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x\\ &-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}h(x)u\mathrm{d}x,\quad \forall u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

显然, $I\in C^1(D^{1,2}(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$ 且对任意的 $u,v\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, 有

$$\langle I'(u),v\rangle=(a+b\|u\|^{2m})\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u,\nabla v)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u^+)^{2^*(s)-1}}{|x|^s}v\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}h(x)v\mathrm{d}x.$$

众所周知, 问题 (1.1) 的解与能量泛函 I 在空间 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 上的临界点是一一对应的. 记 A_s 为最佳 Sobolev 常数, 即

$$A_s:=\inf_{u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}}. \tag{1.3}$$

§2 主要结果及其证明

当 $a=1, b=0, \lambda=0$ 时, 问题 (1.1) 退化到如下经典的半线性椭圆方程:

$$-\Delta u=\frac{|u|^{2^*(s)-2}u}{|x|^s},\quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{2.1}$$

由文 [10–11] 知,

$$U_{\varepsilon,y}(x)=\Big[\frac{\varepsilon[(N-s)(N-2)]^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^2+|x-y|^{2-s}}\Big]^{\frac{N-2}{2-s}},\quad \forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+,\quad \forall y\in\mathbb{R}^N \tag{2.2}$$

是问题 (2.1) 的正解. 特别地, 取 $\varepsilon=1, y=0$, 由文 [11] 有

$$\|U_{1,0}\|^2=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{U_{1,0}^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x=A_s^{\frac{N-s}{2-s}}. \tag{2.3}$$

首先, 给出本文的第一个结果.

定理 2.1 假设 $a\geqslant 0,\ b,m>0,\ \lambda=0$.

(1) 当 $a=0$ 时, 若 $m=\frac{2-s}{N-2}$, 对任意的 $\eta>0$, 当且仅当 $b=\frac{1}{A_s^{\frac{N-s}{N-2}}}$ 时, 问题 (1.1) 有正解 $U_{\varepsilon,y,\eta}=\eta^{\frac{N-2}{2(2-s)}}U_{\varepsilon,y}$; 当 $m\neq\frac{2-s}{N-2}$ 时, 问题 (1.1) 有正解 $U_{\varepsilon,y,\eta}=[bA_s^{\frac{m(N-s)}{2-s}}]^{\frac{N-2}{2[2-s-m(N-2)]}}U_{\varepsilon,y}$.

(2) 当 $a>0$ 时, 若 $m=\frac{2-s}{N-2}$, 当且仅当 $0<b<\frac{1}{A_s^{\frac{N-s}{N-2}}}$ 时, 问题 (1.1) 有正解 $U_{\varepsilon,y,\eta}=\big[\frac{a}{1-bA_s^{\frac{N-s}{N-2}}}\big]^{\frac{N-2}{2(2-s)}}U_{\varepsilon,y}$;

(i) 若 $0<m<\frac{2-s}{N-2}$, 存在 $\eta_0>\overline{\eta}=\big[\frac{2-s}{bm(N-2)A_s^{\frac{m(N-s)}{2-s}}}\big]^{\frac{2-s}{m(N-2)-2+s}}$, 使得问题 (1.1) 有正解 $U_{\varepsilon,y,\eta}=\eta_0^{\frac{N-2}{2(2-s)}}U_{\varepsilon,y}$;

(ii) 若 $m>\frac{2-s}{N-2}$ 且 $\frac{m(N-2)-2+s}{m(N-2)}\big[\frac{2-s}{bm(N-2)A_s^{\frac{m(N-s)}{2-s}}}\big]^{\frac{2-s}{m(N-2)-2+s}}<a$, 问题 (1.1) 无正解; 若 $m>\frac{2-s}{N-2}$ 且 $\frac{m(N-2)-2+s}{m(N-2)}\big[\frac{2-s}{bm(N-2)A_s^{\frac{m(N-s)}{2-s}}}\big]^{\frac{2-s}{m(N-2)-2+s}}=a$, 问题 (1.1) 有正解 $U_{\varepsilon,y,\eta}=\overline{\eta}^{\frac{N-2}{2(2-s)}}U_{\varepsilon,y}$;

(iii) 若 $m>\frac{2-s}{N-2}$ 且 $\frac{m(N-2)-2+s}{m(N-2)}\big[\frac{2-s}{bm(N-2)A_s^{\frac{m(N-s)}{2-s}}}\big]^{\frac{2-s}{m(N-2)-2+s}}>a$, 存在两个常数 $0<\eta_1<\overline{\eta}<\eta_2$, 使得 $U_{\varepsilon,y,\eta}=\eta_1^{\frac{N-2}{2(2-s)}}U_{\varepsilon,y}$ 和 $U_{\varepsilon,y,\eta}=\eta_2^{\frac{N-2}{2(2-s)}}U_{\varepsilon,y}$ 为问题 (1.1) 的正解.

证 受文 [1] 的启发, 对任意的 $\eta>0$, 令 $U_{\varepsilon,y,\eta}=\eta^{\frac{N-2}{2(2-s)}}U_{\varepsilon,y}$, 其中 $U_{\varepsilon,y}$ 为 (2.2) 式所定义. 从而有

$$-\Delta U_{\varepsilon,y,\eta}=-\eta^{\frac{N-2}{2(2-s)}}\Delta U_{\varepsilon,y}=\eta^{\frac{N-2}{2(2-s)}}\frac{U_{\varepsilon,y}^{2^*(s)-1}}{|x|^s}=\eta^{-1}\frac{U_{\varepsilon,y,\eta}^{2^*(s)-1}}{|x|^s},$$

即

$$-\eta\Delta U_{\varepsilon,y,\eta}=\frac{U_{\varepsilon,y,\eta}^{2^*(s)-1}}{|x|^s}.$$

根据 (2.3) 式, 可计算得

$$\Big[a+b\Big(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U_{\varepsilon,y,\eta}|^2\mathrm{d}x\Big)^m\Big]=(a+b\eta^{\frac{m(N-2)}{2-s}}\|U_{\varepsilon,y}\|^{2m})=a+bA_s^{\frac{m(N-s)}{2-s}}\eta^{\frac{m(N-2)}{2-s}}.$$

因此, 当 $\lambda=0$ 时, 求问题 (1.1) 的解就转化为求如下关于 η 方程的正解:

$$\eta=a+bA_s^{\frac{m(N-s)}{2-s}}\eta^{\frac{m(N-2)}{2-s}}. \tag{2.4}$$

下面, 根据参量 a, 我们分两种情况来讨论.

(1) 当 $a=0$ 时, (2.4) 式可以转化为如下方程:

$$\eta=bA_s^{\frac{m(N-s)}{2-s}}\eta^{\frac{m(N-2)}{2-s}}.$$

若 $\frac{m(N-2)}{2-s}=1$ 时, 即 $m=\frac{2-s}{N-2}$. 容易计算得当且仅当 $b=\frac{1}{A_s^{\frac{N-s}{N-2}}}$ 时方程 (2.4) 有正解 (对一切 $\eta>0$). 因此, 当且仅当 $b=\frac{1}{A_s^{\frac{N-s}{N-2}}}$ 时, 方程

$$\begin{cases}-\Big[b\Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\Big)^m\Big]\Delta u=\dfrac{|u|^{2^*(s)-2}u}{|x|^s}, & x\in\mathbb{R}^N,\\ u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N),\end{cases} \tag{2.5}$$

有正解 $U_{\varepsilon,y,\eta}=\eta^{\frac{N-2}{2(2-s)}}U_{\varepsilon,y}$.

若 $m\neq\frac{2-s}{N-2}$ 时, 容易计算得 $\eta=[bA_s^{\frac{m(N-s)}{2-s}}]^{\frac{2-s}{2-s-m(N-2)}}$ 为方程 (2.4) 的正解. 因此, $U_{\varepsilon,y,\eta}=[bA_s^{\frac{m(N-s)}{2-s}}]^{\frac{N-2}{2[2-s-m(N-2)]}}U_{\varepsilon,y}$ 为方程 (2.5) 的正解.

(2) 当 $a\neq 0$ 时, 记

$$h(\eta)=\eta-bA_s^{\frac{m(N-s)}{2-s}}\eta^{\frac{m(N-2)}{2-s}}-a,$$

方程 (2.4) 等价于 $h(\eta)=0$.

若 $\frac{m(N-2)}{2-s}=1$ 时, 即 $m=\frac{2-s}{N-2}$. 容易计算得当且仅当 $0<b<\frac{1}{A_s^{\frac{N-s}{N-2}}}$ 时, $h(\eta)=0$ 有正解, 此时正解为 $\eta=\frac{a}{1-bA_s^{\frac{N-s}{N-2}}}$. 因此, 当且仅当 $0<b<\frac{1}{A_s^{\frac{N-s}{N-2}}}$ 时, 方程

$$\begin{cases}-\Big[a+b\Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\Big)^m\Big]\Delta u=\dfrac{|u|^{2^*(s)-2}u}{|x|^s}, & x\in\mathbb{R}^N,\\ u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N),\end{cases}\tag{2.6}$$

有正解 $U_{\varepsilon,y,\eta}=\big[\frac{a}{1-bA_s^{\frac{N-s}{N-2}}}\big]^{\frac{N-2}{2(2-s)}}U_{\varepsilon,y}$.

若 $\frac{m(N-2)}{2-s}\neq 1$ 时, 即 $m\neq\frac{2-s}{N-2}$. 通过计算得 $h'(\eta)=1-bA_s^{\frac{m(N-s)}{2-s}}\frac{m(N-2)}{2-s}\eta^{\frac{m(N-2)-2+s}{2-s}}$, 从而

$$\overline{\eta}=\Big[\frac{2-s}{bm(N-2)A_s^{\frac{m(N-s)}{2-s}}}\Big]^{\frac{2-s}{m(N-2)-2+s}}$$

为 $h'(\eta)=0$ 的唯一解. 当 $0<m<\frac{2-s}{N-2}$ 时, $\overline{\eta}$ 为函数 $h(\eta)$ 的最小值点. 由于 $h(0)=-a$, 故方程 $h(\eta)=0$ 存在唯一的正解 $\eta_0>\overline{\eta}$, 因此, 存在 $\eta_0>\overline{\eta}$, 使得 $U_{\varepsilon,y,\eta}=\eta_0^{\frac{N-2}{2(2-s)}}U_{\varepsilon,y}$ 为方程 (2.6) 的正解. 当 $m>\frac{2-s}{N-2}$ 时, $\overline{\eta}$ 为函数 $h(\eta)$ 的最大值点, 极大值为

$$\max_{\eta>0}h(\eta)=h(\overline{\eta})=\frac{m(N-2)-2+s}{m(N-2)}\Big[\frac{2-s}{bm(N-2)A_s^{\frac{m(N-s)}{2-s}}}\Big]^{\frac{2-s}{m(N-2)-2+s}}-a.$$

故若 $\max\limits_{\eta>0}h(\eta)<0$, 则方程 $h(\eta)=0$ 无解; 若 $\max_{\eta>0}h(\eta)=0$, 则方程 $h(\eta)=0$ 有唯一正解 $\eta=\overline{\eta}$; 若 $\max_{\eta>0}h(\eta)>0$, 方程 $h(\eta)=0$ 有两个正解 η_1,η_2 且 $0<\eta_1<\overline{\eta}<\eta_2$. 因此, 当 $\max\limits_{\eta>0}h(\eta)<0$ 时, 方程 (2.6) 无正解; 当 $\max\limits_{\eta>0}h(\eta)=0$ 时, 方程 (2.6) 有正解 $U_{\varepsilon,y,\eta}=\overline{\eta}^{\frac{N-2}{2(2-s)}}U_{\varepsilon,y}$; 当 $\max\limits_{\eta>0}h(\eta)>0$ 时, 存在两个常数 $0<\eta_1<\overline{\eta}<\eta_2$, 使得 $U_{\varepsilon,y,\eta}=\eta_1^{\frac{N-2}{2(2-s)}}U_{\varepsilon,y}$ 和 $U_{\varepsilon,y,\eta}=\eta_2^{\frac{N-2}{2(2-s)}}U_{\varepsilon,y}$ 为方程 (2.6) 的正解.

注 2.1 一方面, 定理 2.1 补充完善了文 [8] 中定理 2.4 的结果; 另一方面, 定理 2.1 推广了文 [1] 中定理 1.1 和定理 1.2 的结果.

接下来, 我们研究 $\lambda>0$ 的情况, 获得如下结果.

定理 2.2 假设 $a\geqslant 0$, $b,\lambda>0$, $h\in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ 为非零非负函数.

(1) 当 $m>0$ 时, 则存在一个 $\Lambda_*>0$, 使得对任意的 $0<\lambda<\Lambda_*$, 问题 (1.1) 存在一个正的局部极小解 u_* 且 $I(u_*)<0$.

(2) 当 $0<m<\frac{2-s}{N-2}$ 时, 则存在一个 $\Lambda>0(\Lambda\leqslant\Lambda_*)$, 使得对任意的 $0<\lambda<\Lambda$, 问题 (1.1) 还存在一个正山路解 u_{**} 且 $I(u_{**})>0$.

注 2.2 一方面, 定理 2.2 补充完善了文 [3] 中的结果; 另一方面, 定理 2.2 推广了文 [1] 中的定理 1.3 和定理 1.4 的结果.

在给出定理的证明之前, 我们先给出一些重要的预备知识.

命题 2.1 (1) 假设 $a \geqslant 0,\ b,\lambda > 0,\ 0 < m < \frac{2-s}{N-2},\ h \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ 为非零非负函数, 则存在 $R_*, \rho, \Lambda^* > 0$, 使得对任意的 $0 < \lambda < \Lambda^*$, 有 $I(u)|_{u\in S_{R_*}} \geqslant \rho$, 其中 $S_{R_*} = \{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \|u\| = R_*\}$ 为中心在原点半径为 R_* 的球面.

(2) 假设 $a \geqslant 0,\ b, m, \lambda > 0,\ h \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ 为非零非负函数, 则存在一个 $\Lambda_* > 0$, 使得对任意的 $0 < \lambda < \Lambda_*$, 问题 (1.1) 存在一个正解 u_* 且 $I(u_*) < 0$.

证 (1) 根据 Hölder 不等式以及 (1.3) 式, 可以推得

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u\mathrm{d}x \leqslant |u|_{2^*}|h|_{\frac{2^*}{2^*-1}} \leqslant |h|_{\frac{2^*}{2^*-1}} A_0^{-\frac{1}{2}}\|u\|. \tag{2.7}$$

进一步, 可推得

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{2m+2}\|u\|^{2m+2} - \frac{1}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u\mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{2m+2}\|u\|^{2m+2} - \frac{1}{2^*(s)A_s^{\frac{2^*(s)}{2}}}\|u\|^{2^*(s)} - \lambda|h|_{\frac{2^*}{2^*-1}} A_0^{-\frac{1}{2}}\|u\| \\ &\geqslant \|u\|\Big(\frac{b}{2m+2}\|u\|^{2m+1} - \frac{1}{2^*(s)A_s^{\frac{2^*(s)}{2}}}\|u\|^{2^*(s)-1} - \lambda|h|_{\frac{2^*}{2^*-1}} A_0^{-\frac{1}{2}}\Big). \end{aligned} \tag{2.8}$$

对任意的 $t \geqslant 0$, 令 $g(t) = \frac{b}{2m+2}t^{2m+1} - \frac{1}{2^*(s)A_s^{\frac{2^*(s)}{2}}}t^{2^*(s)-1} - \lambda|h|_{\frac{2^*}{2^*-1}} A_0^{-\frac{1}{2}}$, 从而有 $g'(t) = \frac{b(2m+1)}{2m+2}t^{2m} - \frac{2^*(s)-1}{2^*(s)A_s^{\frac{2^*(s)}{2}}}t^{2^*(s)-2}$. 令 $g'(t) = 0$, 当 $0 < m < \frac{2-s}{N-2}$ 时, 有 $2m < 2^*(s) - 2$. 这时可以计算得

$$t_{\max} = \Big[\frac{b(2m+1)(N-s)A_s^{\frac{N-s}{N-2}}}{(m+1)(N+2-2s)}\Big]^{\frac{N-2}{2[2-s-m(N-2)]}}$$

和

$$g(t_{\max}) = \frac{b[2(m+1)-(mN+s)]}{(m+1)(N+2-2s)}\Big[\frac{b(2m+1)(N-s)A_s^{\frac{N-s}{N-2}}}{(m+1)(N+2-2s)}\Big]^{\frac{m(N-2)}{2-s-m(N-2)}} - \lambda|h|_{\frac{2^*}{2^*-1}} A_0^{-\frac{1}{2}}.$$

从而, 取 $R_* = t_{\max},\ \Lambda^* = \frac{bA_s^{\frac{1}{2}}[2(m+1)-(mN+s)]}{(m+1)(N+2-2s)|h|_{\frac{2^*}{2^*-1}}}\Big[\frac{b(2m+1)(N-s)A_s^{\frac{N-s}{N-2}}}{(m+1)(N+2-2s)}\Big]^{\frac{m(N-2)}{2-s-m(N-2)}}$, 则存在一个正数 $\rho > 0$, 使得对任意的 $0 < \lambda < \Lambda^*$, 有

$$I(u)|_{u\in S_{R_*}} \geqslant \rho, \tag{2.9}$$

其中 $S_{R_*} = \{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \|u\| = R_*\}$ 为中心在原点半径为 R_* 的球面.

(2) 由于 $h \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ 为非零非负函数, 我们可以断言: 存在 $u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, 使得 $|h^{\frac{1}{2^*-1}} - u_0|_{2^*} < \frac{1}{2}|h|_{\frac{2^*}{2^*-1}}^{\frac{1}{2^*-1}}$. 事实上, 根据 Hölder 不等方式, 可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N}[h(x)^{\frac{2^*}{2^*-1}} - h(x)u_0]\mathrm{d}x &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N}|h(x)^{\frac{1}{2^*-1}} - u_0||h(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant |h^{\frac{1}{2^*-1}} - u_0|_{2^*}|h|_{\frac{2^*}{2^*-1}} \\ &< \frac{1}{2}|h|_{\frac{2^*}{2^*-1}}^{\frac{2^*}{2^*-1}}, \end{aligned}$$

即有

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_0\mathrm{d}x > \frac{1}{2}|h|_{\frac{2^*}{2^*-1}}^{\frac{2^*}{2^*-1}}.$$

故

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{I(tu_0)}{t} = -\lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_0\mathrm{d}x < -\frac{\lambda}{2}|h|_{\frac{2^*}{2^*-1}}^{\frac{2^*}{2^*-1}} < 0. \tag{2.10}$$

根据 (2.8)–(2.10) 式, 存在 $R, \Lambda_* > 0$, 使得当 $0 < \lambda < \Lambda_*$ 时, 有

$$\frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{2m+2}\|u\|^{2m+2} - \frac{1}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x \geqslant 0, \quad \forall\, u \in B_R, \tag{2.11}$$

$$\frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{2m+2}\|u\|^{2m+2} - \frac{1}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x \geqslant \rho, \quad \forall\, u \in S_R,$$

$$m = \inf_{u\in B_R} I(u) < 0, \tag{2.12}$$

其中 $B_R = \{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \|u\| \leqslant R\}$ 为中心在原点半径为 R 的球, S_R 为对应的球面.

下面, 将证明存在一个 $u_* \in B_R$, 使得 $I(u_*) = m$, 即, u_* 是问题 (1.1) 的非零解. 由 (2.12) 式, 存在一个极小化序列 $\{u_n\} \subset B_R$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = m < 0.$$

显然, $\{u_n\}$ 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 中是有界的. 由于 B_R 是一个闭凸集, 从而存在一个 $u_* \in B_R \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 和 $\{u_n\}$ 一个子列 (仍记为 $\{u_n\}$), 使得当 $n \to \infty$ 时, 有

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_*, & \text{在 } D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \text{ 中},\\ u_n \to u_*, & \text{在 } L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)\ (1 \leqslant q < 2^*)\text{中},\\ u_n(x) \to u_*(x), & \text{几乎处处在 } \mathbb{R}^N \text{ 中}. \end{cases} \tag{2.13}$$

根据控制收敛定理, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_*\mathrm{d}x. \tag{2.14}$$

令 $w_n = u_n - u_*$, 根据 Brézis-Lieb 引理 (见 [12]), 有

$$\|u_n\|^2 = \|w_n\|^2 + \|u_*\|^2 + o(1), \tag{2.15}$$

$$\|u_n\|^{2m+2} = (\|w_n\|^2 + \|u_*\|^2)^{m+1} + o(1) \geqslant \|w_n\|^{2m+2} + \|u_*\|^{2m+2} + o(1), \tag{2.16}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u_n^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{(w_n^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u_*^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x + o(1). \tag{2.17}$$

若 $u_* = 0$, 显然有 $w_n \in B_R$. 假设 $u_* \neq 0$, 根据 (2.15) 式, 对充分大的 n 有 $w_n \in B_R$. 由 (2.11) 式, 可得

$$\frac{a}{2}\|w_n\|^2 + \frac{b}{2m+2}\|w_n\|^{2m+2} - \frac{1}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(w_n^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x \geqslant 0. \tag{2.18}$$

因此, 由 (2.14)–(2.18) 式, 可以推得

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{n\to\infty}\Big[\frac{a}{2}\|u_n\|^2+\frac{b}{2m+2}\|u_n\|^{2m+2}-\frac{1}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u_n^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}h(x)u_n\mathrm{d}x\Big]\\
&\geqslant \frac{a}{2}\|u_*\|^2+\frac{b}{2m+2}\|u_*\|^{2m+2}-\frac{1}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u_*^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}h(x)u_*\mathrm{d}x\\
&\quad+\frac{a}{2}\|w_n\|^2+\frac{b}{2m+2}\|w_n\|^{2m+2}-\frac{1}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(w_n^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x+o(1)\\
&\geqslant I(u_*)+o(1)\\
&\geqslant m+o(1),
\end{aligned}
$$

这就意味着 $I(u_*)=m<0$. 故 u_* 是问题 (1.1) 的非零解, 即对任意的 $\varphi\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, 有下式成立:

$$
(a+b\|u_*\|^{2m})\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u_*,\nabla\varphi)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u_*^+)^{2^*(s)-1}}{|x|^s}\varphi\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}h(x)\varphi=0.
$$

特别地, 在上式中取 $\varphi=u_*^-=\max\{-u_*,0\}$, 可得

$$
-(a+b\|u\|^{2m})\|u_*^-\|^2-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}h(x)u_*^-=0,
$$

这就意味着 $u_*^-=0$. 因此, $u_*\geqslant 0$ 且 $u_*\not\equiv 0$. 进一步, 由强极大值原理, 可得 $u_*>0$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中几乎处处成立. 因此, 对任意的 $0<\lambda<\Lambda_*$, 问题 (1.1) 存在一个正的局部极小解 u_* 且 $I(u_*)<0$.

下面, 证明当 $0<m<\frac{2-s}{N-2}$ 时, 问题 (1.1) 还存在一个正山路解. 对任意的 $r>0$, 令 $\Psi(r)=a+bA_s^{\frac{m(N-s)}{2-s}}r^{2m}-r^{2^*(s)-2}$. 由文 [9] 的引理 2.1, 容易得到如下结论.

命题 2.2　假设 $a,b>0$, $0<m<\frac{2-s}{N-2}$, 则方程 $\Psi(r)=0$ 有唯一的正解 r_0, 即 $a+bA_s^{\frac{m(N-s)}{2-s}}r^{2m}-r^{2^*(s)-2}=0$. 且不等式 $\Psi(r)\leqslant 0$ 的解集为 $\{r|\ r\geqslant r_0\}$.

接下来, 证明泛函 I 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 上满足局部 $(PS)_c$ 条件.

命题 2.3　若 $a,\ b,\ \lambda>0$, $0<m<\frac{2-s}{N-2}$, $h\in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ 为非零非负函数, 则对任意的 $c<\Theta-D\lambda^{\frac{2(m+1)}{2m+1}}$, 泛函 I 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 上满足局部 $(PS)_c$ 条件, 其中

$$
\Theta=\frac{a(2-s)}{2(N-s)}A_s^{\frac{N-s}{2-s}}r_0^2+\frac{b[2-s-m(N-2)]}{2(m+1)(N-s)}A_s^{\frac{(N-s)(m+1)}{2-s}}r_0^{2m+2},
$$

$$
D=\frac{2m+1}{2m+2}\Big[\frac{(N+2-2s)|h|_{\frac{2^*}{2^*-1}}}{2(N-s)A_0^{\frac12}}\Big]^{\frac{2m+2}{2m+1}}\Big[\frac{N-s}{b[2-s-m(N-2)]}\Big]^{\frac{1}{2m+1}},
$$

r_0 为命题 2.2 中所定义.

证　设 $\{u_n\}\subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 为能量泛函 I 的 $(PS)_c$ 序列, 即当 $n\to\infty$ 时, 有

$$
I(u_n)\to c,\quad I'(u_n)\to 0. \tag{2.19}
$$

由 (1.3) 式和 Hölder 不等式, 当 n 充分大时, 可得

$$\begin{aligned}1+c+\|u_n\| &\geqslant I(u_n)-\frac{1}{2^*(s)}\langle I'(u_n),u_n\rangle\\&=\frac{a[2^*(s)-2]}{2\cdot 2^*(s)}\|u_n\|^2+\frac{b[2^*(s)-2m-2]}{2\cdot 2^*(s)(m+1)}\|u_n\|^{2m+2}\\&\quad-\frac{\lambda[2^*(s)-1]}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}^N}h(x)u_n\mathrm{d}x\\&\geqslant\frac{a[2^*(s)-2]}{2\cdot 2^*(s)}\|u_n\|^2+\frac{b[2^*(s)-2m-2]}{2\cdot 2^*(s)(m+1)}\|u_n\|^{2m+2}\\&\quad-\frac{\lambda[2^*(s)-1]}{2^*(s)A_0^{\frac{1}{2}}}|h|_{\frac{2^*}{2^*-1}}\|u_n\|,\end{aligned}$$

这就意味着 $\{u_n\}$ 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 中有界. 故存在 $u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, 使得在 $\{u_n\}$ 子列的意义下使得命题 2.1 中 (2.13)–(2.17) 式都成立, 这里只需将 u_* 换成 u 即可. 由 (2.13)–(2.17) 式和 (2.19) 式, 可得

$$\begin{aligned}&a\|u\|^2+a\|w_n\|^2+b(\|u\|^2+\|w_n\|^2)^{m+1}-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x\\&-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(w_n^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}h(x)u\mathrm{d}x=o(1),\end{aligned}\tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}c&=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{a}{2}\|w_n\|^2+\frac{b}{2(m+1)}(\|u\|^2+\|w_n\|^2)^{m+1}\\&\quad-\frac{1}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x-\frac{1}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(w_n^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}h(x)u\mathrm{d}x+o(1)\\&=I(u)+\frac{a}{2}\|w_n\|^2+\frac{b}{2(m+1)}[(\|u\|^2+\|w_n\|^2)^{m+1}-\|u\|^{2m+2}]\\&\quad-\frac{1}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(w_n^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x+o(1),\end{aligned}\tag{2.21}$$

$$a\|u\|^2+b(\|u\|^2+\|w_n\|^2)^m\|u\|^2-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}h(x)u\mathrm{d}x=o(1).\tag{2.22}$$

根据 (2.20) 式和 (2.22) 式, 可以推得

$$a\|w_n\|^2+b(\|u\|^2+\|w_n\|^2)^m\|w_n\|^2-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(w_n^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x=o(1).\tag{2.23}$$

不妨假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\|w_n\|=l$, 则 $l\geqslant 0$. 若 $l=0$, 则命题得证. 若 $l>0$, 结合 (1.3) 式, 有

$$al^2+bl^{2m+2}\leqslant al^2+b(\|u\|^2+l^2)^m l^2\leqslant A_s^{-\frac{2^*(s)}{2}}l^{2^*(s)},$$

即

$$a+b[A_s^{-\frac{N-s}{2(2-s)}}l]^{2m}A_s^{\frac{m(N-s)}{2-s}}-[A_s^{-\frac{N-s}{2(2-s)}}l]^{2^*(s)-2}\leqslant 0.$$

根据命题 2.2 可知, $A_s^{-\frac{N-s}{2(2-s)}}l\geqslant r_0$, 即

$$l\geqslant A_s^{\frac{N-s}{2(2-s)}}r_0.\tag{2.24}$$

一方面, 根据 (2.22) 式, 可得

$$
\begin{aligned}
I(u) &= \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{2m+2}\|u\|^{2m+2} - \frac{1}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x - \lambda\int_{\mathbb{R}^N}h(x)u\mathrm{d}x \\
&= \frac{a[2^*(s)-2]}{2\cdot 2^*(s)}\|u\|^2 + \frac{b[2^*(s)-2m-2]}{2\cdot 2^*(s)(m+1)}\|u\|^{2m+2} - \frac{b}{2^*(s)}(\|u\|^2+\|w_n\|^2)^m\|u\|^2 \\
&\quad - \frac{\lambda[2^*(s)-1]}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}^N}h(x)u\mathrm{d}x + o(1) \\
&\geqslant \frac{b[2^*(s)-2m-2]}{2\cdot 2^*(s)(m+1)}\|u\|^{2m+2} - \frac{\lambda[2^*(s)-1]}{2^*(s)A_0^{\frac{1}{2}}}|h|_{\frac{2^*(s)}{2^*(s)-1}}\|u\| \\
&\quad - \frac{b}{2^*(s)}(\|u\|^2+l^2)^m\|u\|^2 \\
&\geqslant -D\lambda^{\frac{2(m+1)}{2m+1}} - \frac{b}{2^*(s)}(\|u\|^2+l^2)^m\|u\|^2,
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

其中最后一个不等式是由 Young 不等式所得,

$$
D = \frac{2m+1}{2m+2}\Big[\frac{(N+2-2s)|h|_{\frac{2^*}{2^*-1}}}{2(N-s)A_0^{\frac{1}{2}}}\Big]^{\frac{2m+2}{2m+1}}\Big[\frac{N-s}{b[2-s-m(N-2)]}\Big]^{\frac{1}{2m+1}}
$$

为正常数. 另一方面, 根据 (2.21), (2.23)–(2.24) 式, 可得

$$
\begin{aligned}
I(u) &= c - \frac{a}{2}\|w_n\|^2 - \frac{b}{2(m+1)}[(\|u\|^2+\|w_n\|^2)^{m+1} - \|u\|^{2m+2}] \\
&\quad + \frac{1}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(w_n^+)^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x + o(1) \\
&= c - \frac{a[2^*(s)-2]}{2\cdot 2^*(s)}l^2 - \frac{b[2^*(s)-2m-2]}{2\cdot 2^*(s)(m+1)}(\|u\|^2+l^2)^{m+1} \\
&\quad + \frac{b}{2(m+1)}\|u\|^{2m+2} - \frac{b}{2^*(s)}(\|u\|^2+l^2)^m\|u\|^2 + o(1) \\
&\leqslant c - \frac{a[2^*(s)-2]}{2\cdot 2^*(s)}l^2 - \frac{b[2^*(s)-2m-2]}{2\cdot 2^*(s)(m+1)}l^{2m+2} - \frac{b}{2^*(s)}(\|u\|^2+l^2)^m\|u\|^2 \\
&\leqslant c - \frac{a(2-s)}{2(N-s)}A_s^{\frac{N-s}{2-s}}r_0^2 - \frac{b[2-s-m(N-2)]}{2(m+1)(N-s)}A_s^{\frac{(N-s)(m+1)}{2-s}}r_0^{2m+2} \\
&\quad - \frac{b}{2^*(s)}(\|u\|^2+l^2)^m\|u\|^2 \\
&< -D\lambda^{\frac{2(m+1)}{2m+1}} - \frac{b}{2^*(s)}(\|u\|^2+l^2)^m\|u\|^2,
\end{aligned}
$$

这与 (2.25) 式矛盾. 故 $l=0$, 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 中有 $u_n\to u$, 即结论成立.

注 2.3 类似于命题 2.3 的证明, 容易得到: 若 $a=0$, $b,\lambda>0$, $0<m<\frac{2-s}{N-2}$, $h\in L^{\frac{2^*(s)}{2^*(s)-1}}(\mathbb{R}^N)$ 为非零非负函数, 则对任意的 $c<\Theta-D\lambda^{\frac{2(m+1)}{2m+1}}$, 泛函 I 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 上满足局部 $(PS)_c$ 条件, 其中 $\Theta=\frac{2-s-m(N-2)}{2(m+1)(N-s)}b^{\frac{N-s}{2-s-m(N-2)}}A_s^{\frac{(m+1)(N-s)}{2-s-m(N-2)}}$, D 为命题 2.3 所定义.

命题 2.4 若 $a,b,\lambda>0$, $0<m<\frac{2-s}{N-2}$, $h\in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ 为非零非负函数, 则存在一个

$\Lambda_{**}>0$, 使得对任意的 $0<\lambda<\Lambda_{**}$, 有

$$\sup_{t\geqslant 0} I(tU_{1,0})<\Theta-D\lambda^{\frac{2(m+1)}{2m+1}},$$

其中 $U_{1,0}$ 由 (2.2) 式所定义, Θ 和 D 由命题 2.3 所定义.

证 对任意的 $t\geqslant 0$, 定义 Φ, $\widetilde{\Phi}$ 分别为

$$\begin{aligned}\Phi(t) &\triangleq I(tU_{1,0})\\ &=\frac{at^2}{2}\|U_{1,0}\|^2+\frac{bt^{2m+2}}{2m+2}\|U_{1,0}\|^{2m+2}-\frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{U_{1,0}^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x\\ &\quad-\lambda t\int_{\mathbb{R}^N}h(x)U_{1,0}\mathrm{d}x,\\ \widetilde{\Phi}(t) &\triangleq \frac{at^2}{2}\|U_{1,0}\|^2+\frac{bt^{2m+2}}{2m+2}\|U_{1,0}\|^{2m+2}-\frac{t^{2^*(s)}}{2^*(s)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{U_{1,0}^{2^*(s)}}{|x|^s}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

根据 (2.3) 式, 有

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}(t)&=\frac{a}{2}A_s^{\frac{N-s}{2-s}}t^2+\frac{b}{2m+2}A_s^{\frac{(N-s)(m+1)}{2-s}}t^{2m+2}-\frac{A_s^{\frac{N-3}{2-s}}}{2^*(s)}t^{2^*(s)},\\ \widetilde{\Phi}'(t)&=tA_s^{\frac{N-3}{2-s}}(a+bA_s^{\frac{m(N-s)}{2-s}}t^{2m}-t^{2^*(s)-2}).\end{aligned}$$

由命题 2.2 可知, $\widetilde{\Phi}'(r_0)=0$ 且

$$\max_{t\geqslant 0}\widetilde{\Phi}(t)=\widetilde{\Phi}(r_0)=\frac{a(2-s)}{2(N-s)}A_s^{\frac{N-s}{2-s}}r_0^2+\frac{b[2-s-m(N-2)]}{2(m+1)(N-s)}A_s^{\frac{(N-s)(m+1)}{2-s}}r_0^{2m+2}=\Theta,$$

这里利用了 $\widetilde{\Phi}'(r_0)=0$ 消掉了 $\widetilde{\Phi}$ 中的临界项. 选取 $\lambda_*>0$, 使得 $\Theta-D\lambda_*^{\frac{2(m+1)}{2m+1}}>0$. 从而, 存在 $\widehat{t}\in(0,r_0)$, 使得对任意的 $\lambda\in(0,\lambda_*)$, 都有

$$\max_{0\leqslant t\leqslant \widehat{t}}\Phi(t)\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant \widehat{t}}\widetilde{\Phi}(t)<\Theta-D\lambda_*^{\frac{2(m+1)}{2m+1}}<\Theta-D\lambda^{\frac{2(m+1)}{2m+1}}.$$

进一步, 可以选取 $\Lambda_{**}\in(0,\lambda_*]$, 使得对任意的 $\lambda\in(0,\Lambda_{**})$, 都有

$$\widehat{t}\lambda\int_{\mathbb{R}^N}h(x)U_{1,0}\mathrm{d}x>D\lambda^{\frac{2(m+1)}{2m+1}}.$$

故对任意的 $\lambda\in(0,\Lambda_{**})$, 都有 $\sup\limits_{t\geqslant\widehat{t}} I(tU_{1,0})\leqslant\sup\limits_{t\geqslant\widehat{t}}\widetilde{\Phi}(t)-\widehat{t}\lambda\int_{\mathbb{R}^N}h(x)U_{1,0}\mathrm{d}x<\Theta-D\lambda^{\frac{2(m+1)}{2m+1}}$.
因此, 对任意的 $\lambda\in(0,\Lambda_{**})$, 都有 $\sup\limits_{t\geqslant 0} I(tU_{1,0})<\Theta-D\lambda^{\frac{2(m+1)}{2m+1}}$.

注 2.4 根据注 2.3, 若 $a=0$, 将命题 2.4 中的 Θ 换为

$$\Theta=\frac{2-s-m(N-2)}{2(m+1)(N-s)}b^{\frac{N-s}{2-s-m(N-2)}}A_s^{\frac{(m+1)(N-s)}{2-s-m(N-2)}},$$

结论仍然成立.

最后, 给出定理 2.2 的证明.

定理 2.2 的证明 根据命题 2.1, 只需证明: 当 $0<m<\frac{2-s}{N-2}$ 时, 问题 (1.1) 还存在一个正解. 令 $\Lambda=\min\{\Lambda^*,\Lambda_*,\Lambda_{**}\}$. 由命题 2.1, 容易得知: 对任意的 $0<\lambda<\Lambda$ 都有能量泛

函 I 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 上具有山路几何结构. 由于 $2m+2<2^*(s)$, 有 $\lim\limits_{t\to+\infty} I(tU_{1,0})=-\infty$. 故存在充分大的 $t_0>0$, 使得 $I(t_0U_{1,0})<0$. 定义

$$\Gamma:=\{\gamma\in C([0,1],D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\mid \gamma(0)=0,\gamma(1)=t_0U_{1,0}\},$$

$$c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)).$$

对任意的 $0<\lambda<\Lambda$, 则命题 2.3 和命题 2.4 均成立. 进一步, 存在 $\{u_n\}\subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, 使得

$$I(u_n)\to c>0,\quad I'(u_n)\to 0,$$

则 $\{u_n\}$ 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 中存在收敛子列, 不妨仍记为 $\{u_n\}$, 且 $u_n\to u_{**}$. 由山路定理可得, $\lim\limits_{n\to\infty} I(u_n)=I(u_{**})=c>0$ 且 $I'(u_{**})=0$. 即 u_{**} 是问题 (1.1) 的非零解. 类似于命题 2.1 中所得的正解 u_* 可证得, u_{**} 是问题 (1.1) 的正解.

致谢 感谢审稿专家对本文提出的宝贵意见.

参　考　文　献

[1] Liu J, Liao J F, Tang C L. Positive solutions for Kirchhoff-type equations with critical exponent in $\mathbb{R}^N$ [J]. *J Math Anal Appl*, 2015, 429:1153–1172.

[2] 丁凌, 汪继秀, 肖氏武. 全空间上具有临界指数的 Kirchhoff 类方程无穷多个正解的存在性 [J]. 南昌大学学报 (自然科学版), 2017, 41(5):414–417.

[3] 丁凌, 汪继秀, 张丹丹. 全空间上具有临界指数的 Kirchhoff 类方程两个正解的存在性 [J]. 四川大学学报 (自然科学版), 2018, 55(3):457–461.

[4] 刘选状, 吴行平. 两类带有临界指数的 Kirchhoff 型方程的解的存在性和多重性 [D]. 重庆: 西南大学, 2015.

[5] 朱同亮, 吴行平. 两类带有临界指数的 Kirchhoff 型方程的解的存在性和多重性 [D]. 重庆: 西南大学, 2016.

[6] Lei C Y, Suo H M, Chu C M, et al. On ground state solutions for a Kirchhoff type equation with critical growth [J]. *Comput Math Appl*, 2016, 72(3):729–740.

[7] Ke X F, Liu J, Liao J F. Positive solutions for a critical p-Laplacian problem with a Kirchhoff term [J]. *Comput Math Appl*, 2019, 77(9):729–740.

[8] Guo Z J, Zhang X G. Schrödinger-Kirchhoff equation involving double critical nonlinearities [J]. *J Math Anal Appl*, 2019, 471(1–2):358–377.

[9] Zeng L, Tang C L. Existence of a positive ground state solution for a Kirchhoff type problem involving a critical exponent [J]. *Ann Polon Math*, 2016, 117(1):163–180.

[10] Ghoussoub N, Yuan C. Multiple solutions for quasilinear PDEs involving the critical Sobolev and Hardy exponents [J]. *Trans Amer Math Soc*, 2000, 352(12):5703–5743.

[11] Kang D S, Peng S J. Existence of solutions for elliptic problems with critical Sobolev-Hardy exponents [J]. *Israel J Mathematics*, 2004, 143:281–297.

[12] Brézis H, Lieb E. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1983, 88:486–490.

Positive Solutions to a Class of Kirchhoff-Type Problems with Hardy-Sobolev Critical Exponent in $\mathbb{R}^N$

DUAN Yu[1] SUN Xin[1] LIAO Jiafeng[2]

[1]College of Science, Guizhou University of Engineering Science, Bijie 551700, Guizhou, China. E-mail: duanyu3612@163.com; sunxinwan@163.com

[2]Corresponding author. College of Mathematics Education, China West Normal University, Nanchong 637002, Sichuan, China. E-mail:liaojiafeng@163.com

Abstract In this article, the following class of Kirchhoff-type problems with Hardy-Sobolev critical exponent is considered

$$\begin{cases} -\Big[a+b\Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\Big)^m\Big]\Delta u=\dfrac{|u|^{2^*(s)-2}u}{|x|^s}+\lambda h(x), \quad x\in\mathbb{R}^N,\\ u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N),\end{cases}$$

where $N\geqslant 3,\ a,\lambda\geqslant 0,\ b,m>0,\ 0\leqslant s<2,\ h\in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ is nonzero and nonnegative. When $\lambda=0$, some existence results are obtained by some analysis techniques. When $\lambda>0$, by using the variational method, the existence of positive solutions is obtained. Particularly, when $0<m<\frac{2-s}{N-2}$, at least two positive solutions are obtained.

Keywords Hardy-Sobolev critical exponent, Kirchhoff-Type problem, Positive solution, Variational method

2000 MR Subject Classification 35B09, 35J15, 35J20

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 44 No. 3, 2023
by ALLERTON PRESS, INC., USA