数 学 年 刊
2016, 37A(3):329–336
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2016.0028

齐次核的 Hilbert 型级数不等式取最佳常数因子的充要条件*

洪 勇[1] 温雅敏[1]

提要 利用实分析技巧及权函数方法，解决了具有齐次核的 Hilbert 型级数不等式取最佳常数因子的充要条件，并讨论其在算子理论中的应用.

关键词 Hilbert 型级数不等式，最佳常数因子，充要条件，有界算子
MR (2000) 主题分类 26D15
中图法分类 O178
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2016)03-0329-08

1 引 言

设 $t>0$, 若 $K(x,y)$ 满足 $K(tx,ty)=t^{\lambda}K(x,y)$, 则称 $K(x,y)$ 为 λ 阶的齐次函数. 对于具有齐次核的 Hilbert 型不等式取最佳常数问题一直是相关学者研究的主要问题. 若 $K(x,y)$ 为某些具体的函数，已有大量的文献对此进行了讨论 [1−10]. 更深入的研究是讨论 $K(x,y)$ 为抽象齐次函数时相应的 Hilbert 型不等式及何时有最佳常数的问题. 这方面目前已取得一定进展 [11−15]. 但遗憾的是目前的研究只涉及取最佳常数的充分条件，这些充分条件是否也是必要条件却不得而知，是一直没能解决的问题. 本文利用实分析论证技巧，对于具有齐次核的 Hilbert 型级数不等式解决了这个问题. 而对于积分形式的 Hilbert 型不等式将在另文中讨论.

2008 年，洪勇曾在文 [16] 中得到如下结论.

命题 A 设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $0<aq<1$, $0<bp<1$, $K(x,y)$ 是 λ 阶齐次非负对称的函数， $K(x,y)$ 分别关于 x 和 y 递减， $a_m\geqslant 0$, $b_n\geqslant 0$, 且

$$k(b,p)=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp}\mathrm{d}t,\quad k(a,q)=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-aq}\mathrm{d}t$$

收敛. 那么

(i) 有 Hilbert 型级数不等式:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)a_mb_n\\ &\leqslant k^{\frac{1}{p}}(b,p)k^{\frac{1}{q}}(a,q)\Big(\sum_{m=1}^{\infty}m^{1+\lambda+(a-b)p}a_m^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}n^{1+\lambda+(b-a)q}b_n^q\Big)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

本文 2014 年 1 月 7 日收到， 2014 年 10 月 8 日收到修改稿.
[1]广东财经大学数学与统计学院, 广州 510320. E-mail: hongyonggdcc@yeah.net; wenyamin@gdufe.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 61300204), 广东省自然科学基金 (No. S2012010010376) 和广州市科技计划项目 (No. 2010GN-C021) 的资助.

(ii) 若还有 $bp+aq=\lambda+2$, $K(1,t)\leqslant M$ (常数). 则 (i) 不等式中的常数因子 $k^{\frac{1}{p}}(b,p)k^{\frac{1}{q}}(a,q)$ 是最佳的.

命题 A 存在的不足，一是对参数 a,b 及 $K(x,y)$ 限制过多，不便应用；二是没有证明 $bp+aq=\lambda+2$ 是否是取最佳常数因子的必要条件. 本文将比较好地解决这两个问题，并且在论证方法上亦有所改进.

引理 1.1 设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, a,b,λ 都是常数， $K(x,y)$ 是 λ 阶齐次非负函数，$bp+aq=\lambda+2$, 且

$$W_1(b,p)=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp}\mathrm{d}t,\quad W_2(a,q)=\int_0^{+\infty}K(t,1)t^{-aq}\mathrm{d}t$$

收敛. 那么 $W_1(b,p)=W_2(a,q)$, 且有

$$\omega_1(b,p,x)=\int_0^{+\infty}K(x,y)y^{-bp}\mathrm{d}y=x^{1+\lambda-bp}W_1(b,p),\tag{1.1}$$

$$\omega_2(a,q,y)=\int_0^{+\infty}K(x,y)x^{-aq}\mathrm{d}x=y^{1+\lambda-aq}W_2(a,q).\tag{1.2}$$

证 由于 $K(x,y)$ 是 λ 阶齐次非负函数，且由 $bp+aq=\lambda+2$ 可得 $\lambda-2+bp=-aq$, 于是

$$\begin{aligned}W_1(b,p)&=\int_0^{+\infty}t^{\lambda-bp}K(t^{-1},1)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}u^{-\lambda+bp-2}K(u,1)\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}t^{-aq}K(t,1)\mathrm{d}t\\&=W_2(a,q).\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}\omega_1(b,p,x)&=\int_0^{+\infty}x^{\lambda}K\Big(1,\frac{y}{x}\Big)y^{-bp}\mathrm{d}y\\&=x^{1+\lambda-bp}\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp}\mathrm{d}t\\&=x^{1+\lambda-bp}W_1(b,p).\end{aligned}$$

故 (1.1) 成立.

同理可证 (1.2) 也成立.

2 主要结果与证明

定理 2.1 设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, a,b,λ 都是常数， $K(x,y)$ 是 λ 阶齐次非负函数，$K(1,t)t^{-bp}$ 及 $K(t,1)t^{-aq}$ 都在 $(0,+\infty)$ 上递减. 若

$$W_1(b,p)=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp}\mathrm{d}t,\quad W_2(a,q)=\int_0^{+\infty}K(t,1)t^{-aq}\mathrm{d}t$$

都收敛，那么

(i) $\forall a_m \geqslant 0, b_n \geqslant 0$, 有 Hilbert 型级数不等式:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)a_mb_n\\&\leqslant W_1^{\frac{1}{p}}(b,p)W_2^{\frac{1}{q}}(a,q)\Big(\sum_{m=1}^{\infty}m^{1+\lambda+(a-b)p}a_m^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}n^{1+\lambda+(b-a)q}b_n^q\Big)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

(ii) 当且仅当 $bp+aq=\lambda+2$ 时，(2.1) 中的常数因子 $W_1^{\frac{1}{p}}(b,p)W_2^{\frac{1}{q}}(a,q)$ 是最佳的. 且当 $bp+aq=\lambda+2$ 时，(2.1) 可化为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)a_mb_n\leqslant W_1(b,p)\Big(\sum_{m=1}^{\infty}m^{apq-1}a_m^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}n^{bpq-1}b_n^q\Big)^{\frac{1}{q}}.\tag{2.2}$$

证　(i) (2.1) 的证明见文 [16].

(ii) 充分性. 设 $bp+aq=\lambda+2$. 由引理 1.1 知 $W_1(b,p)=W_2(a,q)$, 且 $\lambda+1+(a-b)p=apq-1$, $\lambda+1+(b-a)q=bpq-1$. 于是 (2.1) 化为 (2.2).

如果这时的常数因子 $W_1(b,p)$ 不是最佳的，则存在常数 $M<W_1(b,p)$, 使得用 M 代替 (2.2) 中的 $W_1(b,p)$ 后，(2.2) 仍成立.

对充分小的 $\varepsilon>0$, 取 $a_m=m^{\frac{-apq-\varepsilon}{p}}$, $b_n=n^{\frac{-bpq-\varepsilon}{q}}$. 则有

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_{m=1}^{\infty}m^{apq-1}a_m^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}n^{bpq-1}b_n^q\Big)^{\frac{1}{q}}=\sum_{m=1}^{\infty}m^{-1-\varepsilon}\\&=1+\sum_{m=2}^{\infty}m^{-1-\varepsilon}<1+\int_1^{+\infty}t^{-1-\varepsilon}\mathrm{d}t=1+\frac{1}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)b_n&=\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)n^{-bp-\frac{\varepsilon}{q}}\\&=m^{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}K\Big(1,\frac{n}{m}\Big)n^{-bp-\frac{\varepsilon}{q}}\\&=m^{\lambda-bp}\sum_{n=1}^{\infty}K\Big(1,\frac{n}{m}\Big)\Big(\frac{n}{m}\Big)^{-bp}n^{-\frac{\varepsilon}{q}}\\&\geqslant m^{\lambda-bp}\int_1^{+\infty}K\Big(1,\frac{t}{m}\Big)\Big(\frac{t}{m}\Big)^{-bp}t^{-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}t\\&=m^{\lambda+1-bp-\frac{\varepsilon}{q}}\int_{\frac{1}{m}}^{+\infty}K(1,u)u^{-bp-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

对足够小的 $\delta>0$, 选取 N, 使当 $m>N$ 时，$\frac{1}{m}<\delta$. 据此并由上式，有

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)a_mb_n\\&=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\Big(\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)b_n\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1-\varepsilon} \int_{\frac{1}{m}}^{+\infty} K(1,t) t^{-bp-\frac{\varepsilon}{q}} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{m=1}^{N} m^{-1-\varepsilon} \int_{\frac{1}{m}}^{+\infty} K(1,t) t^{-bp-\frac{\varepsilon}{q}} \mathrm{d}t + \sum_{m=N+1}^{\infty} m^{-1-\varepsilon} \int_{\frac{1}{m}}^{+\infty} K(1,t) t^{-bp-\frac{\varepsilon}{q}} \mathrm{d}t \\
&\geqslant M_1 + \sum_{m=N+1}^{\infty} m^{-1-\varepsilon} \int_{\delta}^{+\infty} K(1,t) t^{-bp-\frac{\varepsilon}{q}} \mathrm{d}t \\
&\geqslant M_1 + \int_{N+1}^{+\infty} x^{-1-\varepsilon} \mathrm{d}x \int_{\delta}^{+\infty} K(1,t) t^{-bp-\frac{\varepsilon}{q}} \mathrm{d}t \\
&= M_1 + \frac{1}{\varepsilon}(N+1)^{-\varepsilon} \int_{\delta}^{+\infty} K(1,t) t^{-bp-\frac{\varepsilon}{q}} \mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

其中 $M_1 = \sum\limits_{m=1}^{N} m^{-1-\varepsilon} \int_{\frac{1}{m}}^{+\infty} K(1,t) t^{-bp-\frac{\varepsilon}{q}} \mathrm{d}t$.

综上所述，可得

$$
\varepsilon M_1 + (N+1)^{-\varepsilon} \int_{\delta}^{+\infty} K(1,t) t^{-bp-\frac{\varepsilon}{q}} \mathrm{d}t \leqslant M(1+\varepsilon).
$$

令 $\varepsilon \to 0^+$, 并利用 Lebesgue 控制收敛定理，有

$$
\int_{\delta}^{+\infty} K(1,t) t^{-bp} \mathrm{d}t \leqslant M,
$$

再令 $\delta \to 0^+$, 可得

$$
W_1(b,p) = \int_{0}^{+\infty} K(1,t) t^{-bp} \mathrm{d}t \leqslant M,
$$

这是一个矛盾，故 (2.2) 中的常数因子是最佳的.

必要性. 设 (2.1) 中的常数因子 $W_1^{\frac{1}{p}}(b,p) W_2^{\frac{1}{q}}(a,q)$ 是最佳的. 记 $c = bp + aq - (\lambda+2)$, $a_1 = a - \frac{c}{pq}$, $b_1 = b - \frac{c}{pq}$. 则 $1+\lambda+(a-b)p = 1+\lambda+(a_1-b_1)p$, $1+\lambda+(b-a)q = 1+\lambda+(b_1-a_1)q$, 且经简单计算，有

$$
W_2(a,q) = \int_{0}^{+\infty} K(t,1) t^{-aq} \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} K(1,t) t^{-bp+c} \mathrm{d}t.
$$

于是 (2.1) 等价于

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K(m,n) a_m b_n \leqslant{}& W_1^{\frac{1}{p}}(b,p) \Big(\int_{0}^{+\infty} K(1,t) t^{-bp+c} \mathrm{d}t \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\times \Big(\sum_{m=1}^{\infty} m^{1+\lambda+(a_1-b_1)p} a_m^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{1+\lambda+(b_1-a_1)q} b_n^q \Big)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

又经计算可得 $b_1 p + a_1 q = \lambda + 2$, $1+\lambda+(a_1-b_1)p = a_1 pq - 1$, $1+\lambda+(b_1-a_1)q = b_1 pq - 1$, 于是 (2.1) 又等价于

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K(m,n) a_m b_n \\
&\leqslant W_1^{\frac{1}{p}}(b,p) \Big(\int_{0}^{+\infty} K(1,t) t^{-bp+c} \mathrm{d}t \Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} m^{a_1 pq - 1} a_m^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{b_1 pq - 1} b_n^q \Big)^{\frac{1}{q}}. \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

根据假设条件可知 (2.3) 中的常数因子

$$W_1^{\frac{1}{p}}(b,p)\Big(\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp+c}\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{q}}$$

是最佳的．但由前面关于充分性的证明可知，(2.3) 的最佳常数因子是

$$\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-b_1p}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp+\frac{c}{q}}\mathrm{d}t.$$

于是有

$$\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp+\frac{c}{q}}\mathrm{d}t=W_1^{\frac{1}{p}}(b,p)\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp+c}\mathrm{d}t. \tag{2.4}$$

又根据 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp+\frac{c}{q}}\mathrm{d}t&=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp}\cdot 1\cdot t^{\frac{c}{q}}\mathrm{d}t\\&\leqslant\Big(\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp}\cdot 1^p\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp}t^c\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{q}}\\&=W_1^{\frac{1}{p}}(b,p)\Big(\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp+c}\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

当且仅当 $t^c=$ 常数，即 $c=0$ 时，等号成立．于是由 (2.4) 知 $c=0$, 从而 $bp+aq=\lambda+2$.

定理 2.2　设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, a,b,λ 都是常数，$K(x,y)$ 是 λ 阶齐次非负函数，$K(1,t)t^{-bp}$ 及 $K(t,1)t^{-aq}$ 都在 $(0,+\infty)$ 上递减．若

$$W_1(b,p)=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-bp}\mathrm{d}t,\quad W_2(a,q)=\int_0^{+\infty}K(t,1)t^{-aq}\mathrm{d}t$$

都收敛，那么

(i) $\forall a_m\geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}n^{(1-p)(\lambda+1)+(a-b)p}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)a_m\Big)^p\\&\leqslant[W_1^{\frac{1}{p}}(b,p)W_2^{\frac{1}{q}}(a,q)]^p\sum_{m=1}^{\infty}m^{1+\lambda+(a-b)p}a_m^p.\end{aligned}\tag{2.5}$$

(ii) 当且仅当 $bp+aq=\lambda+2$ 时，(2.5) 中的常数因子 $[W_1^{\frac{1}{p}}(b,p)W_2^{\frac{1}{q}}(a,q)]^p$ 是最佳的．且当 $bp+aq=\lambda+2$ 时，(2.5) 化为

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{(1-p)(bpq-1)}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)a_m\Big)^p\leqslant W_1^p(b,p)\sum_{m=1}^{\infty}m^{apq-1}a_m^p.$$

证　(i) 记 $\alpha=(1-p)(\lambda+1)+(a-b)p$, 并令

$$b_n=n^{\alpha}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)a_m\Big)^{p-1},\quad n=1,2,\cdots.$$

根据定理 2.1 的 (2.1), 有

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\Big(\sum_{m=1}^{\infty} K(m,n)a_m\Big)^p=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} K(m,n)a_m b_n\\ &\leqslant W_1^{\frac{1}{p}}(b,p)W_2^{\frac{1}{q}}(a,q)\Big(\sum_{m=1}^{\infty} m^{1+\lambda+(a-b)p}a_m^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{1+\lambda+(b-a)q}b_n^q\Big)^{\frac{1}{q}}\\ &\leqslant W_1^{\frac{1}{p}}(b,p)W_2^{\frac{1}{q}}(a,q)\Big(\sum_{m=1}^{\infty} m^{1+\lambda+(a-b)p}a_m^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\Big(\sum_{m=1}^{\infty} K(m,n)a_m\Big)^p\Big]^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

由此可得到 (2.5).

(ii) 前面已由 (2.1) 导出了 (2.5), 事实上，也可容易地由 (2.5) 导出 (2.1), 故 (2.5) 与 (2.1) 等价，从而当且仅当 $bp+aq=\lambda+2$ 时， (2.5) 中的常数因子是最佳的.

3 在算子理论中的应用

设 $K(m,n)\geqslant 0$, $u=\{u_n\}$ 是非负数列，定义级数算子 T:

$$T(u)_n=\sum_{m=1}^{\infty} K(m,n)u_m,\quad n=1,=2,\cdots,$$

则 T 是一个线性算子. 又设 $p>1$, α 是常数，记

$$l_\alpha^p=\Big\{u=\{u_m\}:u_m\geqslant 0,\ \|u\|_{p,\alpha}=\Big(\sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha}u_m^p\Big)^{\frac{1}{p}}<+\infty\Big\}.$$

若存在常数 M, 使 $\forall u=\{u_m\}\in l_\alpha^p$, 有

$$\|T(u)\|_{p,\gamma}\leqslant M\|u\|_{p,\alpha},$$

则称 T 是从 l_α^p 到 l_γ^p 的有界算子. 特别地，从 l_α^p 到 l_α^p 的有界算子称为 l_α^p 中的有界算子，并将 l_0^p 及 $\|u\|_{p,0}$ 简记为 l^p 及 $\|u\|_p$. T 的 (p,p) 型范数定义为

$$\|T\|=\sup_{u\in l_\alpha^p}\frac{\|T(u)\|_{p,\gamma}}{\|u\|_{p,\alpha}}.$$

命题 3.1 设 $p>1$, $K(x,y)$ 是 λ 阶齐次非负函数， $t^{-\frac{1}{p}}K(1,t)$ 及 $t^{-\frac{1}{q}}K(t,1)$ 都是 $(0,+\infty)$ 上的减函数. 那么当且仅当 $\lambda=-1$ 时，算子 T:

$$T(u)_n=\sum_{m=1}^{\infty} K(m,n)u_m,\quad n=1,2,\cdots$$

是 l^p 中的有界线性算子，且

$$\|T\|=\int_0^{+\infty} K(1,t)t^{-\frac{1}{p}}\mathrm{d}t.$$

证 取 q 使 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. $\forall a,b\in R$, 由定理 2.2 知，当且仅当 $bp+aq=\lambda+2$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(1-p)(bpq-1)}\Big(\sum_{m=1}^{\infty} K(m,n)u_m\Big)^p\leqslant W_1^p(b,p)\sum_{m=1}^{\infty} m^{apq-1}u_m^p,$$

其中 $W_1^p(b,p)$ 是最佳的. 于是可知, T 是 l^p 中的有界线性算子且 $\|T\| = \int_0^{+\infty} K(1,t)t^{-\frac{1}{p}}\mathrm{d}t$ 等价于 $a = b = \frac{1}{pq}$, 即 $\lambda = -1$.

命题 3.2 设 $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\alpha > 0$, $\max\left\{-\frac{1}{p}, -\frac{1}{q}\right\} \leqslant \beta < \min\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right\}$, $u = \{u_m\}$ 是非负数列. 则级数算子 T:

$$T(u)_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^\beta n^{-\beta}}{(m^\alpha + n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} u_m, \quad n = 1, 2, \cdots$$

是 l^p 中的有界线性算子, 且 $\|T\| = \frac{1}{\alpha} B\big(\frac{1}{\alpha}\big(\frac{1}{p} + \beta\big), \frac{1}{\alpha}\big(\frac{1}{q} - \beta\big)\big)$, 其中 $B(\cdot,\cdot)$ 是 Beta 函数.

证　记 $K(x,y) = \frac{x^\beta y^{-\beta}}{(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$, 则 $K(x,y)$ 是 -1 阶齐次非负函数.

根据 $\max\left\{-\frac{1}{p}, -\frac{1}{q}\right\} \leqslant \beta < \min\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right\}$ 易知, $t^{-\frac{1}{p}} K(1,t)$ 及 $t^{-\frac{1}{q}} K(t,1)$ 都在 $(0, +\infty)$ 上递减. 于是由命题 3.1 知 T 是 l^p 中的有界线性算子, 且

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \int_0^{+\infty} K(1,t) t^{-\frac{1}{p}} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\beta}}{(1+t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} t^{-\frac{1}{p}} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{\alpha}}} t^{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{q} - \beta\right) - 1} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\alpha} B\Big(\frac{1}{\alpha}\Big(\frac{1}{p} + \beta\Big), \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{1}{q} - \beta\Big)\Big).
\end{aligned}$$

参　考　文　献

[1] 杨必成. 算子范数与 Hilbert 型不等式 [M]. 北京：科学出版社, 2009.

[2] 洪勇. Hardy-Hilbert 积分不等式的全方位推广 [J]. 数学学报：中文版, 2001, 44(4): 619–626.

[3] Yang B C. On a Hilbert-Hardy-Type integral operator and application [EB\OL]. *J Ineq Appl*, 2010, Article ID: 812636, 2010:10 pages.

[4] Zhao C J, Debnath L. Some new inverse type Hilbert integral inequalities [J]. *J Math Anal Appl*, 2001, 262:411–418.

[5] 和炳, 杨必成. 一个带超几何函数的零次齐次的 Hilbert 型积分不等式 [J]. 数学的实践与认识, 2010, 40(18):203–211.

[6] 洪勇. 涉及多个函数的 Hardy 型积分不等式 [J]. 数学学报：中文版, 2006, 49(1):39–44.

[7] 匡继昌. 常用不等式 [M]. 济南：山东科学技术出版社, 2004.

[8] Yang B C. On the norm of a Hilbert's type linear operator and applications [J]. *J Math Anal Appl*, 2007, 325:529–541.

[9] 胡克. 解析不等式的若干问题 [M]. 武汉：武汉大学出版社, 2004.

[10] 吕中学, 谢鸿政. 关于 Hilbert 积分不等式的改进和推广 [J]. 数学进展, 2003, 32(4):419–424.

[11] Bmetic I, Pecaric J. Generalization of Hilbert's integral inequalities [J]. *Math Ineq Appl*, 2004, 7(2):199–205.

[12] 洪勇. 一类带齐次核的奇异重积分算子的范数及其应用 [J]. 数学年刊, 2011, 32A(5): 599–606.

[13] Krnić M, Mingzhe G, Pečarić J, Xuemei G. On the best constant in Hilbert's inequality [J]. *Math Ineq Appl*, 2005, 8(2):317–329.

[14] 杨必成. 参量化 Hilbert 型不等式研究综述 [J]. 数学进展, 2009, 38(3):257–268.

[15] Cizmesija A, Krnić M, Pečarić J. General Hilbert-type inequalities with non-conjugate exponents [J]. *Math Ineq Appl*, 2008, 11(2):237–269.

[16] 洪勇. 带对称齐次核的级数算子的范数刻画及其应用 [J]. 数学学报：中文版, 2008, 51(2):363–370.

A Necessary and Sufficient Condition of that Hilbert Type Series Inequality with Homogeneous Kernel Has the Best Constant Factor

HONG Yong[1] WEN Yamin[1]

[1]College of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Finance and Economics, Guangzhou 510320, China.
E-mail: hongyonggdcc@yeah.net; wenyamin@gdufe.edu.cn

Abstract By using the technic of real analysis and the way of weight functions, a necessary and sufficient condition of that Hilbert type series inequality with homogeneous kernel has the best constant is obtained. Its applications in operator theory are considered.

Keywords Hilbert type series inequality, Best constant factor, Necessary and sufficient condition, Bounded operator

2000 MR Subject Classification 26D15