数 学 年 刊
2012,33A(1):27–38

一个模拟趋化现象的广义双曲-抛物系统的光滑解的全局分析*

张映辉[1] 谭 忠[2] 赖柏顺[3] 孙明保[1]

提要 考虑一个模拟趋化现象的广义双曲-抛物系统的 Cauchy 问题，当动能函数为非线性函数且初始值具有小的 L^2 能量但其 H^2 能量可能任意大时，得到了全局光滑解的存在性和渐近行为．这些结果推广了以前的关于动能函数为线性函数或初始值具有小的 H^2 能量情形下的相关结果，首次获得了关于全局光滑大解方面的结果．这些结果的证明基于构造一个新的非负凸熵和做精细的能量估计．

关键词 全局分析，双曲-抛物系统，趋化，凸熵
MR (2000) 主题分类 35L45
中图法分类 O175.29
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2012)01-0027-12

1 引言及主要结果

本文考虑下面的双曲-抛物系统

$$\begin{cases} v_t - f(u)_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u_t - (uv)_x = Du_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

以及初值条件

$$(v,u)(x,0) = (v_0,u_0)(x), \quad \inf_{x\in\mathbb{R}} u_0(x) > 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

系统 (1.1) 是描述生物学中的趋化现象的重要模型之一，它跟下面的系统紧密相关：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} = D\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(p\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\ln\dfrac{p}{\Phi(w)}\Big)\Big), \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = \Psi(p,w). \end{cases} \tag{1.3}$$

Othmer 和 Stevens[1] 以及 Levine 和 Sleeman[2] 基于生物背景和数值计算得到了上面的系统，这里的 $p(x,t)$ 表示粒子密度， $w(x,t)$ 是化学集中， $D>0$ 是粒子扩散速率， Φ 一般是指化学势能， Ψ 表示化学动能．根据具体的模拟目标，动能函数 $\Psi(p,w)$ 有多种不同形式．

本文考虑如下一类非线性动能函数：

$$\Psi(p,w) = \beta f(p) w, \tag{1.4}$$

其中 β 是一个给定的正常数， f 是一个光滑函数且满足对所有的 $u \geqslant 0$,

$$f'(u) > 0. \tag{1.5}$$

本文 2011 年 4 月 12 日收到， 2011 年 9 月 11 日收到修改稿．
[1]湖南理工学院数学学院，湖南 岳阳 414006.
E-mail: zhangyinghui1009@yahoo.com.cn; sun_mingbao@163.com
[2]厦门大学数学科学学院，福建 厦门 361005. E-mail: ztan85@163.com
[3]河南大学现代数学研究所，河南 开封 475004. E-mail: laibaishun@henu.edu.cn
*国家自然科学基金 (No. 10976026, No. 10871061), 湖南省教育厅基金 (No. 11C0628) 和湖南理工学院基金 (No. 2011Y49) 资助的项目．

这里，我们强调 (1.5) 是保证系统 (1.1) 的相应的双曲系统是严格双曲的必要条件 (见 (1.11)).

事实上，跟文 [3–4] 一样，如果让 $\Phi(w)=w^{-\alpha}$ (α 是一个正常数) 及 $\Psi(p,w)$ 由 (1.4) 所定义，那么系统 (1.3) 能改写为如下的形式：

$$\begin{cases} p_t=Dp_{xx}+D\alpha\Big(p\dfrac{w_x}{w}\Big)_x, \\ w_t=\beta f(p)w. \end{cases} \tag{1.6}$$

进一步地，如果令 $q=(\ln w)_x=\frac{w_x}{w}$, 那么我们能改写系统 (1.6) 为

$$\begin{cases} p_t=Dp_{xx}+D\alpha(pq)_x, \\ q_t=\beta f(p)_x. \end{cases} \tag{1.7}$$

最后，作变换 $\tau=At,\ \xi=Bx,\ u=p,\ v=c_1q$ (其中正常数 A, B 和 c_1 的定义在下面给出), 那么系统 (1.7) 变为

$$\begin{cases} v_\tau=\dfrac{\beta Bc_1}{A}f(u)_\xi, \\ u_\tau=\dfrac{DB^2}{A}u_{\xi\xi}+\dfrac{D\alpha B}{Ac_1}(uv)_\xi. \end{cases} \tag{1.8}$$

如果我们选取

$$\begin{cases} \dfrac{\beta Bc_1}{A}=1, \\ \dfrac{B^2}{A}=1, \\ \dfrac{D\alpha B}{Ac_1}=1, \end{cases}$$

即 $A=D\alpha\beta>0,\ B=\sqrt{D\alpha\beta}>0,\ c_1=\sqrt{\frac{D\alpha}{\beta}}>0$, 则容易看出 u 和 v 满足下面的方程组：

$$\begin{cases} v_\tau-f(u)_\xi=0, \\ u_\tau-(uv)_\xi=Du_{\xi\xi}. \end{cases} \tag{1.9}$$

如果用变量 (x,t) 取代 (τ,ξ), 那么 (1.9) 正好是 (1.1).

系统 (1.1) 相应的双曲系统为

$$\begin{cases} v_t-f(u)_x=0, \\ u_t-(uv)_x=0. \end{cases} \tag{1.10}$$

系统 (1.10) 的特征值为

$$\lambda_1(v,u)=-\frac{v}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{v^2+4uf'(u)},\quad \lambda_2(v,u)=-\frac{v}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{v^2+4uf'(u)}. \tag{1.11}$$

因此，如果 $u>0$ 以及 (1.5) 成立，那么系统 (1.10) 是严格双曲的.

为了直接进入本文的主题，我们仅回顾先前一些紧密相关的结果. 当 $f(u)=\lambda u-\mu$ 时，其中 $\lambda\ (>0)$, $\mu\ (\geqslant 0)$ 是给定的常数，系统 (1.1) 能简化为

$$\begin{cases} v_t-u_x=0, \\ u_t-(uv)_x=u_{xx}. \end{cases} \tag{1.12}$$

文 [3–4] 分别考虑了系统 (1.12) 的初边值问题和 Cauchy 问题. 在文 [3] 中，作者考虑了系统 (1.12) 的零 Dirichlet 边值问题. 当 $\|u_0-1\|_{H^2}^2+\|v_0\|_{H^2}^2$ 充分小时，他们得到

了光滑解的全局存在性. 在文 [4] 中, 作者证明了系统 (1.12) 大初值问题的光滑解整体存在. 至于其他的相关结果, 读者可参阅文 [5–14] 以及其中的参考文献.

本文旨在研究 Cauchy 问题 (1.1)–(1.2) 光滑解的全局存在性和渐近行为. 当动能函数为非线性函数以及初始值具有小的 L^2 能量但其 H^2 能量可能任意大时, 我们得到了 Cauchy 问题 (1.1)–(1.2) 光滑解的全局存在性和渐近行为.

在陈述主要结果之前, 先解释本文中所用的符号和约定. 我们用 C 表示正常数, 而且字母 "C" 在不同的地方可以不同. $L^p = L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 表示通常的 Lebesgue 空间, 其中范数定义为

$$\|g\|_{L^p} = \Big(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$
$$\|g\|_{L^\infty} = \sup_{\mathbb{R}} |g(x)|.$$

$H^l(\mathbb{R})$ $(l \geqslant 0)$ 表示通常的 l 阶 Sobolev 空间, 其范数定义为

$$\|g\|_l = \Big(\sum_{j=0}^{l} \|\partial_x^j g\|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{L^2}$.

下面是本文的主要结果.

定理 1.1　假定 $(v_0, u_0 - \overline{u}) \in (H^2(\mathbb{R}))^2$ 且 $\|(v_0, u_0 - \overline{u})\|$ 充分小, 那么 Cauchy 问题 (1.1)–(1.2) 存在唯一的 $(C([0,\infty), H^2(\mathbb{R})))^2$ 解 $(v, u - \overline{u})(x,t)$, 且解有下面的渐近行为:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |(v,u)(x,t) - (0,\overline{u})(x,t)| \to 0, \quad \text{当 } t \to +\infty \text{ 时} \tag{1.13}$$

及

$$\|v_x(\cdot,t)\|_1 + \|u_x(\cdot,t)\|_1 \to 0, \quad \text{当 } t \to +\infty \text{ 时}. \tag{1.14}$$

注 1.1　如果 (1.4) 中所定义的函数 f 是线性的, 我们在最近的一篇论文中证明了只要求 $(v_0, u_0 - \overline{u}) \in (H^2(\mathbb{R}))^2$, 就能得到与定理 1.1 类似的结果. 证明的关键在于控制解在真空附近的估计. 但是, 在本文中因为函数 f 是非线性的且相当一般, 我们不知道怎么处理解在真空附近的估计.

注 1.2　相似的方法能用来研究初边值问题. 我们在即将出现的一篇论文中证明了这一结果.

现在简单地评论本文的分析要点. 对于本文所考虑的问题 (1.1)–(1.2), 主要困难和不同来自于 3 个方面. 首先, 因为只假定初始值的 L^2 范数充分小, 文 [3] 中的能量方法在这里失效. 确实如此, 因为本文中初始值的 H^2 范数可以任意大, 但是文 [3] 中主要结果的证明在本质上依赖于初始值的 H^2 范数充分小这一假定. 我们通过构造一个新的非负凸熵以及利用一个能量估计技巧来克服这一困难. 更精确地, 我们首先通过构造一个新的非负凸熵得到了解 $(v, u - \overline{u})$ 的独立于时间的 L^2 界充分小. 然后, 在先验假定 $|v| \leqslant \epsilon$ 和 $|u - \overline{u}| \leqslant \frac{\overline{u}}{2}$ 下, 能得到解 $(v, u - \overline{u})$ 的一阶导数的独立于时间的 H^1 界. 最后利用 Sobolev 不等式来封闭我们的能量估计. 其次, 由于函数 f 的非线性性和一般性, 能量估计变得非常复杂和巧妙, 例如 (2.10), (2.14) 和 (2.31). 最后, 文 [4] 考虑动能函数 f 是线性函数的情形, 得到了系统 (1.12) 大初值问题的光滑解的整体存在性. 但是没有解的大时间行为, 因为他们得到的能量估计依赖于时间 t. 本文考虑动能函数 f 是非线性函数以及初始

值的 L^2 范数充分小的情形. 幸运地, 我们得到了 Cauchy 问题 (1.1)–(1.2) 的光滑解的整体存在性和渐近行为.

本文的其余部分安排如下: 在第 2 节中, 我们致力于得到 Cauchy 问题 (1.1)–(1.2) 的解的先验估计. 在第 3 节中, 我们利用第 2 节中得到的能量估计来完成定理 1.1 的证明.

2 能量估计

在本节中, 我们致力于在下面的先验假定下:

$$|v| \leqslant \epsilon, \quad |u-\overline{u}| \leqslant \frac{\overline{u}}{2}, \tag{2.1}$$

得到 Cauchy 问题 (1.1)–(1.2) 的解 $(v, u-\overline{u})(x,t)$ 的一致估计, 其中 $0<\epsilon\ll 1$.

首先通过构造双曲系统 (1.10) 的一个新的非负凸熵来推导 Cauchy 问题 (1.1)–(1.2) 解 $(v, u-\overline{u})(x,t)$ 的 L^2 能量估计. 为此, 首先给出 (1.10) 的熵-熵流对 $(\eta(v,u), q(v,u))$ 之间的关系 (见 [15])

$$\begin{cases} q_v = -u\eta_u, \\ q_u = -f'(u)\eta_v - v\eta_u. \end{cases} \tag{2.2}$$

从 (2.2) 中消除 q, 可得

$$f'(u)\eta_{vv} + v\eta_{vu} - u\eta_{uu} = 0. \tag{2.3}$$

接下来寻求 (1.10) 的具有如下形式的熵:

$$\eta(v,u) = \frac{1}{2}v^2 + g(u), \tag{2.4}$$

其中 $g(u)$ 期望是一个非负的凸函数.

把 (2.4) 代入 (2.3), 得到

$$[f(u)+g(u)-ug'(u)]' = 0, \tag{2.5}$$

这暗含了

$$\Big(\frac{g(u)}{u}\Big)' = \frac{f(u)-f(\overline{u})}{u^2} + \frac{c_1}{u^2}, \tag{2.6}$$

其中 c_1 是一个任意常数. 在区间 $[\overline{u}, u]$ 上积分 (2.6), 可得

$$g(u) = u\int_{\overline{u}}^{u} \frac{f(s)-f(\overline{u})}{s^2}\mathrm{d}s + \Big(\frac{g(\overline{u})}{\overline{u}} + \frac{c_1}{\overline{u}}\Big)u - c_1. \tag{2.7}$$

如果特别地选取 $c_1 = g(\overline{u}) = 0$, 那么可得到 (1.10) 的一个特殊的熵-熵流对

$$\begin{cases} \eta(v,u) = \dfrac{1}{2}v^2 + u\displaystyle\int_{\overline{u}}^{u} \frac{f(s)-f(\overline{u})}{s^2}\mathrm{d}s, \\ q(v,u) = -v\Big(f(u) + u\displaystyle\int_{\overline{u}}^{u} \frac{f(s)-f(\overline{u})}{s^2}\mathrm{d}s - f(\overline{u})\Big). \end{cases} \tag{2.8}$$

引理 2.1 (L^2 能量估计) 在定理 1.1 的假设条件及先验假定 (2.1) 下, 有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|(v, u-\overline{u})(\cdot,t)\|^2 + \int_0^T \|u_x(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t \leqslant C\|(v_0, u_0-\overline{u})\|^2, \tag{2.9}$$

其中 C 是一个独立于 T 的正常数.

证　容易验证 (2.8) 中所定义的 $(\eta(v,u),q(v,u))$ 满足

$$\eta_t+q_x=-\frac{f'(u)u_x^2}{u}+\Big(u_x\int_{\overline{u}}^{u}\frac{f(s)-f(\overline{u})}{s^2}\mathrm{d}s+u_x\frac{f(u)-f(\overline{u})}{u}\Big)_x. \tag{2.10}$$

在 $\mathbb{R}\times[0,T]$ 区间上积分 (2.10), 可得

$$\int_{\mathbb{R}}\eta(x,t)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\frac{f'(u)u_x^2}{u}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}}\eta(x,0)\mathrm{d}x. \tag{2.11}$$

利用泰勒公式、 (1.5) 及先验假定 (2.1), 有

$$\frac{v^2}{2}+c_2(u-\overline{u})^2\leqslant\eta(v,u)\leqslant\frac{v^2}{2}+c_3(u-\overline{u})^2, \tag{2.12}$$

其中 $c_2=\min\limits_{u\in[\frac{\overline{u}}{2},\frac{3\overline{u}}{2}]}\dfrac{f'(u)}{u}>0$ 以及 $c_3=\max\limits_{u\in[\frac{\overline{u}}{2},\frac{3\overline{u}}{2}]}\dfrac{f'(u)}{u}>0$.

那么，从 (2.11) 和 (2.12) 能立即得到 (2.9). 因此完成了引理 2.1 的证明.

接下来的引理是关于 $(v_x,u_x)(x,t)$ 的 $C([0,T],L^2(\mathbb{R}))$ 范数估计.

引理 2.2 (一阶能量估计)　在引理 2.1 的假设条件下，有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|(v_x,u_x)(\cdot,t)\|^2+\int_0^T\|(v_x,u_{xx})(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\leqslant C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^2, \tag{2.13}$$

其中 C 是一个独立于 T 的正常数.

证　对 (1.1) 中的第 1 个方程关于 x 微分一次，然后用 v_x 乘以得到的方程，并运用 (1.1) 中的第 2 个方程，有

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{2}v_x^2-\frac{1}{D}(f(u)-f(\overline{u}))v_x\Big)_t+\frac{1}{D}uf'(u)v_x^2\\&=\Big(-\frac{1}{D}(f(u)-f(\overline{u}))f'(u)u_x\Big)_x+\frac{1}{D}f'^2(u)u_x^2-\frac{1}{D}vf'(u)v_xu_x+f''(u)u_x^2v_x.\end{aligned}$$

在 $\mathbb{R}\times[0,T]$ 区间上积分上面的方程，并运用 (1.5) 和 (2.1), 可得

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_x(\cdot,t)\|^2+\int_0^T\|v_x(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\\&\leqslant C\|v_{0x}\|^2+C\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_{\mathbb{R}}|(f(u)-f(\overline{u}))v_x(x,t)|\mathrm{d}x\\&\quad+\int_0^T\int_{\mathbb{R}}f'^2(u)u_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{\mathbb{R}}|vf'(u)v_xu_x|\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{\mathbb{R}}f''(u)u_x^2v_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)\\&:=C\|v_{0x}\|^2+\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3+\mathrm{I}_4.\end{aligned} \tag{2.14}$$

接下来逐项估计 I_k $(k=1,2,3,4)$. 利用 Young 不等式、均值定理、 (1.5) 和 (2.1), 可得

$$\mathrm{I}_1\leqslant\frac{1}{2}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_x(\cdot,t)\|^2+C\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|(u-\overline{u})(\cdot,t)\|^2. \tag{2.15}$$

由于 (1.5) 和先验假定 (2.1), 有

$$\mathrm{I}_2\leqslant C\int_0^T\|u_x(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t. \tag{2.16}$$

运用 Cauchy-Schwarz 不等式和 (2.1), 可得

$$\mathrm{I}_3\leqslant C\epsilon\int_0^T\|(v_x,u_x)(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t. \tag{2.17}$$

至于 I_4, 我们能利用分部积分把 I_4 改写为

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_4 &= -C\int_0^T\int_{\mathbb{R}} vf'''(u)u_x^3\mathrm{d}x\mathrm{d}t - 2C\int_0^T\int_{\mathbb{R}} vf''(u)u_xu_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &:= \mathrm{I}_{4,1}+\mathrm{I}_{4,2}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

由 Sobolev 不等式 (见 [16]), 有

$$\|u_x(\cdot,t)\|_{L^3}^3 \leqslant C\|(u-\overline{u})(\cdot,t)\|_{L^6}^{\frac{3}{2}}\|u_{xx}(\cdot,t)\|^{\frac{3}{2}}.\tag{2.19}$$

由 (2.1), (2.19) 和 Young 不等式，可得

$$\mathrm{I}_{4,1} \leqslant C\epsilon\int_0^T\|(u-\overline{u})(\cdot,t)\|_{L^6}^6\mathrm{d}t + C\epsilon\int_0^T\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t.\tag{2.20}$$

这与引理 2.1 及下面的 Sobolev 不等式 (见 [16])

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^6}^6 \leqslant C\|(u-\overline{u})(\cdot,t)\|^4\|u_x(\cdot,t)\|^2\tag{2.21}$$

暗含了

$$\mathrm{I}_{4,1} \leqslant C\epsilon\int_0^T\|u_x(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t + C\epsilon\int_0^T\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t.\tag{2.22}$$

类似地，有

$$\mathrm{I}_{4,2} \leqslant C\epsilon\int_0^T\|u_x(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t + C\epsilon\int_0^T\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t.\tag{2.23}$$

把 (2.22) 和 (2.23) 代入 (2.18), 可得

$$\mathrm{I}_4 \leqslant C\epsilon\int_0^T\|u_x(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t + C\epsilon\int_0^T\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t.\tag{2.24}$$

综合上述估计 (2.14)–(2.17) 和 (2.24) 并运用 (2.9), 可得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_x(\cdot,t)\|^2 + \int_0^T\|v_x(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t \leqslant C\Big(\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^2 + \epsilon\int_0^T\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\Big).\tag{2.25}$$

接下来，我们估计 u_x 的 L^2 范数. 首先，对 (1.1) 中的第 2 个方程关于 x 微分一次，然后用 u_x 乘以得到的方程，可得

$$\Big(\frac{1}{2}u_x^2\Big)_t + Du_{xx}^2 = [Du_xu_{xx}+u_x(uv)_x]_x - uu_{xx}v_x - vu_xu_{xx}.\tag{2.26}$$

在区间 $\mathbb{R}\times[0,T]$ 上积分 (2.26) 并运用先验假定 (2.1), (2.9) 和 Young 不等式，有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_x(\cdot,t)\|^2 + \int_0^T\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t \leqslant C\Big(\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^2 + \int_0^T\|v_x(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\Big).\tag{2.27}$$

由 (2.27) 可得

$$\int_0^T\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t \leqslant C\Big(\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^2 + \int_0^T\|v_x(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\Big).\tag{2.28}$$

把 (2.28) 代入 (2.25) 并注意到 ϵ 充分小，可得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_x(\cdot,t)\|^2 + \int_0^T\|v_x(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t \leqslant C\,\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^2.\tag{2.29}$$

那么，从 (2.27) 和 (2.29) 能立即得到 (2.13). 因此完成了引理 2.2 的证明.

接下来，我们推导 $(v_{xx},u_{xx})(x,t)$ 的 $C([0,T],L^2(\mathbb{R}))$ 范数估计.

引理 2.3 (二阶能量估计) 在引理 2.1 的假设条件下，有

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|(v_{xx},u_{xx})(\cdot,t)\|^2+\int_0^T\|(v_{xx},u_{xxx})(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\\&\leqslant C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_2^2+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^{10},\end{aligned}\tag{2.30}$$

其中 C 是一个独立于 T 的正常数.

证 对 (1.1) 中的第 1 个方程关于 x 微分两次，然后用 v_{xx} 乘以得到的方程，再运用 (1.1) 中的第 2 个方程，有

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{2}v_{xx}^2-\frac{1}{D}f'(u)u_xv_{xx}\Big)_t+\frac{1}{D}uf'(u)v_{xx}^2\\&=f'''(u)u_x^3v_{xx}+2f''(u)u_xu_{xx}v_{xx}-\frac{1}{D}f(u)_xf(u)_{xxx}-\frac{1}{D}f'(u)vu_{xx}v_{xx}-\frac{2}{D}f'(u)u_xv_xv_{xx}.\end{aligned}$$

在 $\mathbb{R}\times[0,T]$ 区间上积分上面的方程，并运用 (1.5) 和 (2.1), 可得

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2+\int_0^T\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\\&\leqslant C\|v_{0xx}\|^2+C\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int_{\mathbb{R}}|u_xv_{xx}(x,t)|\mathrm{d}x\\&\quad+\int_0^T\int_{\mathbb{R}}|u_xu_{xx}v_{xx}|\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{\mathbb{R}}|f(u)_xf(u)_{xxx}|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\quad+\int_0^T\int_{\mathbb{R}}(|u_{xx}v_{xx}|+|u_xv_xv_{xx}|)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{\mathbb{R}}|u_x^3v_{xx}|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)\\&:=C\|v_{0xx}\|^2+\mathrm{J}_1+\mathrm{J}_2+\mathrm{J}_3+\mathrm{J}_4+\mathrm{J}_5.\end{aligned}\tag{2.31}$$

接下来，我们逐项估计 J_k $(k=1,2,3,4,5)$. 利用 Young 不等式和引理 2.2, 容易得到

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_1&\leqslant\frac{1}{2}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2+C\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_x(\cdot,t)\|^2\\&\leqslant\frac{1}{2}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^2.\end{aligned}\tag{2.32}$$

运用 Young 不等式、 Sobolev 不等式和引理 2.2, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_2&\leqslant\int_0^T\int_{\mathbb{R}}u_x^2u_{xx}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{1}{8}\int_0^T\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\\&\leqslant C\int_0^T\|u_x(\cdot,t)\|_{L^\infty}^2\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+\frac{1}{8}\int_0^T\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\\&\leqslant C\int_0^T\|u_x(\cdot,t)\|u_{xx}(\cdot,t)\|\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+\frac{1}{8}\int_0^T\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\\&\leqslant C\sup_{0\leqslant t\leqslant T}(\|u_x(\cdot,t)\|u_{xx}(\cdot,t)\|)\int_0^T\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+\frac{1}{8}\int_0^T\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\\&\leqslant C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^2\sup_{0\leqslant t\leqslant T}(\|u_x(\cdot,t)\|\|u_{xx}(\cdot,t)\|)+\frac{1}{8}\int_0^T\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\\&\leqslant\delta\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2+\frac{1}{8}\int_0^T\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^6,\end{aligned}\tag{2.33}$$

其中 δ 是一个待定的正常数. 由 Young 不等式、 Sobolev 不等式、引理 2.1 和引理 2.2, 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_3 &\leqslant \int_0^T\int_{\mathbb{R}}(u_x^4+|u_x^2u_{xx}|+|u_xu_{xxx}|)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\leqslant \delta\int_0^T\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+C\int_0^T\|u_x(\cdot,t)\|_{L^4}^4\mathrm{d}t+\int_0^T\|(u_x,u_{xx})(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\\
&\leqslant \delta\int_0^T\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+C\int_0^T\|u_x(\cdot,t)\|^{\frac{7}{2}}\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t+\int_0^T\|(u_x,u_{xx})(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\\
&\leqslant 2\delta\int_0^T\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+C\int_0^T\|u_x(\cdot,t)\|^{\frac{14}{3}}\mathrm{d}t+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^2\\
&\leqslant 2\delta\int_0^T\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+C\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_x(\cdot,t)\|^{\frac{8}{3}}\int_0^T\|u_x(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^2\\
&\leqslant 2\delta\int_0^T\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^2+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^{\frac{14}{3}}.
\end{aligned}\tag{2.34}$$

类似地，有

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_4 &\leqslant \int_0^T\int_{\mathbb{R}}u_x^2v_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int_0^T\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+C\int_0^T\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\\
&\leqslant C\int_0^T\|u_x(\cdot,t)\|_{L^\infty}^2\|v_x(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int_0^T\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^2\\
&\leqslant C\int_0^T\|u_x(\cdot,t)\|^{\frac{3}{2}}\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}\|v_x(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int_0^T\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^2\\
&\leqslant \delta\int_0^T\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+C\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_x(\cdot,t)\|^{\frac{8}{3}}\int_0^T\|u_x(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\\
&\quad+\frac{1}{4}\int_0^T\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^2\\
&\leqslant \delta\int_0^T\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int_0^T\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\\
&\quad+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^2+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^{\frac{14}{3}}
\end{aligned}\tag{2.35}$$

和

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_5 &\leqslant \int_0^T\int_{\mathbb{R}}\|u_x(\cdot,t)\|_{L^6}^6\mathrm{d}t+\frac{1}{8}\int_0^T\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\\
&\leqslant C\int_0^T\|u_x(\cdot,t)\|^5\|u_{xxx}(\cdot,t)\|\mathrm{d}t+\frac{1}{8}\int_0^T\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\\
&\leqslant \delta\int_0^T\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+C\int_0^T\|u_x(\cdot,t)\|^{10}\mathrm{d}t+\frac{1}{8}\int_0^T\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\\
&\leqslant \delta\int_0^T\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+C\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_x(\cdot,t)\|^8\int_0^T\|u_x(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+\frac{1}{8}\int_0^T\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\\
&\leqslant \delta\int_0^T\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+\frac{1}{8}\int_0^T\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^{10}.
\end{aligned}\tag{2.36}$$

把 (2.32)–(2.36) 代入 (2.31), 可得

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2+\int_0^T\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\\&\leqslant 2\delta\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2+8\delta\int_0^T\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\\&\quad+C\|v_{0xx}\|^2+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^2+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^{10}.\end{aligned}\tag{2.37}$$

接下来，我们估计 u_{xx} 的 L^2 范数. 首先，对 (1.1) 中的第 2 个方程关于 x 微分两次，然后用 u_{xx} 乘以得到的方程，可得

$$\left(\frac{1}{2}u_{xx}^2\right)_t+Du_{xx}^2=((uv)_{xx}+Du_{xxx})u_{xx})_x-(uv)_{xx}u_{xxx}.$$

在区间 $\mathbb{R}\times[0,T]$ 上积分上面的方程并运用与前面类似的讨论，有

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2+\int_0^T\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\\&\leqslant C\int_0^T\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+C\|u_{0xx}\|^2+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^2+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^{10}.\end{aligned}\tag{2.38}$$

把 (2.37) 代入 (2.38) 并选取 δ 充分小，可得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2+\int_0^T\|u_{xxx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\leqslant C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_2^2+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^{10}.\tag{2.39}$$

那么，从 (2.37) 和 (2.39) 我们能立即得到 (2.30).

因此，我们完成了引理 2.3 的证明.

3　定理 1.1 的证明

利用一个局部存在性结果 (见 [17–18]) 以及先验估计 (2.9), (2.13) 和 (2.30), 我们能利用标准的连续性讨论得到定理 1.1 中所陈述的全局存在性结果.

现在，我们必须证明先验假定 (2.1) 能被封闭，因为在先验假定 (2.1) 下我们已经证明了 (2.9), (2.13) 和 (2.30) 成立.

事实上，利用 Sobolev 不等式和引理 2.1–引理 2.2, 有

$$\begin{aligned}|u(x,t)-\overline{u}|^2&\leqslant 2\|u(\cdot,t)-\overline{u}\|\|u_x(\cdot,t)\|\\&\leqslant C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1,\end{aligned}\tag{3.1}$$

这暗含了

$$|u(x,t)-\overline{u}|\leqslant C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|^{\frac{1}{2}}\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^{\frac{1}{2}}.\tag{3.2}$$

相似地，有

$$|v(x,t)|\leqslant C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|^{\frac{1}{2}}\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^{\frac{1}{2}}.\tag{3.3}$$

由 (3.2) 和 (3.3), 容易验证：如果 $(v_0,u_0-\overline{u})\in(H^1(\mathbb{R}))^2$ 且 $\|(v_0,u_0-\overline{u})\|$ 充分小，那么 (2.1) 成立. 因此，只要 $(v_0,u_0-\overline{u})\in(H^1(\mathbb{R}))^2$ 且 $\|(v_0,u_0-\overline{u})\|$ 充分小，那么先验假定 (2.1) 总是成立的.

为了完成定理 1.1 的证明，只需证明渐近行为 (1.13) 和 (1.14). 接下来，我们致力于证明 (1.13) 和 (1.14). 令

$$P(t)=\|v_x(\cdot,t)\|^2,\quad Q(t)=\|u_x(\cdot,t)\|^2. \tag{3.4}$$

由引理 2.1– 引理 2.3, 有

$$\int_0^\infty (P(t)+Q(t))\mathrm{d}t\leqslant C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|^2. \tag{3.5}$$

利用 (1.1) 中的第 1 个方程、柯西不等式、 Sobolev 不等式和引理 2.1–引理 2.3, 可得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\Big|\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}\Big|\mathrm{d}t&\leqslant C\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}(|u_{xx}|+u_x^2)|v_x|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\leqslant C\int_0^\infty\|(v_x,u_{xx})(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+C\int_0^\infty\|u_x(\cdot,t)\|_{L^4}^4\mathrm{d}t\\&\leqslant C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^2+C\int_0^\infty\|u_x(\cdot,t)\|^3\|u_{xx}(\cdot,t)\|\mathrm{d}t\\&\leqslant C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^2+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^6.\end{aligned} \tag{3.6}$$

类似地，利用 (1.1) 中的第 2 个方程、柯西不等式、 Sobolev 不等式和引理 2.1–引理 2.3, 可得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\Big|\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}\Big|\mathrm{d}t&\leqslant C\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}(|(uv)_xu_{xx}|+u_{xx}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\leqslant C\int_0^\infty\|(v_x,u_x)(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+C\int_0^\infty\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t\\&\leqslant C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^2.\end{aligned} \tag{3.7}$$

从 (3.5)–(3.7) 容易看出

$$\lim_{t\to\infty}P(t)=0,\quad \lim_{t\to\infty}Q(t)=0. \tag{3.8}$$

因此，从 (2.9), (3.8) 和 Sobolev 不等式能立即得到 (1.13).

最后，我们证明 (1.14). 令

$$R(t)=\|v_{xx}(\cdot,t)\|^2,\quad S(t)=\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2. \tag{3.9}$$

从引理 2.1–引理 2.3 可得

$$\int_0^\infty(R(t)+S(t))\mathrm{d}t\leqslant C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_2^2+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^{10}. \tag{3.10}$$

利用 (1.1) 中的第 1 个方程、柯西不等式、 Sobolev 不等式和引理 2.1–引理 2.3, 有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\Big|\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}\Big|\mathrm{d}t&\leqslant C\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}(|u_xu_{xx}|+|u_x|^3+|u_{xxx}|)|v_{xx}|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\leqslant C\int_0^\infty\|(v_{xx},u_{xxx})(\cdot,t)\|^2\mathrm{d}t+C\int_0^\infty(\|u_x(\cdot,t)\|_{L^6}^6+\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2)\mathrm{d}t\\&\leqslant C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_2^2+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^{10}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

类似地，有

$$\int_0^\infty\Big|\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}\Big|\mathrm{d}t\leqslant C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_2^2+C\|(v_0,u_0-\overline{u})\|_1^{10}. \tag{3.12}$$

从 (3.10)–(3.12) 可得

$$\lim_{t\to\infty}R(t)=0,\quad \lim_{t\to\infty}S(t)=0. \tag{3.13}$$

那么，从 (3.8) 和 (3.13) 能立即得到 (1.14).

因此，我们完成了定理 1.1 的证明.

参　考　文　献

[1] Othmer H G, Stevens A. Aggregation, blowup, and collapse: the ABC's of taxis in reinforced random walks [J]. *SIAM J Appl Math*, 1997, 57:1044–1081.

[2] Levine H A, Sleeman B D. A system of reaction diffusion equations arising in the theory of reinforced random walks [J]. *SIAM J Appl Math*, 1997, 57:683–730.

[3] Zhang M, Zhu C J. Global existence of solutions to a hyperbolic-parabolic system [J]. *Proc Amer Math Soc*, 2007, 135(4):1017–1027.

[4] Guo J, Xiao J X, Zhao H J, et al. Global solutions to a hyperbolic-parabolic coupled system with large initial data [J]. *Acta Math Sci Ser B*, 2009, 29(3):629–641.

[5] Duan R J, Lorz A, Markowich P. Global solutions to the coupled chemotaxis-fluid equations [J]. *Comm Partial Differential Equations*, 2010, 35(9):1635–1673.

[6] Horstmanna D, Winklerb M. Boundedness vs. blow-up in a chemotaxis system [J]. *J Differential Equations*, 2005, 215:52–107.

[7] Yang Y, Chen H, Liu W A. On existence of global solutions and blow-up to a system of reaction-diffusion equations modeling chemotaxis [J]. *SIAM J Math Anal*, 2001, 33:763–785.

[8] Corrias L, Perthame B, Zaag H. A chemotaxis model motivated by angiogenesis [J]. *C R Acad Sci Paris Ser I*, 2003, 336:141–146.

[9] Corrias L, Perthame B, Zaag H. Global solutions of some chemotaxis and angiogenesis system in high space dimensions [J]. *Milan J Math*, 2004, 72:1–28.

[10] Gueron S, Liron N. A model of herd grazing as a traveling wave: chemotaxis and stability [J]. *J Math Biol*, 1989, 27:595–608.

[11] Horstmann D, Stevens A. A constructive approach to travelling waves in chemotaxis [J]. *J Nonlinear Sci*, 2004, 14:1–25.

[12] Keller E F, Segel L A. Traveling bands of chemotactic bacteria: a theorectical analysis [J]. *J Theor Biol*, 1971, 30:235–248.

[13] Lui R, Wang Z A. Traveling wave solutions from microscopic to macroscopic chemotaxis models [J]. *J Math Biol*, 2010, 61:739–761.

[14] Nagai T, Ikeda T. Traveling waves in a chemotaxis model [J]. *J Math Biol*, 1991, 30:169–184.

[15] Smoller J. Shock waves and reaction-diffusion equations [M]. New York/Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[16] Nirenberg L. On elliptic partial differential equations [J]. *Annali della Scuola normale superiore di Pisa-Classe di Scienze, Sér* 3, 1959, 13(2):115–162.

[17] Kato S. On local and global existence theorems for a nonautonomous differential equation in a Banach space [J]. *Funkcial Ekvac*, 1976, 19:279–286.

[18] Nishida T. Nonlinear hyperbolic equations and related topics in fluid dynamics [J]. *Publ Math*, 1978, 128:1053–1068.

Global Analysis of Smooth Solutions to a Generalized Hyperbolic-Parabolic System Modeling Chemotaxis

ZHANG Yinghui[1] TAN Zhong[2] LAI Baishun[3] SUN Mingbao[1]

[1]School of Mathematics, Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang 414006, Hunan, China.
E-mail: zhangyinghui1009@yahoo.com.cn; sun_mingbao@163.com
[2]School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, Fujian, China. E-mail: ztan85@163.com
[3]Institute of Contemporary Mathematics, Henan University, Kaifeng 475004, Henan, China. E-mail: laibaishun@henu.edu.cn

Abstract The authors establish the existence and the asymptotic behavior of global smooth solutions to the Cauchy problem for a generalized hyperbolic-parabolic system modeling chemotaxis with the nonlinear kinetic function and smooth initial data which have small L^2-norm energy, but possibly large H^2-norm energy. These results generalize previous related results on smooth solutions for the kinetic function being linear or H^2-norm of the initial data being sufficiently small, and are first obtained for global smooth solutions with arbitrarily large H^2-norm. The proof is based on constructing a new nonnegative convex entropy and making delicate energy estimates.

Keywords Global analysis, Hyperbolic–parabolic system, Chemotaxis, Convex entropy
2000 MR Subject Classification 35L45

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 33 No. 1, 2012
by ALLERTON PRESS, INC., USA